211hi16

16

एक वृत्त में कोण तथा चक्रीय चतुर्भुज

आपने दो रेखाओं के बीच के कोण को अवश्य ही मापा होगा। अब हम एक वृत्त में वृत्त की चाप तथा जीवा द्वारा बनाए गए कोणों तथा चक्रीय चतुर्भुज के विषय में अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि:

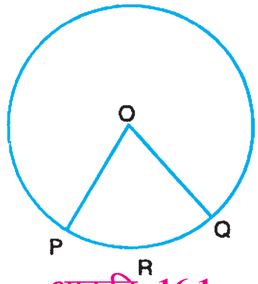
- यह सत्यापित कर सकें कि किसी चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण, उस चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग पर बनाये गए कोण का दो गुना होता है;
- सिद्ध कर सकें कि एक ही वृत्तखंड में बने कोण समान होते हैं;
- चक्रीय बिन्दुओं के उदाहरण दे सकें;
- चक्रीय चतुर्भुज को परिभाषित कर सकें;
- सिद्धकर सकें कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180^0 होता है;
- चक्रीय चतुर्भुज के गुणधर्मों का प्रयोग कर सकें;
- प्रमेयों (जो सिद्ध की हैं) पर आधारित प्रश्न हल कर सकें और सत्यापित गुणधर्मों पर आधारित अन्य संख्यात्मक समस्याओं को हल कर सकें;
- अन्य प्रमेयों के परिणामों का प्रयोग, प्रश्नों को हल करने में कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- त्रिभुज के कोण
- वृत्त की चाप, जीवा और परिधि
- चतुर्भुज और इसके प्रकार

16.1 एक वृत्त में कोण

केन्द्रीय कोण: एक चाप (या जीवा) के सिरों से वृत्त की त्रिज्याओं द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण केन्द्रीय कोण कहलाता है। अर्थात एक चाप (या जीवा) द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण केन्द्रीय कोण कहलाता है।

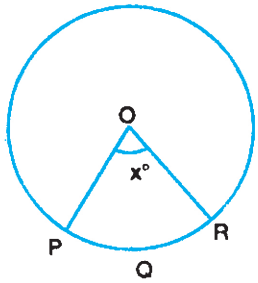


आकृति 16.1

आकृति 16.1 में, $\angle POQ$, चाप PRQ द्वारा बनाया गया केन्द्रीय कोण है।

एक चाप की लम्बाई, चाप द्वारा बनाए गए केन्द्रीय कोण से निकटता से सम्बन्धित है। आइए हम एक चाप के 'अंशमाप' के केन्द्रीय कोण के रूप में परिभाषित करें।

एक वृत्त की लघु चाप का अंश माप, इस चाप द्वारा बनाए गए संगत केन्द्रीय कोण के बराबर होता है।



आकृति 16.2

आकृति 16.2 में, चाप PQR का अंश माप $= x^{o}$

एक अर्द्धवृत्त का अंश माप 180^{0} होता है तथा एक दीर्घ चाप का अंश माप (360^{0}–संगत लघु चाप का अंशमाप) होता है।

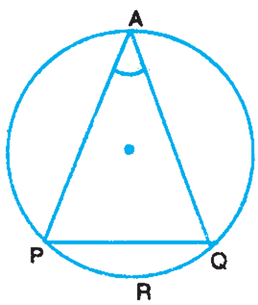
एक चाप की लम्बाई तथा इस के अंश माप के बीच सम्बन्ध

$$\text{चाप की लम्बाई} = \text{परिधि} \times \frac{\text{चाप का अंश माप}}{360^{o}}$$

यदि एक चाप PQR का अंशमाप 40^{o} हो तो इस

$$\text{चाप PQR की लम्बाई} = 2\pi r.\frac{40^{o}}{360^{o}} = \frac{2}{9}\pi r$$

अन्तर्गत कोण: एक चाप (या जीवा) द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर बनाया गया कोण अन्तर्गत कोण कहलाता है।



आकृति 16.3

आकृति 16.3 में, चाप PQR द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु A पर बनाया गया कोण $\angle PAQ$ अन्तर्गत कोण है। यह कोण जीवा PQ द्वारा बिन्दु A पर बनाया गया कोण भी है।

16.2 कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्म

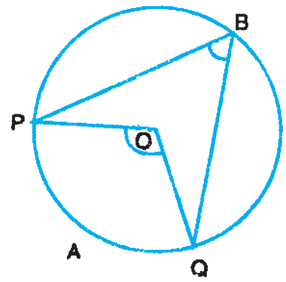
आपके लिए क्रियाकलापः

केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस पर एक चाप PAQ लेकर वृत्त के शेष भाग में बिन्दु B लीजिए।

केन्द्रीय कोण POQ तथा वृत्त के शेष भाग में अन्तर्गत कोण PBQ मापिए। हम देखते हैं कि

$\angle POQ = 2\angle PBQ$

इस कार्य को भिन्न भिन्न वृत्त तथा भिन्न भिन्न चाप लेकर दोहराइए। हम पाते हैं कि



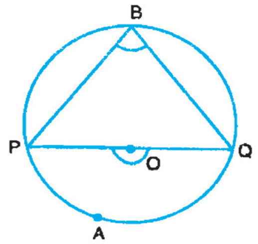
आकृति 16.4

एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण, उस चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में बनाये गये अन्तर्गत कोण का दुगुना होता है।

माना एक वृत्त का केन्द्र O है। एक अर्द्धवृत्त PAQ लेकर इसके अन्तर्गत कोण PBQ लीजिए।

$\therefore\ 2\angle PBQ = \angle POQ$

(क्योंकि एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण, इस चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में बनाए गए अन्तर्गत कोण का दुगुना होता है।)



आकृति 16.5

परन्तु $\angle POQ = 180^\circ$

$2\angle PBQ = 180^\circ$

$\therefore\ \angle PBQ = 90^\circ$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि

एक अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।

प्रमेयः एक वृत्तखण्ड में बने कोण समान होते हैं।

दिया हैः O केन्द्र वाला एक वृत्त।

जीवा PQ (या चाप PAQ) द्वारा बनाए गए वृत्तखण्ड में दो कोण $\angle PRQ$ तथा $\angle PSQ$

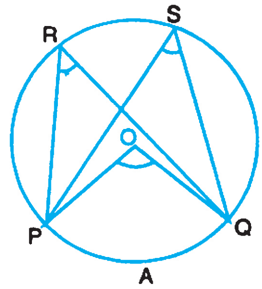
सिद्ध करना हैः $\angle PRQ = \angle PSQ$

रचनाः OP और OQ को मिलाइए।

उपपत्ति: क्योंकि एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण उस चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में बनाए गए अन्तर्गत कोण का दुगुना होता है, इसलिए

$\angle POQ = 2\angle PRQ$ ...(i)

और $\angle POQ = 2\angle PSQ$ ...(ii)



आकृति 16.6

(i) और (ii) से,

$$2\angle PRQ = 2\angle PSQ$$

$$\therefore \quad \angle PRQ = \angle PSQ$$

उपरोक्त परिणाम का विलोम भी सत्य है जिसका कथन निम्न है

यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड, दो अन्य बिन्दुओं, जो इस रेखाखण्ड के एक ही ओर हों, पर समान कोण बनाता हो, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होंगे।

इस परिणाम को सत्यापित करने के लिए, एक रेखाखण्ड AB (माना 5 सेमी) खींचिए। AB के एक ओर दो बिन्दु C तथा D ज्ञात कीजिए जिससे $\angle ACB = \angle ADB$.

तीन असंरेख बिन्दुओं A, C, B से होकर एक वृत्त खींचिए। आप क्या अवलोकन करते हो?

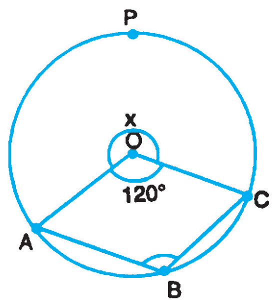
बिन्दु D भी, बिन्दुओं A, C, B में से होकर जाने वाले वृत्त पर स्थित है अर्थात सभी चारों बिन्दु A, B, C तथा D चक्रीय हैं।

इस क्रिया को एक अन्य रेखाखण्ड लेकर कीजिए। हर बार आप पाएंगे कि चारों बिन्दु एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

इससे परिणाम सत्यापित हो जाता है।

उपरोक्त परिणामों की सहायता से हम कुछ प्रश्न हल करते हैं।

उदाहरण 16.1 : आकृति 16.7 में, O वृत्त का केन्द्र तथा $\angle AOC = 120^0$ । $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए



आकृति 16.7

हल: यह स्पष्ट है कि $\angle x$, चाप APC द्वारा बनाया गया केन्द्रीय कोण है तथा $\angle ABC$ एक अन्तर्गत कोण है।

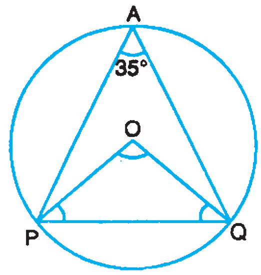
$\therefore \quad \angle x = 2\angle ABC$

परन्तु $\quad \angle x = 360^o - 120^0 = 240^o$

$\therefore \quad 2\angle ABC = 240^o$

या $\quad \angle ABC = 120^o$

उदाहरण 16.2 : आकृति 16.8 में, O वृत्त का केन्द्र है तथा $\angle PAQ = 35^\circ$। $\angle OPQ$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.8

हल: $\angle POQ = 2\angle PAQ = 70^\circ$ ...(i)

(केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेष भाग पर बने कोण का दुगुना होता है)

क्योंकि $OP = OQ$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\therefore \quad \angle OPQ = \angle OQP$ ...(ii)

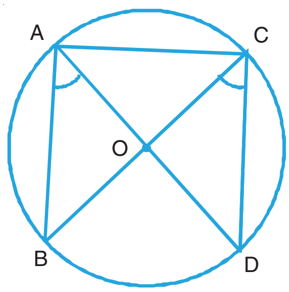
(समान भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं)

परन्तु $\angle OPQ + \angle OQP + \angle POQ = 180^\circ$

$\therefore \quad 2\angle OPQ = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

या $\quad \angle OPQ = 55^\circ$

उदाहरण 16.3 : आकृति 16.9 में, O वृत्त का केन्द्र है तथा AD, $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है। $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.9

हल: Θ BC एक व्यास है

$\therefore \quad \angle BAC = 90^\circ$ (अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है)

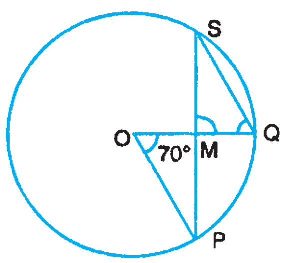
AD, $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है।

$\therefore \quad \angle BAD = 45^\circ$

परन्तु $\angle BCD = \angle BAD$ (एक वृत्तखण्ड के कोण)

$\therefore \quad \angle BCD = 45^\circ$

उदाहरण 16.4 : आकृति 16.10 में, O वृत्त का केन्द्र है, $\angle POQ = 70^\circ$ तथा $PS \perp OQ$। $\angle MQS$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.10

हल:

$$2\angle PSQ = \angle POQ = 70^\circ$$

(वृत्त के केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेष भाग में बने कोण का दुगुना होता है)

$\therefore \quad \angle PSQ = 35^\circ$

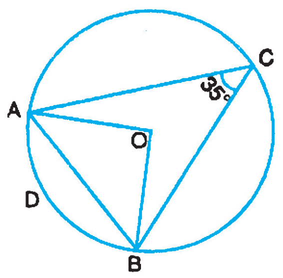
क्योंकि $\angle MSQ + \angle SMQ + \angle MQS = 180^\circ$ (त्रिभुजों के कोणों का योग)

$\therefore \quad 35^\circ + 90^\circ + \angle MQS = 180^\circ$

$\therefore \quad \angle MQS = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

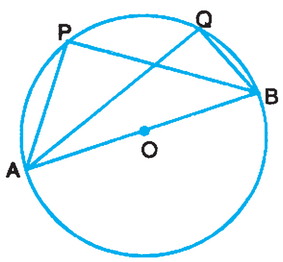
देखें आपने कितना सीखा 16.1

1. आकृति 16.11 में, O केन्द्र के वृत्त की एक चाप ADB है। यदि $\angle ACB = 35^\circ$ हो, तो $\angle AOB$ ज्ञात कीजिए।



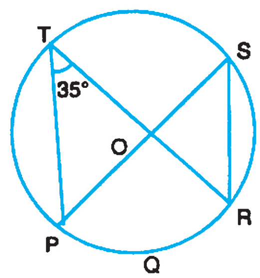
आकृति 16.11

2. आकृति 16.12 में, O केन्द्र वाले वृत्त का AOB एक व्यास है।
क्या $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ है? कारण दीजिए।



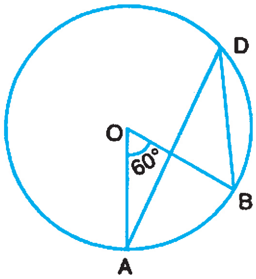
आकृति 16.12

3. आकृति 16.13 में, O केन्द्र वाले वृत्त की PQR एक चाप है। यदि $\angle PTR = 35^0$ हो, तो $\angle PSR$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.13

4. आकृति 16.14 में, O वृत्त का केन्द्र है तथा $\angle AOB = 60^0$ । $\angle ADB$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.14

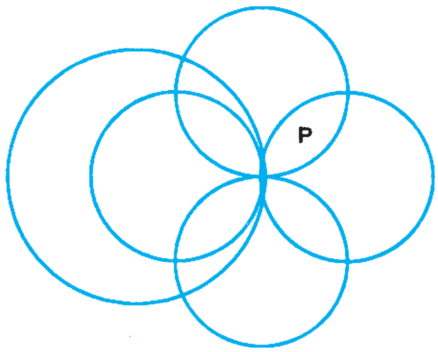
16.3 एक वृत्तीय बिन्दु

परिभाषा: वह बिन्दु जो एक वृत्त पर स्थित हैं, एक वृत्तीय बिन्दु कहलाते हैं।

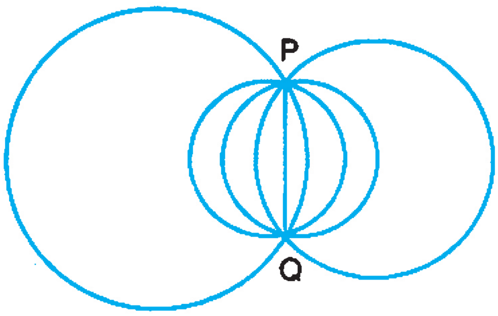
अब हम वह प्रतिबन्ध ज्ञात करते हैं जिनके अन्तर्गत बिन्दु एक वृत्तीय होते हैं।

यदि आप एक बिन्दु P लें तो आप इसमें से होकर जाने वाले एक नहीं परन्तु कई वृत्त खींच सकते हैं जैसा कि आकृति 16.15 में दर्शाया गया है।

अब आप कागज पर दो बिन्दु P तथा Q लें। आप इन बिन्दुओं में से होकर जाने वाले, जितने चाहें, उतने वृत्त खींच सकते हैं (आकृति 16.16).

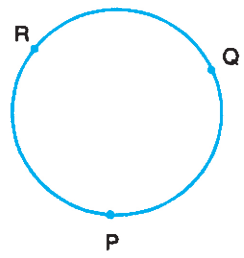


आकृति 16.15



आकृति 16.16

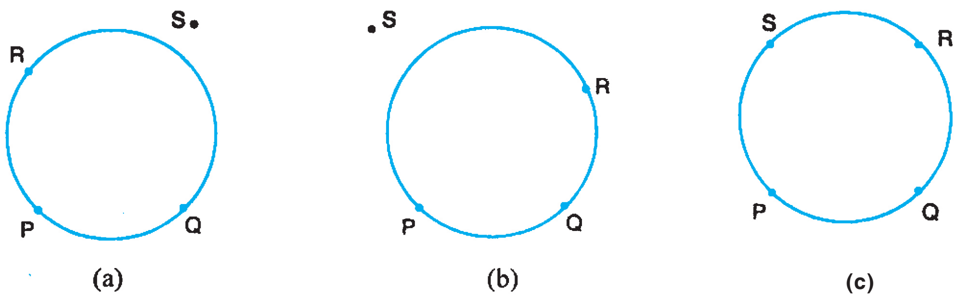
आइए अब हम तीन ऐसे बिन्दु P, Q तथा R लें जो एक रेखा पर नहीं हैं। इस अवस्था में आप तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर जाने वाला केवल एक वृत्त खींच सकते हैं। (आकृति 16.17).



आकृति 16.17

आइए अब हम ऐसे चार बिन्दु P, Q, R, तथा S लें जो एक रेखा पर नहीं हैं। आप देखेंगे कि इन चार असंरेख बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त खींचना सदैव सम्भव नहीं है।

आकृति 16.18 (a) तथा (b) में बिन्दु एक वृत्तीय नहीं हैं परन्तु आकृति16.18(c) में बिन्दु एक वृत्तीय हैं।



आकृति 16.18

नोटः यदि बिन्दु P, Q तथा R संरेख हैं तो इनमें से होकर जाने वाला वृत्त खींच सकना सम्भव नहीं है।

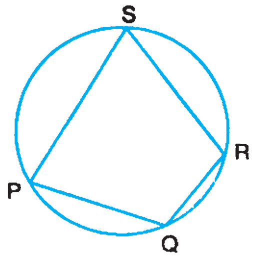
अतः हम इस परिणाम पर पहुंचते हैं कि

1. **दिए गए एक या दो बिन्दुओं से होकर जाने वाले अनन्त वृत्त खींचे जा सकते हैं।**
2. **तीन असंरेख बिन्दु सदा एक वृत्तीय होते हैं तथा इन सभी में से होकर जाने वाला केवल एक वृत्त होता है।**
3. **तीन संरेख बिन्दु एक वृत्तीय नहीं होते।**
4. **चार असंरेख बिन्दु एक वृत्तीय भी हो सकते हैं और नहीं भी।**

16.3.1 चक्रीय चतुर्भुज

एक चतुर्भुज एक चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है यदि इसके चारों शीर्षों से होकर एक वृत्त जाता है।

उदाहरणार्थ आकृति 16.19 में, PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है।



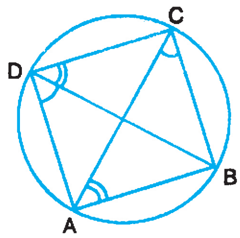
आकृति 16.19

प्रमेय: एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180^0 होता है।

दिया है: एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD

सिद्ध करना है: $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC = 180^0$.

रचना: AC और DB को मिलाइए।



आकृति 16.20

उपपत्ति: $\angle ACB = \angle ADB$

और $\angle BAC = \angle BDC$

[एक वृत्तखण्ड में बने कोण]

$\therefore \quad \angle ACB + \angle BAC = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC$

दोनों ओर $\angle ABC$ जोड़ने पर

$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = \angle ADC + \angle ABC$

परन्तु $\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180^o$ [त्रिभुज के कोणों का योग]

$\therefore \quad \angle ADC + \angle ABC = 180^o$

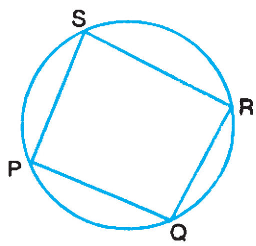
$\therefore \quad \angle BAD + \angle BCD = 360^o - (\angle ADC + \angle ABC) = 180^0$.

अतः परिणाम सिद्ध हुआ।

इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है।

यदि एक चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक हों, तो चतुर्भुज एक चक्रीय चतुर्भुज होगा।

जांच:



आकृति 16.21

एक चतुर्भुज PQRS खींचिए।

चतुर्भुज PQRS में,

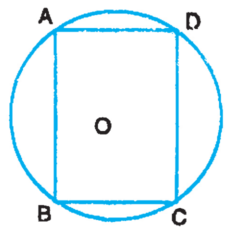
$\angle P + \angle R = 180^o$

और $\angle S + \angle Q = 180^o$

बिन्दुओं P, Q और R में से होकर जाता हुआ वृत्त खींचिए। आप पाएँगे कि यह बिन्दु S से भी होकर जाता है। अतः चतुर्भुज PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है।

हम उपरोक्त परिणामों की सहायता से कुछ उदाहरण हल करते हैं।

उदाहरण 16.5 : ABCD एक चक्रीय समांतर चतुर्भुज है। दर्शाइए कि यह एक आयत है।



आकृति 16.22

हल: $\angle A + \angle C = 180^\circ$

(ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है)

क्योंकि $\angle A = \angle C$

[समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]

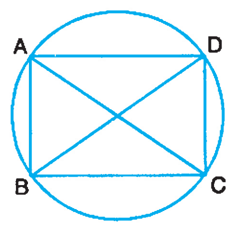
या $\angle A + \angle A = 180^\circ$

$\therefore$ $2\angle A = 180^\circ$

$\therefore$ $\angle A = 90^\circ$

अतः ABCD एक आयत है।

उदाहरण 16.6 : एक चक्रीय चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान है। सिद्ध कीजिए कि इसके विकर्ण भी समान होंगे।



आकृति 16.23

हल: माना ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें AB = CD.

$\Rightarrow$ चाप AB = चाप CD (संगत चाप)

दोनों ओर चाप AD जोड़ने पर

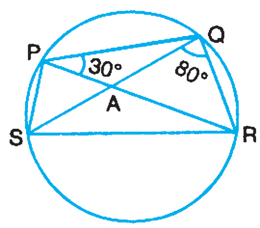
चाप AB + चाप AD = चाप CD + चाप AD

$\therefore$ चाप BAD = चाप CDA

$\Rightarrow$ जीवा BD = जीवा CA

$\Rightarrow$ BD = CA

उदाहरण 16.7 : आकृति 16.24 में, PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण A पर काटते हैं। यदि $\angle SQR = 80^\circ$ तथा $\angle QPR = 30^\circ$ हों, तो $\angle SRQ$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.24

हल: दिया है $\angle SQR = 80^\circ$

अब $\angle SQR = \angle SPR$ [एक वृत्तखण्ड के कोण]

$\therefore \angle SPR = 80^\circ$

$\therefore \angle SPQ = \angle SPR + \angle RPQ$

$= 80^\circ + 30^\circ.$

या $\angle SPQ = 110^\circ.$

परन्तु $\angle SPQ + \angle SRQ = 180^\circ$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।)

$\therefore \angle SRQ = 180^\circ - \angle SPQ$

$= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

उदाहरण 16.8 : PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है

यदि $\angle Q = \angle R = 65^\circ$ हो, तो $\angle P$ और $\angle S$ ज्ञात कीजिए।

हल: $\angle P + \angle R = 180^\circ$

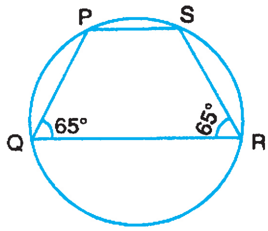
$\therefore \angle P = 180^\circ - \angle R = 180^\circ - 65^\circ$

$\therefore \angle P = 115^\circ$

इसी प्रकार, $\angle Q + \angle S = 180^\circ$

$\therefore \angle S = 180^\circ - \angle Q = 180^\circ - 65^\circ$

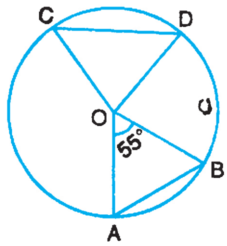
$\therefore \angle S = 115^\circ.$



आकृति 16.25

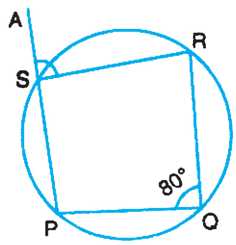
देखें आपने कितना सीखा 16.2

1. आकृति 16.26 में, O केन्द्र वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD समान हैं। यदि $\angle AOB = 55^\circ$ हो, तो $\angle COD$ ज्ञात कीजिए।



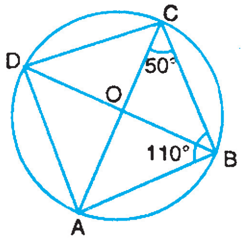
आकृति 16.26

2. आकृति 16.27 में, PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है तथा भुजा PS को बिन्दु A तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle PQR = 80^\circ$ हो, तो $\angle ASR$ ज्ञात कीजिए।



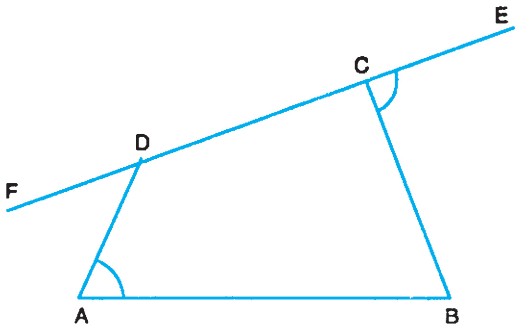
आकृति 16.27

3. आकृति 16.28 में, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिस के विकर्ण एक दूसरे को O पर काटते हैं। यदि $\angle ACB = 50^o$ तथा $\angle ABC = 110^o$ हो, तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.28

4. आकृति 16.29 में, ABCD एक चतुर्भुज है। यदि $\angle A = \angle BCE$ है, तो क्या चतुर्भुज एक चक्रीय चतुर्भुज है? कारण दीजिए।



आकृति 16.29

आइए दोहराएँ

- एक चाप (या जीवा) द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण केन्द्रीय कोण कहलाता है। तथा इस वृत्त के शेष भाग पर बनाया गया कोण अन्तर्गत कोण कहलाता है।
- एक वृत्त पर स्थित बिन्दु एक वृत्तीय बिन्दु कहलाते हैं।
- एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण, इस चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग पर बनाये गए कोण का दुगुना होता है।
- अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।
- एक वृत्तखण्ड में बने कोण समान होते हैं।
- एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180^o होता है।
- यदि एक चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक हों, तो चतुर्भुज चक्रीय होगा।

आइए अभ्यास करें

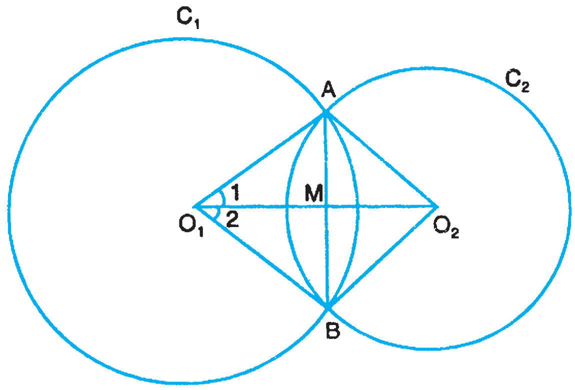
1. O केन्द्र वाले वृत्त के अन्तर्गत एक वर्ग PQRS खींचा गया है। प्रत्येक भुजा केन्द्र O पर किस माप को कोण बनाएगी?

2. आकृति 16.30 में, C_1 और C_2 दो वृत्त हैं जिनके केन्द्र O_1 तथा O_2 हैं तथा यह एक दूसरे को बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। यदि O_1O_2, AB को M पर काटती है, तो दर्शाइए कि

   (i) $\Delta O_1AO_2 \cong \Delta O_1BO_2$

   (ii) AB का मध्य बिन्दु M है।

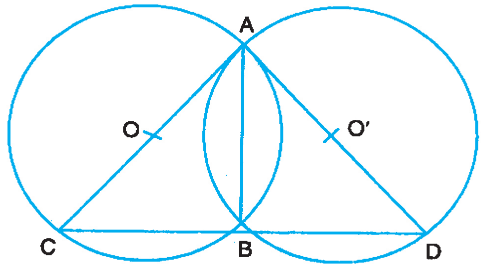
   (iii) $AB \perp O_1O_2$



आकृति 16.30

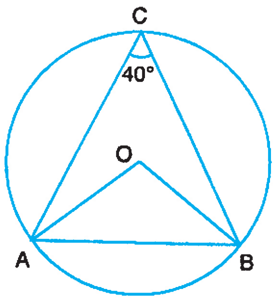
[(संकेत. (i) से $\angle 1 = \angle 2$ है। फिर सिद्ध कीजिए कि $\Delta AO_1M \cong \Delta BO_1M$ (भु को भु (SAS) नियम द्वारा)].

3. आकृति 16.31 में, दो वृत्त बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। AC और AD वृत्तों के व्यास हैं। सिद्ध कीजिए कि C, B और D संरेख हैं।



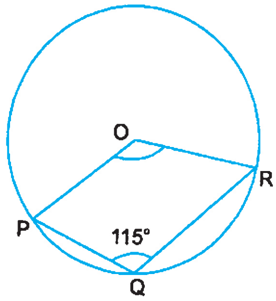
आकृति 16.31

4. आकृति 16.32 में, O केन्द्र वाले वृत्त की AB एक जीवा है। यदि $\angle ACB = 40^\circ$ हो, तो $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



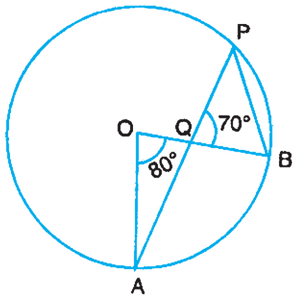
आकृति 16.32

5. आकृति 16.33 में, O वृत्त का केन्द्र है तथा $\angle PQR = 115^\circ$। $\angle POR$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.33

6. आकृति 16.34 में, O वृत्त का केन्द्र है। $\angle AOB = 80^\circ$ तथा $\angle PQB = 70^\circ$। $\angle PBO$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.34

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

16.1

1. 70° 2. हाँ, अर्द्धवृत्त में कोण समकोण होता है।

3. 35° 4. 30°

16.2

1. 55^o 2. 80^o 3. 20^o 4. हाँ

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. 90^o 4. 50^o 5. 130^o 6. 70^o