21

211hi21

ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

पिछले पाठ में, आपने आयतों, वर्गों, त्रिभुजों, समलंबों, वृत्तों, इत्यादि जैसी समतल आकृतियों के परिमापों और क्षेत्रफलों के बारे में अध्ययन किया है। ये समतल आकृतियाँ इसलिए कहलाती हैं, क्योंकि इनमें से प्रत्येक पूर्ण रूप से एक ही तल में स्थित होती हैं। परंतु दैनिक जीवन में, हमें जो अधिकांशतः वस्तुएं देखने को मिलती हैं, पूर्ण रूप से एक ही तल में स्थित नहीं होती हैं। इनमें से कुछ वस्तुएं ईटें, गेंदें, आइसक्रीम कोन, ड्रम, इत्यादि हैं। ये वस्तुएं ठोस वस्तुएं या **त्रिविमीय (Three dimensional)** वस्तुएं कहलाती हैं। इन ठोंसो को निरूपित करने वाली आकृतियाँ **ठोस आकृतियाँ** या **त्रिविमीय आकृतियाँ** कहलाती हैं।

कुछ सामान्य ठोस आकृतियाँ धनाभ, धन, बेलन, भांकु और गोला है। इस पाठ में, हम इन सभी ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों के बारे में अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के बाद, आप समर्थ हो जाएंगे कि

- एक ठोस आकृति के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन के अर्थों का स्पश्ट कर सकें;
- ऐसी स्थितियों की पहचान कर सकें, जहाँ पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने की आव यकता है तथा जहाँ आयतन ज्ञात करने की आव यकता है;
- संगत सूत्रों का प्रयोग करके, धनाभों, धनों, बेलनों, भांकुओं, गोलों और अर्धगोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कर सकें;
- संगत सूत्रों का प्रयोग करके, धनाभों, धनों, बेलनों, भांकुओं, गोलों और अर्धगोलों के आयतन ज्ञात कर सकें;
- उपरोक्त ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों से सम्बंधित कुछ दैनिक जीवन की समस्याओं को हल कर सकें।

आपेक्षित पूर्व ज्ञान

- समतल सरल रेखीय आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफल
- वृत की परिधि और क्षेत्रफल
- संख्याओं पर चारों आधारभूत संक्रियाएं
- एक या दो चरों वाले समीकरणों का हल करना

21.1 पृश्ठीय क्षेत्रफल और आयतन के अर्थ

आकृति 21.1 में दी हुई निम्न वस्तुओं को देखिए :

आकृति 21.1

ज्यामितीय रूप से इन वस्तुओं को त्रिविमीय या ठोस आकृतियों के रूप में निम्न प्रकार निरूपित किया जाता है:

वस्तु	ठोस आकृति
ईंट, अलमारी	घनाभ
पासा, चाय का पैकेट	घन
ड्रम, पाउडर का डिब्बा	बेलन
जोकर की टोपी, आइसक्रीम कोन	भांकु
फुटबाल, गेंद	गोला
कटोरा	अर्धगोला

आपको याद होगा कि आयत ऐसी आकृति है जो केवल अपनी भुजाओं से मिल कर बनी होती है। आपको यह भी याद होगा कि आयत की सभी भुजाओं की लंबाइयों का योग उसका **परिमाप** कहलाता है तथा उसके द्वारा परिबद्व (धेरे गए) क्षेत्र की माप को उसका **क्षेत्रफल** कहलाता है। इसी प्रकार एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग उसका परिमाप तथा त्रिभुज द्वारा परिबद्व क्षेत्र की माप उसका क्षेत्रफल कहलाता है। दूसरे भाब्दों में समतल आकृति, अर्थात त्रिभुज या आयत की परिसीमा की माप उसका **परिमाप** कहलाती है तथा उस समतल आकृति द्वारा परिबद्व तलीय क्षेत्र की माप उसका **क्षेत्रफल** कहलाती है।

इसी परंपरा का पालन करते हुए, एक ठोस आकृति केवल उसकी परिसीमा (अर्थात बाहरी पृश्ठ) से बनी हुई होती है। उदाहरणार्थ, एक धनाभ केवल उसके छः आयताकार क्षेत्रों से मिलकर बनता है (जो उसके **फलक** कहलाते हैं)। इसी प्रकार, गोला केवल उसकी बाहरी पृश्ठ या परिसीमा से ही बना है। समतल आकृतियों की ही तरह, ठोस आकृतियों को भी दो तरीकों से मापा जा सकता है, जैसा नीचे दर्शाया गया है:

(1) ठोस को बनाने वाली बाहरी पृष्ठ या परिसीमा को मापना। यह ठोस आकृति का **पृष्ठीय क्षेत्रफल (Surface area)** कहलाता है

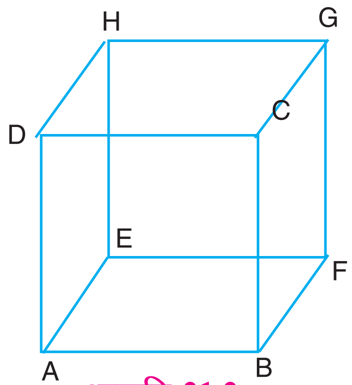
(2) ठोस आकृति द्वारा परिबद्व स्पेस क्षेत्र (Space Region) को मापना। यह ठोस आकृति का **आयतन (Volume)** कहलाता है।

अतः, यह कहा जा सकता है कि पृश्ठीय क्षेत्रफल स्वयं किसी ठोस आकृति की माप होती है तथा आयतन उस ठोस आकृति द्वारा परिबद्व स्पेस क्षेत्र की माप होती है। जिस प्रकार क्षेत्रफल वर्ग इकाइयों में मापा जाता है, उसी प्रकार आयतन को **घन इकाइयों (Cubic units)** में मापते हैं। यदि इस इकाई को 1 सेमी भुजा वाला एक घन लिया जाए, तो आयतन की इकाई सेमी^{3} होती है, यदि इसे 1 मी भुजा वाला घन लें, तो आयतन की इकाई मी^{3} होती है, इत्यादि।

दैनिक जीवन में, हमारे सम्मुख अनेक ऐसी स्थितियाँ आती हैं, जब हमें पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवयकता होती है तथा अनेक स्थितियाँ ऐसी भी होती हैं, जब हमें आयतन ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, यदि हम किसी कमरे की दीवारों और छत पर सफेदी कराना चाहते हैं, तो हमें दीवारों और छत का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा। दूसरी ओर, यदि हम किसी बर्तन में दूध या पानी रखना चाहते हैं या किसी गोदाम में अनाज रखना चाहते हैं, तो हमें आयतन ज्ञात करने की आवश्यकता होगी।

21.2 घनाभ और घन

जैसा पहले बताया जा चुका है कि ईंट, चॉक का डिब्बा, माचिस की डिब्बी, पुस्तक, इत्यादि एक घनाभ (Cuboid) के उदाहरण हैं। आकृति 21.2 एक घनाभ निरूपित करती है। आकृति से यह सरलता से देखा जा सकता है कि एक घनाभ के आयताकार क्षेत्रों के रूप मं छः **फलक** (Faces) होते हैं।



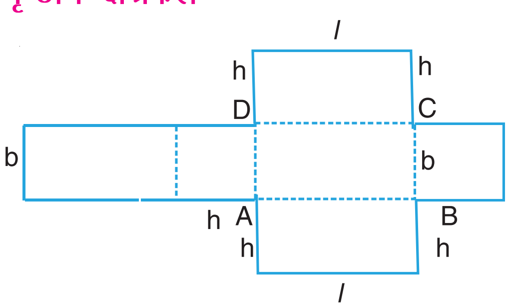
आकृति 21.2

ये ABCD, ABFE, BCGF, EFGH, ADHE और CDHG हैं। इनमें से सम्मुख फलक ABEF और CDHG, ABCD और EFGH तथा ADHE और BCGH क्रमशः परस्पर सर्वांगसम और समांतर हैं। दो आसन्न फलक एक रेखाखंड पर मिलते हैं, जो घनाभ का एक **किनारा** या **कोर (Edge)** कहलाता हैं। उदाहरार्थ, फलक ABCD और ABFE **किनारे** AB पर मिलते हैं। एक घनाभ के कुल 12 किनारे होते हैं। बिंदु A,B,C,D,E,F,G और H घनाभ के कोने या **भीर्श (Vertices)** कहलाते हैं। अतः **एक घनाभ के 8 शीर्ष या कोने होते हैं।**

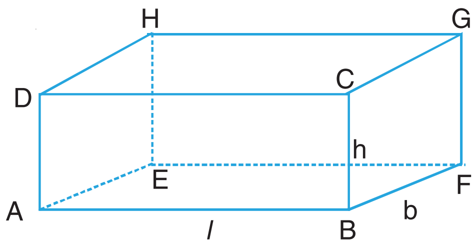
यह भी देखा जा सकता है कि प्रत्येक शीर्ष पर तीन किनारे मिलते हैं। इन तीनों में से एक को लंबाई कहा जाता है। दूसरे किनारे को चौड़ाई तथा तीसरे किनारे को ऊँचाई (या गहराई) कहा जाता है। इन्हें प्रायः क्रम ाः l, b और h से व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि AB (= EF = CD = GH) घनाभ की **लंबाई** है, AE (=BF = CG = DH) **चौड़ाई** है तथा AD (= EH = BC = FG) उसकी **ऊँचाई** है।

ध्यान दीजिए कि तीन फलक ABFE, AEHD और EFGH **घनाभ** के शीर्ष E पर मिलतें हैं तथा इनके सम्मुख **फलक** DCGH, BFGC और ABCD शीर्ष C पर मिलते हैं। अतः E और C घनाभ के सम्मुख **कोने** या **शीर्ष** कहलाते हैं। E और C को मिलाने वाला रेखाखण्ड EC इस **घनाभ** का एक **विकर्ण** कहलाता है। इसी प्रकार, इस घनाभ के अन्य **विकर्ण** AG, BH और FD हैं। **एक घनाभ के कुल चार विकर्ण होते है।**

पृष्ठीय क्षेत्रफल



(i)



(ii)

आकृति 21.3

आकृति 21.3 (i) को देखिए। यदि इसे बिंदुकित रेखाओं के अनुदिश मोड़ा जाए, तो यह आकृति 21.3 (ii) में दर्शाया गया आकार ले लेती है, जो एक घनाभ है। स्पश्टतः आकृति 21.3 (ii) में प्राप्त इस घनाभ की लंबाई , चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः l, b और h हैं। इसके पृश्ठीय क्षेत्रफल के बारे में आप क्या कह सकते हैं? स्पष्टतः इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल आकृति 21.3 (i) में सभी छः आयतों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

इस प्रकार, **घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल**

$$= l\times b + b\times h + h\times l + l\times b + b\times h + h\times l$$

$$= \mathbf{2(}lb + bh + hl\mathbf{)}$$

आकृति 21.3 (ii) में, आइए BE और EC को मिलाएं (देखिए आकृति 21.4)

हमें प्राप्त है :

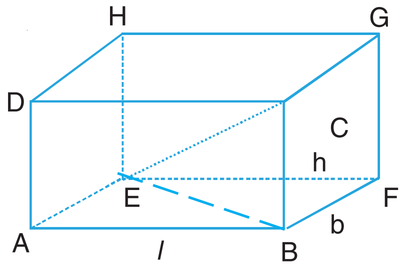
$BE^2 = AB^2 + AE^2$ (क्योंकि $\angle EAB = 90^o$ हैं)

या $BE^2 = l^2 + b^2$ -(1)

साथ ही, $EC^2 = BC^2 + BE^2$ (क्योंकि $\angle CBE = 90^o$ हैं)

या $EC^2 = h^2 + l^2 + b^2$ [(i) से]

अत: , $EC = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$.



आकृति 21.4

इसलिए, एक **घनाभ का विकर्ण** = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$.

हम जानते हैं कि घन एक विशेष प्रकार का घनाभ होता है, जिसमें लंबाई = चौड़ाई = ऊँचाई होती है, अर्थात् $l = b = h$ है।

अत: किनारे ***a* वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल**

$$= 2\,(a \times a + a \times a + a \times a)$$

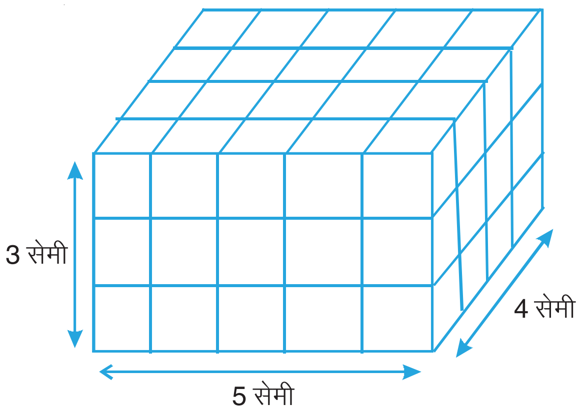
$$= 6a^2$$

तथा उसका **विकर्ण** = $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

टिप्पणी: आकृति 21.3 (i), आकृति 21.3 (ii) में दिए घनाभ का एक जाल या **नेट (Net)** कहलाता है।

आयतन:

1 सेमी भुजा वाले कुछ इकाई घन लीजिए तथा उन्हें जोड़कर आकृति 21.5 में द ार्ाए अनुसार एक घनाभ बनाइए।



आकृति 21.5

इन धनों को गिन कर आप देख सकते हैं कि यह घनाभ 60 इकाई घनों से मिल कर बना है।

अतः इसका आयतन = 60 घन सेमी या 60 सेमी^{3} है क्योंकि इस स्थिति में, 1 इकाई घन का मान 1 सेमी^{3}.

आप यह भी देख सकते हैं कि लंबाई × चौड़ाई × उंचाई = $5 \times 4 \times 3$ सेमी^{3}

= 60 सेमी^{3}

आप इकाई घनों की भिन्न–भिन्न संख्याएं लेकर अन्य घनाभ बना सकते हैं तथा इन इकाई घनों को गिन कर इसके आयतन ज्ञात कर सकते हैं। आप सदैव यह पाएंगे कि घनाभ का आयतन

घनाभ का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

अर्थात् घनाभ का आयतन = lbh

साथ ही, एक घन ऐसा घनाभ है जिसमें $l = b = h$ है।

अतः भुजा a **वाले घन का आयतन** = $a \times a \times a \times = a^3$ है।

आइए अब इन सूत्रों के प्रयोग को स्पष्ट करने के लिए, कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 21.1: एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4 सेमी, 3 सेमी और 12 सेमी हैं। ज्ञात कीजिए:

(i) पृष्ठीय क्षेत्रफल, (ii) आयतन और (iii) विकर्ण

हल: (i) घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\,(lb + bh + hl)$

$= 2\,(4 \times 3 + 3 \times 12 + 12 \times 4)$ सेमी^{2}

$= 2\,(12 + 36 + 48)$ सेमी^{2} = 192 सेमी^{2}

(ii) घनाभ का आयतन $= lbh$

$= 4 \times 3 \times 12$ सेमी^{3} = 144 सेमी^{3}

(iii) घनाभ का विकर्ण $= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$.

$= \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}$ सेमी

$= \sqrt{16 + 9 + 144}$ सेमी

$= \sqrt{169}$ सेमी = 13 सेमी

उदाहरण 21.2: लंबाई 3 मी, चौड़ाई 2 मी और मोटाई 25 सेमी वाले एक घनाभाकार पत्थर के स्लैब का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $l = 3$ मी, $b = 2$ मी और

$$h = 25 \text{ सेमी} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ मी}$$

(ध्यान दीजिए कि यहां तीसरी विमा मोटाई, ऊंचाई के स्थान पर है।)

अतः वांछित आयतन $= lbh$

$$= 3 \times 2 \times \frac{1}{4} \text{ मी}^3 = 1.5 \text{मी}^3$$

उदाहरण 21.3 : किसी घन का आयतन 2197 सेमी^{3} है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल और विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि घन का किनारा a सेमी है।

अतः इसका आयतन $= a^3$ मी^{3}

अतः दिये हुए प्रश्न से, हमें प्राप्त होता है;

$a^3 = 2197$

या $a^3 = 13 \times 13 \times 13$

अतः, $a = 13$

अर्थात घन का किनारा = 13 सेमी है।

अब, घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2$

$= 6 \times 13 \times 13$ सेमी^{2}

$= 1014$ सेमी^{2}

इसका विकर्ण = $a\sqrt{3}$ सेमी = $13\sqrt{3}$ सेमी

इस प्रकार, घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 सेमी^{2} है तथा विकर्ण $13\sqrt{3}$ सेमी है।

उदाहरण 21.4 : एक घनाभकार टंकी की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 5 मी और 4 मी हैं। यदि यह पानी से सम्पूर्ण रूप से भरी हुई है, तथा इसमें 60 मी^{3} पानी है, तो टंकी में पानी की गहराई ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए कि गहराई d मीटर है।

अतः, टंकी में पानी का आयतन

$= l \times b \times \text{h}$

$= 5 \times 4 \times \text{d}$ मी^{3}

अतः, दिये हुए प्रश्न के अनुसार,

$$5 \times 4 \times d = 60$$

या $$d = \frac{60}{5 \times 4} \text{ मी} = 3 \text{मी}$$

अतः टंकी में पानी की गहराई 3मी हैं।

नोटः किसी बर्तन के आयतन को प्रायः उसकी **धारिता** कहा जाता है। अतः यहाँ यह कहा जा सकता है कि टंकी की धारिता 60 मी^{3} है। धारिता को लीटरों के रूप में भी व्यक्त किया जाता है, जहाँ 1 लीटर $= \frac{1}{1000}$ मी^{3}, अर्थात्, 1 मी^{3} = 1000 लीटर होता है।

अतः, यह भी कहा जा सकता है कि इस टंकी की धारिता 60×1000 लीटर = 60000 लीटर है। यह भी एक जानने योग्य बात है कि द्रवों को लीटरों में मापा जाता है।

उदाहरण 21.5 : 1.5 मी लंबा, 1.25 मी चौड़ा तथा 65 सेमी गहरा एक आयताकार लकड़ी का डिब्बा बनाया जाता है, जो ऊपर से खुला है। लकड़ी की मोटाई को नगण्य मानते हुए, ₹ 200 प्रति मी^{2} की दर से इस डिब्बे को बनवाने में लगी लकड़ी की लागत ज्ञात कीजिए।

हल : आवश्यक लकड़ी का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= lb + 2bh + 2hl$ (क्योंकि डिब्बा ऊपर से खुला है।)

$$= \left(1.5 \times 1.25 + 2 \times 1.25 \times \frac{65}{100} + 2 \times \frac{65}{100} \times 1.5\right) \text{ मी}^2$$

$$= \left(1.875 + \frac{162.5}{100} + \frac{195}{100}\right) \text{ मी}^2$$

$$= (1.875 + 1.625 + 1.95) \text{ मी}^2 = 5.450 \text{ मी}^2$$

अतः ₹ 200 प्रति मी^{2} की दर से लकड़ी की लागत

= ₹ 200×5.450

= ₹ 1090

उदाहरण 21.6 : 10 मी गहरी और 100 मी चौड़ी एक नदी 4.5 किमी प्रति घंटे की दर से बह रही है। इस नदी से समुंद्र में प्रति सैकेण्ड गिरने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : नदी में पानी के प्रवाह की दर = 4.5 किमी/घंटा

$$= \frac{4.5 \times 1000}{60 \times 60} \text{ मीटर/सैकेण्ड}$$

$$= \frac{4500}{3600} \text{ मीटर / सैकेण्ड}$$

$$= \frac{5}{4} \text{ मीटर / सैकेण्ड}$$

अतः प्रति सैकेण्ड में गिरने वाले पानी का आयतन = घनाभ का आयतन

$$= l \times b \times h$$

$$= \frac{5}{4} \times 100 \times 10 \text{ मी}^3$$

$$= 1250 \text{ मी}^3$$

उदाहरण 21.7: 588 मी लंबे और 50 मी चौड़े एक आयताकार खेत में एक 30 मी लंबी, 10 मी चौड़ी और 12 मी गहरी एक टंकी खोदी जाती है। इस प्रकार खोद कर निकाली गई मिट्टी को खेत के शेष भाग में एकसमान रूप से फैला दिया जाता है। इससे खेत की बढ़ी हुई ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हलः खोदी गई मिट्टी का आयतन = 30 मी × 20 मी × 12 मी वाले घनाभ का आयतन

$$= 30 \times 20 \times 12 \text{ मी}^3 = 7200 \text{ मी}^3$$

खेत के शेष भाग का क्षेत्रफल

= खेत का क्षेत्रफल – टंकी के ऊपरी भाग का क्षेत्रफल

$$= 588 \times 50 \text{ मी}^2 - 30 \times 20 \text{ मी}^2$$

$$= 29400 \text{ मी}^2 - 600 \text{ मी}^2$$

$$= 28800 \text{ मी}^2$$

अतः, खेत की बढ़ी ऊंचाई

$$= \frac{\text{खोदी गई मिट्टी का आयतन}}{\text{खेत के शेष भाग का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{7200}{28800} \text{ मी} = \frac{1}{4} \text{ मी} = 25 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 21.8: किसी कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 7 मी, 4 मी और 3 मी हैं। इसमें क्रमशः विमाओं 2 मी $\times 1\frac{1}{2}$ मी और $1\frac{1}{2}$ मी × 1 मी वाला 1 दरवाजा और 1 खिड़की है। इस कमरे की दीवारों और छत पर ₹ 4 प्रति मी² की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल: कमरे का आकार एक घनाभ जैसा है।

सफेदी कराए जाने वाला क्षेत्रफल = चारों दीवारों का क्षेत्रफल

+ छत का क्षेत्रफल

– दरवाजे का क्षेत्रफल – खिड़की का क्षेत्रफल

चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= l\times h+b\times h+l\times h+b\times h$

$= 2(l+b)\times h$

$= 2(7+4)\times 3$ मी^{2} = 66 मी^{2}

छत का क्षेत्रफल $= l\times b$

$= 7\times 4$ मी^{2} = 28मी^{2}

अतः कमरे में सफेदी कराने वाला क्षेत्रफल = 66 मी^{2} + 28 मी^{2} – $2\times 1\frac{1}{2}$ मी^{2} – $1\frac{1}{2}\times 1$ मी^{2}

= 94 मी^{2} – 3 मी^{2} – $\frac{3}{2}$ मी^{2}

$= \frac{(188-6-3)}{2}$ मी^{2}

$= \frac{179}{2}$ मी^{2}

अतः,

₹ 4 प्रति मी^{2} की दर से सफेदी कराने का व्यय

$= ₹\, 4\times\frac{179}{2} = ₹\, 358$

टिप्पणी: आप चारों दीवारों के क्षेत्रफल के लिए, सीधे सूत्र के रूप में चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= 2\,(l+b)\times h$ का प्रयोग कर सकते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 21.1

1. लंबाई 6 मी, चौड़ाई 3 मी और ऊंचाई 2.5 मी वाले एक घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
2. किनारे 3.6 सेमी वाले एक घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
3. उस घन का किनारा ज्ञात कीजिए, जिसका आयतन 3375 सेमी^{3} है। इस घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

4. किसी बंद लकड़ी के डिब्बे की बाहरी विमाएं 42 सेमी × 32 सेमी × 27 सेमी हैं। यदि लकड़ी की मोटाई 1 सेमी है, तो इस डिब्बे का आंतरिक आयतन ज्ञात कीजिए।

5. किसी गोदाम की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 12 मीटर, 8 मीटर तथा 6 मीटर हैं। इस गोदाम में ऐसे कितने डिब्बें रखे जा सकते हैं, जबकि प्रत्येक डिब्बा 1.5 मी^{3} स्थान घेरता है?

6. एक लकड़ी के शहतीर की लंबाई और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी चौड़ाई 3 मी, मोटाई 75 सेमी और आयतन 33.75 मी^{3} है।

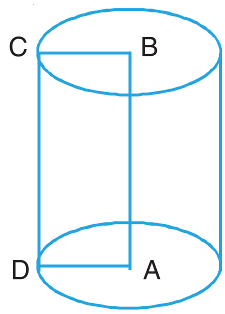
7. किनारे 8 सेमी वाले तीन घनों को सिरे से सिरा मिलाकर एक घनाभ बनाया जाता है। इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।

8. एक कमरा 6 मी लंबा, 5 मी चौड़ा और 4 मी ऊंचा है। इस कमरे की दरवाजे और खिड़कियां 4 वर्ग मीटर स्थान घेरती हैं। कमरे की चारों दीवारों के शेष भाग पर 75 सेमी चौड़ा कागज ₹ 2.40 प्रति मीटर की दर से लगवाने की लागत ज्ञात कीजिए।

9. विभाओं 6 मी × 4 मी ×3 मी वाले एक कमरे में रखी जा सकने वाली सबसे अधिक लंबी छड़ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

21.3 लंब वृत्तीय बेलन

आइए एक आयत ABCD को उसके एक किनारे, मान लीजिए AB के चारों ओर घुमाएं। इस परिभ्रमण द्वारा जनित ठोस एक **लंब वृत्तीय बेलन (Right circular cylinder)** कहलाता है (देखिए आकृति 21.6)। दैनिक जीवन में हमें ऐसे अनेक ठोस मिलते हैं, जैसे पानी के पाइप, टिनों के डिब्बे, ड्रम, पाउडर के डिब्बे, इत्यादि। यह देखा जा सकता है कि एक लंब वृत्तीय बेलन के दोनों सिरे (या आधार) सर्वांगसम वृत हैं। आकृति 21.6, में, A और B इन दोनों वृत्तों के केंद्र हैं, जिनकी त्रिज्याएं AD (= BC) हैं। साथ ही, AB इन दोनों वृत्तों पर लंब है।

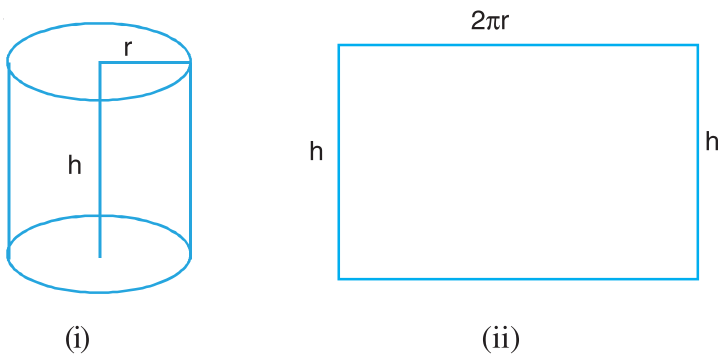


आकृति 21.6

यहां AD (या BC) बेलन की **आधार त्रिज्या** तथा AB **ऊंचाई** कहलाती है। यह भी देखा जा सकता है कि दोनों वृत्ताकार सिरों से बना पृष्ठ **सपाट (Flat)** है, तथा शेष पृष्ठ **वक्रीय (Curved)** है।

पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए त्रिज्या r और ऊंचाई h का एक खोखला बेलन लें तथा उसे दोनों वृत्तीय सिरों के केंद्रों को मिलाने वाले रेखाखण्ड के समान्तर किसी रेखा के अनुदिश काटें। देखिए आकृति 21.7(i)]। हमें एक आयत प्राप्त होता है जिसकी लंबाई $2\pi r$ और ऊंचाई h हैं, जैसा कि आकृति 21.7 (ii) में दर्शाया गया है, स्पष्टतः, इस आयत को क्षेत्रफल बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर है।



आकृति 21.7

अतः बेलन का **वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल**

$= \textbf{आयत का क्षेत्रफल}$

$= 2\pi r \times h = \mathbf{2\pi rh}$

यदि बेलन बंद हो, तो बेलन का **कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल**

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= \mathbf{2\pi r(r + h)}$

आयतन

एक घनाभ की स्थिति में, हमने देखा था कि उसका आयतन $= l \times b \times h$

= आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

इस नियम को एक लंब वृत्तीय बेलन (यह कल्पना करते हुए कि यह अपरिमित रूप से अनेक छोटे घनाभों से बना हैं) के लागू करते हुए, हमें प्राप्त होता है।

लंब वृत्तीय बेलन का आयतन

= आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$= \pi r^2 \times h$

$= \mathbf{\pi r^2 h}$

अब, हम इन सूत्रों का उपयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं। इस पाठ में जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करेंगें।

उदाहरण 21.9: किसी लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या और ऊंचाई क्रमशः 7 सेमी और 10 सेमी है। ज्ञात कीजिए इसका :

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) आयतन

हल : (i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 10 \text{ सेमी}^2 = 440 \text{ सेमी}^2$$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$$= (2\times\frac{22}{7}\times 7\times 10 + 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 7) \text{ सेमी}^2$$

$$= 440 \text{ सेमी}^2 + 308 \text{ सेमी}^2 = 748 \text{ सेमी}^2$$

(iii) आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7}\times 7\times 7\times 10 \text{ सेमी}^3$$

$$= 1540 \text{ सेमी}^3$$

उदाहरण 21.10: धातु का एक खोखला बेलनाकार पाइप दोनों सिरों पर खुला है तथा इसका बाहरी व्यास 12 सेमी हैं। यदि पाइप की लंबाई 70 सेमी है तथा प्रयुक्त धातु की मोटाई 1 सेमी है, तो इस पाइप को बनाने में प्रयुक्त धातु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, पाइप की बाहरी त्रिज्या

$$= \frac{12}{2} \text{ सेमी} = 6 \text{ सेमी}$$

अतः इसकी आंतरिक त्रिज्या = (6–1) = 5 सेमी (क्योंकि धातु की मोटाई = 1 सेमी है।)

ध्यान दीजिए कि एक तरीके से यहां दो बेलन बने हैं

तथा प्रयुक्त धातु का आयतन

= बाहरी बेलन का आयतन – भीतरी बेलन का आयतन

$= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$ (जहाँ r_1 और r_2 क्रमशः बाहरी और भीतरी त्रिज्याएं हैं)

$$= \left(\frac{22}{7}\times 6\times 6\times 70 - \frac{22}{7}\times 5\times 5\times 70\right) \text{ सेमी}^3$$

$$= 22\times 10\times(36-25) \text{ सेमी}^3$$

$$= 2420 \text{ सेमी}^3$$

उदाहरण 21.11: किसी रोड रोलर की त्रिज्या 35 सेमी है और इसकी लंबाई 1 मीटर है। यदि यह किसी खेल के मैदान को चौरस करने के लिए 200 चक्कर लगाता है, तो ₹ 3 प्रति मी^{2} की दर से उस मैदान को चौरस कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : एक चक्कर में रोलर द्वारा चौरस किया गया

क्षेत्रफल = रोलर का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 35 \times 100 \text{ सेमी}^2 \text{ (r = 35 सेमी, h = 1 मी = 100 सेमी)}$$

$$= 22000 \text{ सेमी}^2$$

$$= \frac{22000}{100 \times 100} \text{ मी}^2$$

(क्योंकि 100 सेमी = 1 मी, अतः 100 सेमी × 100 सेमी = 1 मी × 1 मी)

$$= 2.2 \text{ मी}^2$$

अतः 200 चक्करों में मैदान का चौरस किया क्षेत्रफल = 2.2 × 200 मी^{2} = 440 मी^{2}

अतः मैदान को ₹ 3 प्रति मी^{2} से चौरस कराने का व्यय = ₹ 3 × 440 = ₹ 1320

उदाहरण 21.12: आयतन 1 मी^{3} वाली एक ठोस धातु को पिघलाकर 3.5 मिमी कास को एक तार के रूप में खींचा जाता है। इस बार बने तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि तार की लंबाई x मिमी है।

आप देख सकते हैं कि तार एक लंब वृत्तीय बेलन के आकार का है।

इसका व्यास = 3.5 मिमी

$$\text{अतः, इसकी त्रिज्या} = \frac{3.5}{2} \text{ मिमी} = \frac{35}{20} = \frac{7}{4} \text{ मिमी}$$

साथ ही, तार की लंबाई को बेलन की ऊँचाई समझा जाता है।

अतः बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times x \text{ मिमी}^3$$

परंतु तार 1 मी^{3} आयतन से बनाया गया है।

$$\text{अतः, } \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{x}{1000000000} = 1 \text{ (क्योंकि 1 मी = 1000 मिमी)}$$

$$\text{या} \quad x = \frac{1 \times 7 \times 4 \times 4 \times 1000000000}{22 \times 7 \times 7} \text{ मिमी}$$

$$= \frac{16000000000}{154} \text{ मिमी}$$

अतः, तार की लंबाई $= \dfrac{16000000000}{154}$ मिमी

$$= \frac{16000000000}{154000} \text{ मी}$$

$$= \frac{16000000}{154} \text{ मी} = 103896 \text{ मी (लगभग)}$$

देखें आपने कितना सीखा 21.2

1. त्रिज्या 5 मीटर और ऊंचाई 1.44 मी वाले एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।

2. किसी लंब वृत्तीय बेलन का आयतन 3080 सेमी^{3} है तथा इसके आधार की त्रिज्या 7 सेमी है। बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. एक बेलनाकार पानी की टंकी का आधार व्यास 7 मीटर और ऊंचाई 2.1 मीटर है। इस टंकी की धारिता लीटर में ज्ञात कीजिए।

4. किसी कागज की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 33 सेमी और 16 सेमी है। इसे इसकी चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर एक बेलन बनाया जाता है। इस बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

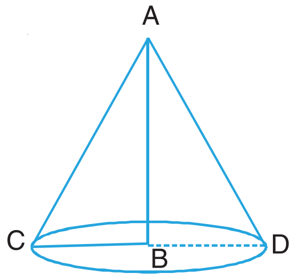
5. आधार व्यास 28 सेमी और ऊंचाई 12 सेमी की एक बेलनाकार बाल्टी पानी से पूरी भरी हुई है। इस पानी को एक आयताकार टब में डाला जाता है, जिसकी लंबाई 66 सेमी और चौड़ाई 28 सेमी है। वह ऊंचाई ज्ञात कीजिए जिस तक पानी टब में चढ़ जाएगा।

6. एक खोखला धातु का बेलन दोंनों सिरों से खुला हुआ है तथा इसकी लंबाई 8 सेमी है। यदि धातु की मोटाई 2 सेमी है तथा बेलन का बाहरी व्यास 10 सेमी है, तो बेलन का सम्पूर्ण वक्र पृश्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए).

   [**संकेत** : सम्पूर्ण वक्र पृष्ठ = आंतरिक वक्र पृष्ठ + बाहरी वक्र पृष्ठ]

21.4 लंब वृत्तीय भांकु

आइए एक समकोण त्रिभुज ABC, जिसका कोण B समकोण है, को उसकी समकोण वाली एक भुजा AB के प्रति घुमाएं। इस परिभ्रमण के फलस्वरूप जनित ठोस एक **लंब वृत्तीय शंकु (Right circular cone)** कहलाता है(देखिए आकृति 21.8)। दैनिक जीवन में, हमें इस आकार की अनेक वस्तुएं दिखाई देती हैं, जैसे कि जोकर की टोपी, तंबू, आइसक्रीम कोन, इत्यादि। यह देखा जा सकता है कि लंब वृत्तीय शंकु का सिरा (या आधार) एक वृत है। आकृति 21.8 में, BC केंद्र B वाले आधार की त्रिज्या है तथा AB तथा AB भांकु का शीर्ष कहलाता है तथा AC इसकी **तिर्यक ऊंचाई (Slant height)** कहलाती है। पाइथागोरस प्रमेय से, हमें प्राप्त होता है।



आकृति 21.8

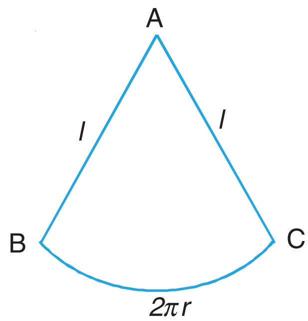
तिर्यक ऊंचाई = $\sqrt{\text{त्रिज्या}^2 + \text{ऊंचाई}^2}$

या, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$, जहाँ r, h और l क्रमशः शंकु की आधार त्रिज्या, ऊंचाई तथा तिर्यक ऊँचाई हैं।

आप यह भी देख सकते हैं कि शंकु के आधार द्वारा बना पृष्ठ **सपाट** है तथा शेष पृष्ठ **वक्रीय** हैं।

पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए त्रिज्या r और ऊंचाई h का एक खोखला शंकु लें तथा इसे तिर्यक ऊंचाई के अनुदिश काटें। अब इसे एक कागज के ऊपर फैला दीजिए। आपको त्रिज्या l वाले वृत का एक त्रिज्यखण्ड प्राप्त होता है, जिसके संगत चाप की लंबाई या $2\pi r$ है। (देखिए आकृति 21.9)।



आकृति 21.9

इस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल =

$$\frac{\text{त्रिज्यखंड के चाप की लंबाई}}{\text{त्रिज्या } l \text{ वाले वृत्त की परिधि}} \times \text{त्रिज्या } l \text{ वाले वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$= \frac{2\pi r}{2\pi l} \times \pi l^2 = \pi r l$$

स्पष्टतः **शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** = इस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \pi r l$$

यदि उपरोक्त में आधार का क्षेत्रफल जोड़ दिया जाए, तो यह शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल हो जाएगा।

इस प्रकार, **शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \pi rl + \pi r^2$

$$= \boldsymbol{\pi r(l + r)}$$

आयतन

एक ही आधार त्रिज्या और एक ही ऊंचाई का एक लंब वृत्तीय बेलन और एक लंब वृत्तीय शंकु लीजिए। अब शंकु को रेत (या पानी) से भरिए और इसे बेलन में डालिए। इस प्रक्रिया को तीन बार दोहराइए । आप देखेंगे कि बेलन रेत (या पानी) से पूरा भर गया है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि शंकु का आयतन उसी आधार त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले बेलन के आयतन का एक–तिहाई है।

अतः, **शंकु का आयतन** $= \frac{1}{3}$ **बेलन का आयतन**

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

आइए इन सूत्रों का उपयोग स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 21.13: एक लंब वृत्तीय शंकु की आधार त्रिज्या और ऊंचाई क्रमशः 7 सेमी और 24 सेमी हैं। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $r = 7$ सेमी और $h = 24$ सेमी

अतः, तिर्यक ऊंचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{7 \times 7 + 24 \times 24} \text{ सेमी}$$

$$= \sqrt{49 + 576} \text{ सेमी} = 25 \text{ सेमी}$$

इस प्रकार, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 \text{ सेमी}^2 = 550 \text{ सेमी}^2$$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2$

$$= (550 + \frac{22}{7} \times 49) \text{ सेमी}^2$$

$$= (550 + 154) \text{ सेमी}^2 = 704 \text{ सेमी}^2$$

आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 49 \times 24$ सेमी^{3}

$= 1232$ सेमी^{3}

उदाहरण 21.14: शंकु के आकार का एक तंबू 6 मीटर ऊंचा है तथा उसकी आधार त्रिज्या 8 मीटर है। ₹ 120 प्रति मी^{2} की दर से इस तंबू को बनाने में लगे कैनवस का मूल्य ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

हल: मान लीजिए कि तंबू की तिर्यक ऊंचाई x मीटर है

अतः, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ से, हमें प्राप्त होता है:

$$l = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$$

या $\quad l = 10$

इस प्रकार, तंबू की तिर्यक ऊंचाई $= 10$ मी

अतः, इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$= 3.14 \times 8 \times 10$ मी^{2} $= 251.2$ मी^{2}

इस प्रकार, तंबू के लिए आवश्यक कैनवस $= 251.2$ मी^{2}

अतः ₹ 120 प्रति मी^{2} की दर से कैनवस की लागत

$=$ ₹ 120×251.2

$=$ ₹ 30144

देखें आपने कितना सीखा 21.3

1. एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी आधार त्रिज्या और ऊंचाई क्रमशः 5 सेमी और 12 सेमी हैं।

2. आधार क्षेत्रफल 616 सेमी^{2} और ऊंचाई 9 सेमी वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

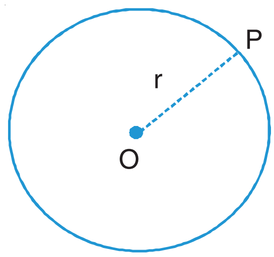
3. ऊंचाई 10.5 सेमी वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 176 सेमी^{3} है। इस शंकु की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

4. 3 मीटर चौड़े उस कैनवस की लंबाई ज्ञात कीजिए जिसकी आधार त्रिज्या 9 मीटर और ऊंचाई 12 मीटर के एक शंकु के आकार के तंबू को बनाने में आवश्यकता होगी। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए।)

5. आयतन 12936 सेमी^{3} और आधार व्यास 42 सेमी वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

21.5 गोला

आइए एक अर्धवृत्त को उसके व्यास के परित धुमाएं। इस परिभ्रमण से जनित ठोस एक **गोला (Sphere)** कहलाता है। इसे निम्न प्रकार भी परिभाषित किया जा सकता है।

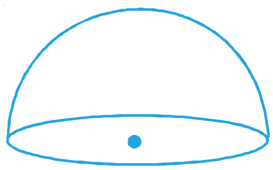


आकृति 21.10

किसी बिंदु का बिंदुपथ (locus) जो स्पेस (space) में इस प्रकार चलायमान है कि उसकी एक स्थिर बिंदु से दूरी समान रहती है एक **गोला** कहलाता है। वह स्थिर बिंदु गोले का केंद्र तथा समान या निि चत दूरी गोले की **त्रिज्या** कहलाती है देखिए आकृति 21.10), हमारे दैनिक जीवन में आने वाले गोले के उदाहरण फुटबाल, क्रिकेट की गेंद, कंचे, इत्यादि हैं।

अर्धगोला

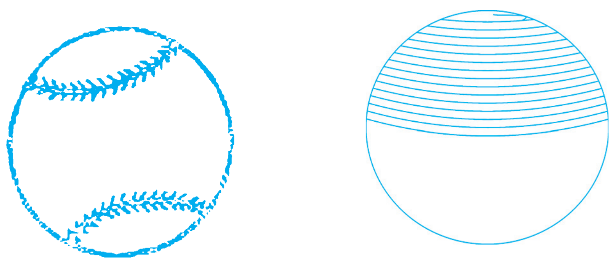
यदि गोले को उसके केंद्र से होकर जाने वाले तल द्वारा दो बराबर भागों में काटा जाता है, तो प्रत्येक भाग एक **अर्धगोला (hemisphere)** कहलाता है। (देखिए आकृति 21.11).



आकृति 21.11

गोले और अर्धगोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए एक रबर (या लकड़ी) की एक गोलाकार गेंद लें और उसे दो बराबर भागों (अर्धगोलों) में काट ले। [देखिए आकृति 21.12(i), मान लीजिए कि इस गेंद की त्रिज्या r है। अब इस गेंद के ऊपरी सिरे पर एक पिन (या कील) लगा दीजिए, तथा इस बिंदु (अर्थात, पिन के स्थान) से प्रारम्भ करते हुए उस पर धागा या डोरी लपेटते जाइए, जब तक कि ऊपरी अर्धगोले पर पूर्ण रूप से लपेट दिया गया हो, जैसा कि आकृति 21.12(ii) में दर्शाया गया है। अर्धगोले पर लपेटे गए इस धागे की लंबाई ज्ञात कीजिए।



(i) (ii)

(iii)

आकृति 21.12

अब त्रिज्या r का एक वृत खींचिए (अर्थात उसी त्रिज्या का जो गेंद (या गोले) की त्रिज्या है)। अब इस वृत को उसी प्रकार के धागे या डोरी से भरिए जो अर्धगोले पर लपेटी थी। देखिए आकृति 21.12 (iii)] इस वृत को ढकने में लगे धागे की लंबाई ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि अर्धगोले को ढंकने में लगे धागे की लंबाई वृत को ढंकने में लगे धागे की लंबाई की दो गुनी है।

क्योंकि दोनों धागों की चौड़ाई बराबर हैं, अतः

अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 × वृत का क्षेत्रफल

$= 2\,\pi r^2$ (वृत का क्षेत्रफल πr^2 है)

अतः, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times 2\pi r^2 = 4\pi r^2$

इस प्रकार,

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

अर्धगोले का कुल वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$,

जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

गोले और अर्धगोले का आयतन

एक ही आधार त्रिज्या r और एक ही ऊंचाई वाला एक अर्धगोला और एक लंब वृत्तीय शंकु लीजिए। अब शंकु को रेत (या पानी) से भरिए और इसे अर्धगोले में भरिए। इस प्रक्रिया को दो बार कीजिए। आप देखेंगे कि अर्धगोला रेत (या पानी) से पूरा भर गया है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि त्रिज्या r के अर्धगोले का आयतन इसी आधार त्रिज्या और ऊंचाई वाले शंकु के आयतन का दो गुना है।

अतः, अर्धगोले का आयतन $= 2 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times r$ (क्योंकि $h = r$)

$$= \frac{2}{3} \times \pi r^3$$

अतः, त्रिज्या r वाले गोले का आयतन $= 2 \times \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

अर्धगोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

तथा अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$,

जहाँ r गोले (या अर्धगोले) की त्रिज्या है।

आइए, कुछ उदाहरणों द्वारा इन सूत्रों के प्रयोग को स्पष्ट करें।

उदाहरण 21.15: व्यास 21 सेमी वाले गोले के पृश्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: गोले की त्रिज्या $= \frac{21}{2}$ सेमी

अतः इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \text{ सेमी}^2$$

$$= 1386 \text{ सेमी}^2$$

इसका आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \text{ सेमी}^3 = 4851 \text{ सेमी}^3$$

उदाहरण 21.16: किसी अर्धगोलाकार कटोरे का आयतन 2425.5 सेमी^{3} है। इसकी त्रिज्या और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए कि त्रिज्या r सेमी है।

अतः, $\frac{2}{3}\pi r^3 = 2425.5$

या $\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} r^3 = 2425.5$

या, $r^3 = \frac{3 \times 2425.5 \times 7}{2 \times 22} = \frac{21 \times 21 \times 21}{8}$

अतः, $r = \frac{21}{2}$, अर्थात् त्रिज्या = 10.5 सेमी

अब, कटोरे का पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$ सेमी^{2}

= 693 सेमी^{2}

टिप्पणी: क्योंकि कटोरा ऊपर से खुला होता है , अतः इसके ऊपरी आधार का क्षेत्रफल πr^2 पृष्ठीय क्षेत्रफल में सम्मिलित नहीं होगा।

देखें आपने कितना सीखा 21.4

1. त्रिज्या 14 सेमी वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक गोले का आयतन 38808 सेमी^{3} है। इसकी त्रिज्या और फिर पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक अर्धगोलाकार खिलौने का व्यास 56 सेमी है। ज्ञात कीजिए इसका :

   (i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (iii) आयतन
4. त्रिज्या 28 सेमी वाली एक धातु की गेंद को पिघलाकर त्रिज्या 7 सेमी वाली छोटी गोलियाँ में परिवर्तित किया है। इस प्रकार बनी गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

आइए दोहराएँ

- वे वस्तु या आकृतियां जो पूर्ण रूप से एक तल में स्थित नहीं होती हैं, ठोस (या त्रिवीमीय) वस्तु या आकृतियां कहलाती है।
- स्वयं ठोस आकृति को बनाने वाली परिसीमा की माप उस ठोस आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल कहलाती है।
- कुछ ठोस आकृतियों की केवल सपाट पृष्ठ होती है, कुछ ठोस आकृतियों की केवल वक्र पृष्ठ होती है तथा कुछ ठोस आकृतियों की पृष्ठ स्पाट और वक्रीय दोनों ही प्रकार की होती हैं।

- किसी घनाभ का पृश्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$ तथा आयतन $= lbh$ हैं, जहाँ, l, b और h क्रम ाः इसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई हैं।
- उपर्युक्त घनाभ का विकर्ण $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$ होता है।
- घन एक विशिष्ट घनाभ होता है, जिसके सभी किनारे बराबर लंबाइयों के होते हैं।
- किनारे a वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2$ और आयतन a^3 होता है।
- उपर्युक्त घन का विकर्ण $a\sqrt{3}$ होता है।
- विमाओं l, b और h वाले एक कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= 2(l + b)\,h$ होता है।
- किसी लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$; कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh+2\pi r^2$ तथा आयतन $= \pi r^2 h$ होता है, जहाँ r और h क्रमशः बेलन की आधार त्रिज्या और ऊँचाई है।
- किसी लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2$ तथा आयतन $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ होता है, जहाँ r, h और l क्रमशः शंकु की आधार त्रिज्या, ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई है।
- किसी गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ तथा आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$ होता है, जहाँ r गोले की त्रिज्या है।
- किसी अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$; कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$ तथा आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$ होता है, जहाँ r अर्धगोले की त्रिज्या है।

आइए अभ्यास करें

1. रिक्त स्थानों को भरिए:

   (i) लंबाई l, चौड़ाई b और ऊँचाई h वाले एक घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = ____________

   (ii) लंबाई l, चौड़ाई b और ऊँचाई h वाले एक घनाभ का विकर्ण = ______________

   (iii) भुजा a वाले घन का आयतन = ____________

   (iv) एक सिरे पर खुले बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = ________, जहाँ r और h क्रमशः उसकी आधार त्रिज्या और ऊँचाई हैं।

   (v) त्रिज्या r वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = ____________ है।

(vi) एक शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल = ____________ है, जहाँ r और l क्रमशः शंकु की ______ तथा _________ हैं।

(vii) त्रिज्या r वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = __________ है।

(viii) त्रिज्या r वाले अर्द्धगोले का आयतन = __________ है।

2. दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

(i) विमाओं 63 सेमी $\times$ 56 सेमी $\times$ 21 सेमी वाले एक घनाभ के आयतन के बराबर आयतन वाले घन का किनारा है

(A) 21 सेमी (B) 28 सेमी (C) 36 सेमी (D) 42 सेमी

(ii) यदि किसी गोले की त्रिज्या दुगुनी कर दी जाए तो उसका आयतन प्रारंभिक आयतन का कितने गुना हो जाएगा?

(A) 2 गुना (B) 3 गुना (C) 4 गुना (D) 8 गुना

(iii) किसी शंकु की आधार त्रिज्या और ऊँचाई के बराबर वाले एक बेलन का आयतन है।

(A) शंकु के आयतन के बराबर (B) शंकु के आयतन का दुगुना

(C) शंकु के आयतन का $\frac{1}{3}$ (D) शंकु के आयतन का तीन गुना

3. यदि किसी घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल 96 सेमी^{2}, है तो उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

4. लंबाई 3 मी, चौड़ाई 2.5 मी तथा ऊँचाई 1.5 मी वाले घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।

5. किनारे 1.6 सेमी वाले एक घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।

6. विमाओं 6 सेमी $\times$ 8 सेमी $\times$ 10 सेमी वाले घनाभ के विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।

7. किनारे 8 सेमी वाले घन के विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।

8. किसी घनाभ के तीन आसन्न फलकों का क्षेत्रफल क्रमशः A, B तथा C वर्ग इकाई है तथा उसका आयतन V घन इकाई है। सिद्ध कीजिए कि $V^2 = ABC$ है।

9. सिरों पर खुले एक खोखले बेलनाकार पाइप का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि उसकी ऊँचाई 10 सेमी बाहरी व्यास 10 सेमी तथा मोटाई 12 सेमी है। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।).

10. उस शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 12936 सेमी^{3} है तथा आधार की त्रिज्या 21 सेमी है। इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

11. त्रिज्या 5.6 मी तथा गहराई 20 मी का एक कुंआ विमाओं 150 मी $\times$ 70 मी वाले एक आयताकार खेत में खोदा जाता है तथा इससे निकली मिट्टी को खेत के शेष भाग में एकसमान रूप से फैला दिया जाता है। खेत कितना ऊँचा उठ जाएगा?

12. आयतन 606.375 मी^{3} वाले एक गोले की त्रिज्या और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13. 12 मी लंबी, 4 मी चौड़ाई और 3 मी ऊँचाई वाले एक कमरे में विमाओं 2 मी $\times$ 1 मी वाली दो खिड़कियां हैं और विमाओं 2.5 मी $\times$ 2 मीवाला एक दरवाजा है। इसकी दीवारों पर ₹ 30 प्रति सेमी^{2} की दर से कागज लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

14. एक घन सेन्टीमीटर सोने का व्यास 0.2 मिमी वाले एक तार के रूप में खींचा जाता है। तार की लंबाई ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए).

15. यदि किसी गोले की त्रिज्या तिगुनी कर दी जाए, तो निम्न अनुपात ज्ञात कीजिए:

    (i) प्रारंभिक गोले का आयतन और नए गोले का आयतन

    (ii) प्रारंभिक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल और नए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

16. एक शंकु, बेलन ओर अर्द्धगोला एक ही आधार और एक ही ऊँचाई के हैं। इनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

17. किसी लंब वृत्तीय शंकु की तिर्यक ऊँचाई और त्रिज्या क्रमशः 25 सेमी और 7 सेमी हैं। ज्ञात कीजिए कि

    (i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

    (ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल, तथा

    (iii) आयतन

18. भुजा 5 सेमी वाले चार घनों को सिरे से सिरा मिलाकर एक पंक्ति में रख लिया जाता है। परिणामी घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।

19. दो बेलनों की त्रिज्याएं 3 : 2 के अनुपात में हैं तथा उनकी ऊँचाइयाँ 7 : 4 के अनुपात में हैं। उनके

    (i) आयतनों का अनुपात तथा

    (ii) वक्र पृष्ठीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

20. बताइए कि निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य:

    (i) भुजा a वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2$ होता है।

    (ii) एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल πrl होता है, जहाँ r और l क्रमशः शंकु की आधार त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई है।

    (iii) यदि एक शंकु और अर्द्धगोले की आधार त्रिज्या और ऊँचाई एक ही हों, तो अर्द्धगोले का आयतन शंकु के आयतन का तिगुना होता है।

(iv) लंबाई l, चौड़ाई b तथा ऊँचाई h वाले एक कमरे में रखी जा सकते वाली सबसे लंबी छड़ की लंबाई $\sqrt{l^2+b^2+h^2}$ होती है।

(v) त्रिज्या r वाले एक अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $2\pi r^2$ होता है।

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

21.1

1. 81 मी^{2}; 45 मी^{3} 2. 77.76 सेमी^{2}; 46.656 सेमी^{3}

3. 15 सेमी, 1350 सेमी^{2} 4. 30000 सेमी^{3}

5. 384 6. 15 m, 117 m^2

7. 896 सेमी^{2}, 1536 सेमी^{3} 8. ₹ 460.80

9. $\sqrt{61}$ मी

21.2

1. 44 मी^{2}; $201\frac{1}{7}$ मी^{2}; 110 मी^{3} 2. 880 सेमी^{2}

3. 80850 लीटर 4. 1386 सेमी^{3}

5. 4 सेमी 6. 401.92 सेमी^{2}

21.3

1. $\frac{1430}{7}$ सेमी^{2}; $\frac{1980}{7}$ सेमी^{2}; $\frac{2200}{7}$ सेमी^{3}

2. 1848 सेमी^{3} 3. 2 सेमी 4. 141.3 मी

5. 2310 सेमी^{2}

21.4

1. 2464 सेमी^{2}; $11498\frac{2}{3}$ सेमी^{3} 2. 21 सेमी, 5544 सेमी^{2}

3. (i) 9928 सेमी^{2} (ii) 14892 सेमी^{2} (iii) $92661\frac{1}{3}$ सेमी^{3}

4. 64

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (i) $2(lb + bh + hl)$ (ii) $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ (iii) a^3

(iv) $2\pi rh + \pi r^2$ (v) $\pi r^2 h$

(vi) πrl, त्रिज्या, तिर्यक ऊँचाई (vii) $4\pi r^2$ (vii) $\frac{2}{3}\pi r^3$

2. (i) (D) (ii) (D) (iii) (D)

3. 64 सेमी^{3} 4. 31.5 मी^{2}; 11.25 मी^{3} 5. 11.76 सेमी^{2}; 3.136 सेमी^{3}

6. $10\sqrt{2}$ सेमी 7. $8\sqrt{3}$ सेमी 8. [**संकेत**: $A = l \times h$; $B = b \times h$; and $C = h \times l$]

9. 621.72 सेमी^{2} 10. 35 सेमी, 3696 सेमी^{2} 11. 18.95 सेमी

12. 21 मी, 5544 मी^{2} 13. ₹ 2610 14. 31.84 मी

15. (i) 1 : 27 (ii) 1 : 9

16. 1: 3: 2

17. (i) 550 सेमी^{2} (ii) 704 सेमी^{2} (iii) 1232 सेमी^{3}

18. 350 सेमी^{2}; 375 सेमी^{3} 19. (i) 63 : 16 (ii) 21 : 8

20. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य

(iv) सत्य (v) असत्य

माध्यमिक पाठ्यक्रम
गणित

अभ्यास कार्य–क्षेत्रमिति

अधिकतम अंक: 25 **समय : 45 मिनट**

अनुदेश

1. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पुस्तिका के अलग–अलग पृष्ठ पर दीजिए।
2. निम्न सूचना अपनी उत्तर पुस्तिका में दीजिए।

   नाम

   नामांकन संख्या

   विषय

   अभ्यास कार्य का प्रकरण (Topic)

   पता

3. आप अपने अभ्यास कार्य की जांच अध्ययन केन्द्र पर अपने विषय अध्यापक से कराईए जिससे आपके कार्य का उचित परिष्करण मिल सके।

अपना अभ्यास कार्य राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान को मत भेजिए।

1. $\sqrt{3}$ सेमी^{2} क्षेत्रफल वाले समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की माप है 1

   (A) 8 सेमी

   (B) 4 सेमी

   (C) 2 सेमी

   (D) 16 सेमी

2. एक त्रिभुज की भुजाएँ 3 : 5 : 7 के अनुपात में हैं। यदि त्रिभुज का परिमाप 60 सेमी हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है 1

   (A) $60\sqrt{3}$ सेमी^{2}

(B) $30\sqrt{3}$ सेमी^{3}

(C) $15\sqrt{3}$ सेमी^{2}

(D) $120\sqrt{3}$ सेमी^{2}

3. एक समचतुर्भज का क्षेत्रफल 96 वर्ग सेमी है। यदि इसका एक विकर्ण 16 सेमी हो, तो इसकी भुजा की लम्बाई होगी 1

(A) 5 सेमी

(B) 6 सेमी

(C) 8 सेमी

(D) 10 सेमी

4. एक घनाभ के संगत फलकों के क्षेत्रफल a, b, c हैं। इस का आयतन है 1

(A) $\sqrt[3]{abc}$

(B) $\sqrt{abc}$

(C) abc

(D) $a^3b^3c^3$

5. एक अर्ध गोलाकार कटोरे की त्रिज्या 3.5 मी है। इस का पृष्ठीय क्षेत्रफल है 1

(A) 38.5 मी^{2}

(B) 77 मी^{2}

(C) 115.5 मी^{2}

(D) 154 मी^{2}

6. एक समलंब की समांतर भुजाएँ 20 मी और 16 मी हैं और इन भुजाओं के बीच की दूरी 11 मी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2

7. एक वृत्ताकार पार्क की त्रिज्या 9 मी है। इसके बाहर चारों ओर 3 मी चौड़ा एक रास्ता बना है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2

8. दो लंब वृत्तीय बेलनों की त्रिज्याएँ 4 : 5 कें अनुपात में तथा उनकी ऊँचाइयाँ 5 : 3 के अनुपात में हैं। उनके आयतनों में अनुपात ज्ञात कीजिए। 2

9. 9 मी ऊँचे एक लकड़ी के ठोस शंकु के आधार की परिधि 44 मी है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए। 2

10. 41 सेमी व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए। 2

11. एक लंब वृत्तीय शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई 5 : 12 के अनुपात में है। यदि इसका आयतन 314 मी^{3} है, तो इसकी तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए) 4

12. एक मैदान 200 मी लम्बा ओर 75 मी चौड़ा है। इसमें 40 मी लम्बा, 20 मी चौड़ा और 10 मी गहरा तालाब खोदा गया और निकाली गई मिट्टी को मैदान में फैला दिया गया। मैदान के तल में कितनी वृद्धि हुई? 6