211hi07

7

समांतर श्रेढ़ी

आपने अपने दैनिक जीवन में अवश्य ही देखा होगा कि प्रकृति में कई वस्तुएँ, जैसे– कि फूलों की पंखुड़ियाँ, मधुमक्खी के छत्ते के छेद, अनानास फल पर सर्पिल डिजाइंस इत्यादि एक पैटर्न का अनुसरण करती हैं। इस पाठ में, आप एक विशेष प्रकार के संख्या पैटर्न जो समान्तर श्रेढ़ी कहलाता है, का अध्ययन करेंगे। आप समांतर श्रेढ़ी का व्यापक पद तथा इसके पहले n पदों का योगफल ज्ञात करना सीखेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि:

- संख्याओं के समूह में से समांतर श्रेढ़ी की पहचान कर सकें;
- किसी समांतर श्रेढ़ी का व्यापक पद ज्ञात कर सकें;
- किसी समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योग ज्ञात कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- संख्या निकाय का ज्ञान
- निकाय की संख्याओं पर संक्रियाएँ

7.1 कुछ संख्या पैटर्न

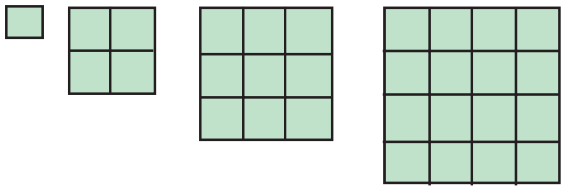
आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें:

(i) रीता एक बैंक में ₹ 1000, 10% साधारण ब्याज पर जमा कराती है। प्रथम, दूसरे, तीसरे और चौथे वर्ष के अन्त में क्रमश: मिश्रधन होगा:

₹ 1100, ₹ 1200, ₹ 1300, ₹ 1400

क्या आप किसी पैटर्न को देखते हैं? आप देख सकते हैं कि मिश्रधन में प्रत्येक वर्ष, एक निश्चित राशि (₹ 100) की वृद्धि होती है।

(ii) भुजाओं 1, 2, 3, 4, ... इकाई के वर्गों में, इकाई वर्गों की संख्या क्रमशः 1, 4, 9, 16, ... है।



क्या आप इन संख्याओं की सूची में कोई पैटर्न देखते हैं? आप देख सकते हैं कि

$1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2, ...$

अर्थात्, यह प्राकृत संख्याओं के वर्ग हैं।

अब संख्याओं के कुछ और समूह लेकर, यदि सम्भव हो, तो पैटर्न की पहचान करें।

1, 3, 5, 7, 9	(1)
2, 4, 6, 8, 10 ...	(2)
1, 4, 7, 10, 13	(3)
5, 3, 1, –1, –3...	(4)
1, 3, 9, 27, 81, ...	(5)
2, 3, 5, 7, 11, 13...	(6)

आप देख सकते हैं कि सूची (1) में संख्याएं विषम प्राकृत संख्याएँ हैं। पहली संख्या 1 है तथा दूसरी संख्या 3 तथा तीसरी संख्या 5 है इत्यादि। यह सभी संख्याएँ एक पैटर्न का अनुसरण करती हैं। इसमें पैटर्न यह है कि पहली संख्या के बाद प्रत्येक संख्या, अपने से पहले की संख्या में 2 जोड़ने पर प्राप्त होती है।

सूचियों (2), (3) तथा (4) में, प्रथम संख्या के बाद प्रत्येक संख्या, अपने से पहली संख्या में क्रमशः 2, 3, और –2 जोड़ने पर प्राप्त होती है।

सूची (5) में, प्रथम संख्या को छोड़कर प्रत्येक संख्या अपने से पहले की संख्या को 3 से गुणा करने पर प्राप्त होती है। सूची (6) में, आप देखते हैं कि यह अभाज्य संख्याएँ हैं तथा कोई ऐसा नियम नहीं है कि जिससे अगली अभाज्य संख्या ज्ञात की जा सके।

एक सूची में संख्या को सामान्यतः

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

या $t_1, t_2, t_3, ..., t_n, ...$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है जो कि क्रमशः पहला, दूसरा, तीसरा, ... तथा nवाँ पद कहलाते हैं। कभी कभी हम इन सूचियों को **अनुक्रम** या संख्या पैटर्न कहते हैं।

7.2 समांतर श्रेढ़ी

आपने भिन्न भिन्न पैटर्न देखें हैं। कुछ पैटर्न एक निश्चित गणितीय नियम का प्रयोग करके पैटर्न का अगला पद ज्ञात करते हैं। अब आप एक ऐसे संख्या पैटर्न का अध्ययन करेंगे। निम्न पैटर्न का स्मरण कीजिए:

1, 3, 5, 7, 9, ... (1)

2, 4, 6, 8, 10, ... (2)

1, 4, 7, 10, 13,... (3)

आपने देखा है कि पैटर्न (1) और (2) में, पहले पद को छोड़कर प्रत्येक पद, अपने से पहले पद में 2 जोड़ने पर प्राप्त होता है। (3) में, इसी प्रकार पहले पद को छोड़कर, प्रत्येक पद अपने से पहले पद में 3 जोड़ने पर प्राप्त होता है। संख्या पैटर्न में संख्याएँ इसके पद कहलाते हैं। जैसा कि पहले लिखा जा चुका है इन्हें प्रायः

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

या $t_1, t_2, t_3, ..., t_n, ...$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

अनुलग्न (suffix) पैटर्न में पद की स्थिति को दर्शाता है। अतः a_n या t_n पैटर्न के 'n'वें पद को दर्शाते हैं।

एक विशेष प्रकार का पैटर्न, जिसमें पहले पद को छोड़कर, प्रत्येक पद, पूर्व पद में एक निश्चित राशि (धनात्मक या ऋणात्मक) जोड़ने से प्राप्त होता है, **समांतर श्रेढ़ी** (Arithmetic progression या AP) कहलाता है। प्रथम पद को प्रायः 'a' द्वारा तथा सार्वअन्तर को d द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। अतः, समांतर श्रेढ़ी का मानक रूप है

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$

उदाहरण 7.1: निम्नलिखित संख्याओं की सूचियों में कौन कौन सी समांतर श्रेढ़ी हैं। समांतर श्रेढ़ी की अवस्था में, उनके प्रथम पद तथा सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए:

(i) 2, 7, 12, 17, 22, ...

(ii) 4, 0, –4, –8, –12 ...

(iii) 3, 7, 12, 18, 25 ...

(iv) 2, 6, 18, 54, 162 ...

हल:

(i) यह समांतर श्रेढ़ी है

क्योंकि $7 - 2 = 5$, $12 - 7 = 5$, $17 - 12 = 5$ तथा $22 - 17 = 5$

अतः प्रत्येक पद, पूर्व पद में 5 जोड़ने पर प्राप्त होता है। अतः पहला पद $a = 2$ तथा सार्वअन्तर $d = 5$.

(ii) हम देखते हैं कि

$0 - 4 = -4$, $-4 - 0 = -4$, $-8 - (-4) = -4$, $-12 - (-8) = -4$

अतः यह समांतर श्रेढ़ी है जिसका पहला पद $= 4$

तथा सार्वअन्तर $d = -4$.

(iii) आप देख सकते हैं कि सूची 3, 7, 12, 18, 25, ... में

$7 - 3 = 4$, $12 - 7 = 5$, $18 - 12 = 6$, $25 - 18 = 7$

अतः दो क्रमागत पदों का अन्तर एक समान नहीं है। अतः यह एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

(iv) संख्या सूची 2, 6, 18, 54, 162, ... में

$6 - 2 = 4$, $18 - 6 = 12$

दो क्रमागत पदों का अन्तर समान नहीं है। अतः यह एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

देखें आपने कितना सीखा 7.1

निम्नलिखित में कौन–कौन सी समांतर श्रेढ़ी हैं? यदि वह समांतर श्रेढ़ी हैं, तो उनके प्रथम पद तथा सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए:

1. $-5, -1, 3, 7, 11, ...$
2. $6, 7, 8, 9, 10, ...$
3. $1, 4, 6, 7, 6, 4, ...$
4. $-6, -3, 0, 3, 6, 9, ...$

7.3 समांतर श्रेढ़ी का व्यापक (nवाँ) पद

आइए प्रथम पद 'a' तथा सार्वअन्तर 'd' के एक समांतर श्रेढ़ी पर विचार करें। माना इसके पद $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$, जबकि t_n इस समांतर श्रेणी के nth पद को दर्शाता है।

क्योंकि पहला पद a है।

अतः दूसरा पद इसमें 'd' जोड़कर प्राप्त होता है।

$$t_2 = a + d.$$

इसी प्रकार $t_3 = (a + d) + d = a + 2d$ इत्यादि।

इस प्रकार

प्रथम पद,	$t_1 = a$	$= a + (1 - 1)\, d$
दूसरा पद,	$t_2 = a + d$	$= a + (2 - 1)\, d$
तीसरा पद,	$t_3 = a + 2d$	$= a + (3 - 1)\, d$
चौथा पद,	$t_4 = a + 3d$	$= a + (4 - 1)\, d$

क्या आप कोई पैटर्न देखते हैं? हम देखते हैं कि प्रत्येक पद $a +$ (पद संख्या $- 1$) d है। 10वाँ पद क्या होगा?

$$t_{10} = a + (10 - 1)d = a + 9d$$

क्या अब बता सकते हैं कि इसका nवाँ पद या व्यापक पद क्या होगा?

स्पष्टतः $t_n = a + (n - 1)\, d$

उदाहरण 7.2: समांतर श्रेढ़ी

$16, 11, 6, 1, -4, -9, \ldots$

का 15 वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ पर $a = 16$ और $d = 11 - 16 = -5$

अब, $t_{15} = a + (15 - 1)d = a + 14d$

$= 16 + 14(-5) = 16 - 70$

$= -54$

अतः 15वाँ पद अर्थात $t_{15} = -54$

अब $t_n = a + (n - 1)d$

$= 16 + (n - 1) \times (-5) = 16 - 5n + 5$

$= 21 - 5n$

अतः nवाँ पद अर्थात $t_n = = 21 - 5n$

उदाहरण 7.3: एक AP का प्रथम पद -3 तथा 12वाँ पद 41 है। सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

हल: माना AP का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है।

अतः, $t_{12} = a + (12 - 1)d = 41$

या $-3 + 11d = 41$ [चूंकि $a = -3$]

या $11d = 44$

या $d = 4$

अतः सार्वअन्तर $= 4$.

उदाहरण 7.4: एक AP का सार्वअन्तर 5 तथा 10वाँ पद 43 है। इसका प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$t_{10} = a + (10 - 1)\, d$

या $43 = a + 9 \times 5$ [चूंकि $d = 5$]

या $43 = a + 45$

या $a = -2$

अतः प्रथम पद $= -2$.

उदाहरण 7.5: एक AP का प्रथम पद -2 तथा 11 वाँ पद 18 है। इसका 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: 15वाँ पर ज्ञात करने के लिए, हमें d का मान ज्ञात करना है।

अब $t_{11} = a + (11 - 1)d$

$\therefore$ $18 = -2 + 10d$

या $10d = 20$

$\therefore$ $d = 2$

अब $t_{15} = a + 14d$

$= -2 + 14 \times 2 = 26$

अतः, $t_{15} = 26$.

उदाहरण 7.6: एक समांतर श्रेढ़ी के pवें पद का p गुना इसके qवें पद के q गुने के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसका $(p + q)$वाँ पद शून्य होगा यदि $p \neq q$ हो।

हल: हम जानते हैं

$t_p = a + (p - 1)d$

तथा $t_q = a + (q - 1)d$

यह दिया है कि $pt_p = qt_q$

$$p[a + (p - 1)d] = q[a + (q - 1)d]$$

या $\quad pa + p(p - 1)d - qa - q(q - 1)d = 0$

या $\quad (p - q)a + (p^2 - q^2)d - pd + qd = 0$

या $\quad (p - q)a + (p^2 - q^2)d - (p - q)d = 0$

या $\quad (p - q)a + (p - q)(p + q)d - (p - q)d = 0$

या $\quad (p - q)[a + (p + q)d - d] = 0$

या $\quad a + (p + q)d - d = 0 \quad [\text{as } p - q \neq 0]$

या $\quad a + (p + q - 1)d = 0$

चूंकि बायां पक्ष $(p + q)$वाँ पद है

$\therefore \quad t_{p+q} = 0$

देखें आपने कितना सीखा 7.2

1. एक AP का पहला पद 4 तथा सार्वअन्तर –3 है। इसका 12वाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. एक समांतर श्रेढ़ी का पहला पद 2 तथा 9वाँ पद 26 है। सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।
3. एक समांतर श्रेढ़ी का 12वाँ पद –28 तथा 18वाँ पद –46 है। इसका पहला पद तथा सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।
4. समांतर श्रेढ़ी 5, 2, –1, ... का कौन सा पद – 22 है?
5. यदि एक समांतर श्रेढ़ी का pवाँ, qवाँ तथा rवाँ पद क्रमशः x, y तथा z हों तो सिद्ध कीजिए कि

   $x(q - r) + y(r - p) + z(p - q) = 0$

7.4 एक समांतर श्रेढ़ी के पहले n पदों का योगफल

महान जर्मन गणितज्ञ कार्ल फ्रेडरिक गॉस जब अपने आरम्भिक स्कूल में थे जब उनके अध्यापक ने कक्षा से प्रथम 100 प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात करने के लिए कहा। जबकि कक्षा के शेष विद्यार्थी इस प्रश्न को हल करने में उलझे हुए थे, गॉस ने तुरन्त ही प्रश्न का उत्तर दे दिया। गॉस ने कैसे उत्तर ज्ञात किया? संभव है कि उसने निम्नविधि का प्रयोग किया हो:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 \qquad (1)$$

उल्टे क्रम में लिखते हुए,

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1 \qquad (2)$$

(1) और (2), को पदानुसार जोड़ते हुए

$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \text{ (100 बार)}$$

$$= 100 \times 101$$

$$\text{या } S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

हम समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 'n' पदों का योगफल निकालने में इसी विधि को प्रयोग में लाते हैं।

समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 'n' पद हैं

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 2)d, a + (n - 1)d$$

माना इन n पदों का योगफल S_n है।

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d] \qquad (3)$$

विपरीत क्रम में लिखने पर,

$$S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \ldots + (a + d) + a \qquad (4)$$

(3) और (4) को पदानुसार जोड़ते हुए

$$2S_n = [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \ldots + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] \text{, n बार}$$

या $\quad 2S_n = n[2a + (n - 1)d]$

या $\quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d],$

जो समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 'n' पदों का योगफल ज्ञात करने का सूत्र है।

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$S_n = \frac{n}{2}[a + \{a + (n - 1)d\}]$$

$$= \frac{n}{2}(a + t_n), \qquad [n\text{वाँ पर } t_n = a + (n - 1)d]$$

कभी–कभी nवें पद को 'l' द्वारा दर्शाते हैं। अतः

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l) \qquad (4)$$

उदाहरण 7.7: निम्न समांतर श्रेढ़ियों के प्रथम 12 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

(i) 11, 16, 21, 26 ....

(ii) – 151, – 148, – 145, – 142

हल: (i) दी गई समांतर श्रेढ़ी हैं:

11, 16, 21, 26 ....

यहाँ, $a = 11, d = 16 - 11 = 5$ और $n = 12$.

आप जानते हैं कि AP के प्रथम n पदों का योगफल निम्न सूत्र से प्राप्त होता है।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times 11 + (12-1)5]$$

$$= 6\,[22 + 55] = 6 \times 77 = 462$$

अत: अभीष्ट योगफल 462 है।

(ii) दी गई AP है:

– 151, – 148, – 145, – 142

यहाँ पर, $a = -151, d = -148 - (-151) = 3$ और $n = 12$.

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times (-151) + (12-1)3]$$

$$= 6[-302 + 33] = 6 \times (-269)$$

$$= -1614$$

अत:, अभीष्ट योगफल – 1614 है।

उदाहरण 7.8: समांतर श्रेढ़ी 2, 4, 6, 8, 10 .... के कितने पदों का योगफल 20 होगा?

हल: दी गई समांतर श्रेढ़ी के लिए

$a = 2, d = 2$ और $S_n = 210$.

हम जानते हैं $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

या $210 = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1)2]$

या $420 = n[2n + 2]$

या $420 = 2n^2 + 2n$

या $2n^2 + 2n - 420 = 0$

या $n^2 + n - 210 = 0$

या $n^2 + 15n - 14n - 210 = 0$

या $n(n + 15) - 14(n + 15) = 0$

या $(n + 15)\,(n - 14) = 0$

या $n = -15$ या $n = 14$

क्योंकि, n ऋणात्मक नहीं हो सकता, $n = 14$

अतः श्रेढ़ी के पहले 14 पदों का योगफल 210 होगा।

उदाहरण 7.9: निम्न योगफल ज्ञात कीजिए:

$2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59$

हल: यहाँ पर, 2, 5, 8, 11, ... समांतर श्रेढ़ी में हैं $a = 2, d = 3$ तथा $t_n = 59$.

योगफल के लिए हमें n का मान ज्ञात करना है।

अब, $t_n = a + (n-1)\,d$

$\therefore$ $59 = 2 + (n - 1)\,3$

या $59 = 3n - 1$

या $60 = 3n$

$\therefore$ $n = 20$

अब, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

या $S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 2 + (20 - 1)3]$

या $S_{20} = 10[4 + 57] = 610$

अतः अभीष्ट योगफल 610 है।

उदाहरण 7.10: 1 से 1000 के बीच 7 से विभाजित होने वाली सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ 7 से विभाजित होने वाली पहली प्राकृत संख्या 7 है। तथा ऐसी अन्तिम संख्या 994 है।

अतः पद, जिनका योगफल ज्ञात करना है, वह हैं

$7, 14, 21, ..., 994$

यहाँ पर $a = 7, d = 7, t_n = 994$

अब $t_n = a + (n - 1)d$

या $994 = 7 + (n - 1)7$

या $994 = 7n$

$\therefore$ $n = 142.$

अब, $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$= \frac{142}{2}[7 + 994] = 71 \times 1001$

$= 71071$

अतः अभीष्ट योगफल 71071 है।

उदाहरण 7.11: एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 3 पदों का योग 36 तथा उनका गुणनफल 1620 है। समांतर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

हल: समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद $a, a + d$ तथा $a + 2d$ ले सकते हैं। परन्तु इनको गुणा करना कठिन हो जाएगा तथा दो समीकरणों को हल करने में काफी समय लगेगा। इसलिए सुचारु विधि में तीन पद $a - d, a$ तथा $a + d$ लें जिससे इनका योग $3a$ हो जाएगा।

अतः माना AP के पहले तीन पद $a - d, a$ तथा $a + d$

$\therefore$ $a - d + a + a + d = 36$

या $3a = 36,$

$\therefore$ $a = 12$

अब गुणनफल 1620 है।

∴ $(a - d)\, a\, (a + d) = 1620$

या $(12 - d)\, 12\, (12 + d) = 1620$

या $12^2 - d^2 = 135$

या $144 - d^2 = 135$

या $d^2 = 9$

या $d = 3$ or -3

यदि $d = 3$, तो संख्याएं $12 - 3$, 12 तथा $12 + 3$ हैं।

या 9, 12, 15 हैं।

यदि $d = -3$, तो संख्याएं 15, 12 तथा 9

∴ AP के प्रथम तीन पद 9, 12, 15 या 15, 12, 9

देखें आपने कितना सीखा 7.3

1. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों के प्रथम 15 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:
   (i) 11, 6, 1, – 4, –9 ...
   (ii) 7, 12, 17, 22, 27 ...
2. समांतर श्रेढ़ी 25, 28, 31, 34 ... के कितने पदों की आवश्यकता होगी कि इसका योगफल 1070 हो जाए?
3. निम्न योगफल ज्ञात कीजिए:
   $1 + 4 + 7 + 10 + ... +118$
4. 100 तक की सभी उन प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 3 से पूरी विभाजित होती हों।
5. एक समांतर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पदों का योग 21 तथा गुणनफल 231 है। समांतर श्रेढ़ी के यह तीन पद ज्ञात कीजिए।
6. l, a, n, d तथा S_n में से वह ज्ञात कीजिए, जो निम्न में नहीं दिए गए हैं:
   (i) $a = -2, d = 5, S_n = 568.$
   (ii) $l = 8, n = 8, S_8 = -20$
   (iii) $a = -3030, l = -1530, n = 5$
   (iv) $d = \frac{2}{3}, l = 10, n = 20$

आइए दोहराएँ

- एक अनुक्रम, जिसमें प्रथम पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद, पूर्व पद में अचर राशि जोड़ने अथवा घटाने पर प्राप्त होता है, समांतर श्रेढ़ी कहलाता है।
- समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 'a' तथा सार्वअन्तर 'd' द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।
- समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद, $t_n = a + (n - 1)d$ द्वारा प्रदत्त है।
- समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ द्वारा प्रदत्त है।
- यदि एक समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा अन्तिम पद l तथा पदों की संख्या n हो, तो इसका योगफल by $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ होता है।

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में कौन–कौन से पैटर्न समांतर श्रेढ़ी हैं?

   (i) 2, 5, 8, 12, 15, ...

   (ii) – 3, 0, 3, 6, 9 .....

   (iii) 1, 2, 4, 8, 16, ...

2. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ी में प्रत्येक का nवाँ पद लिखिए:

   (i) 5, 9, 13, 17, ...

   (ii) – 7, – 11, – 15, – 19

3. एक समांतर श्रेढ़ी का चौथा पद, उसके पहले पद का 3 गुना है तथा 7वाँ पद, तीसरे पद के दो गुने से 1 अधिक है। पहला पद तथा सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

4. एक समांतर श्रेढ़ी का 5वाँ पद 23 और 12वाँ पद 37 है। पहला पद और सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

5. एक त्रिभुज के कोण समांतर श्रेढ़ी में हैं। यदि सबसे छोटा कोण, सबसे बड़े कोण का एक तिहाई हो, तो त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए।

6. (i) समांतर श्रेढ़ी 100, 95, 90, 85, ..., का कौन सा पद –25 होगा?

   (ii) समांतर श्रेढ़ी $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}$ का कौन सा पद $\frac{25}{4}$ होगा?

7. एक समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद $t_n = a + bn$ है। दर्शाइए कि यह समांतर श्रेढ़ी है। इसका पहला पद तथा सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

8. यदि एक समांतर श्रेढ़ी के 7 वें पद का 7गुना इसके 11वें पद के 11 गुने के बराबर हो, तो दर्शाइए कि इसका 18वाँ पद शून्य होगा।

9. एक समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है। यदि इसके प्रत्येक पद को दुगुना कर दिया जाए तो क्या यह नया पैटर्न समांतर श्रेढ़ी है? यदि हाँ, तो इसका प्रथम पद तथा सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

10. यदि $k + 2, 4k - 6$ तथा $3k - 2$ एक समांतर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद हैं, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

11. (i) समांतर श्रेढ़ी 1, 4, 7, 10, ... के कितने पदों का योगफल 715 होगा?

    (ii) समांतर श्रेढ़ी –10, –7, –4, –1, ... के कितने पदों का योगफल 104 होगा?

12. प्रथम 100 विषम प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

13. एक समांतर श्रेढ़ी में, $a = 2$ तथा पहले 5 पदों का योगफल अगले पांच पदों के योगफल का एक चौथाई है। दर्शाइए कि 20वाँ पद –12 है।

    [**संकेत:** यदि AP $a, a + d, a + 2d, \ldots$, समांतर श्रेढ़ी में हों तो $S_5 = \frac{5}{2}[a + (a + 4d)]$

    अगले 5 पदों में, पहला पद $a + 5d$ है तथा अन्तिम पद $a + 9d$ है।

14. यदि एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल $2n + 3n^2$ हो तो समांतर श्रेढ़ी का rवाँ पद ज्ञात कीजिए।[संकेत $t_r = S_r - S_{r-1}$]

15. ऐसे सभी 3 अंकों की संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जिन्हें 4 पर भाग देने से 1 शेष बचता हो।

    [**संकेत:** पहला पद= 101, अन्तिम पद = 997]

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

7.1

1. $a = -5, d = 4$
2. $a = 6, d = 1$
3. समांतर श्रेढ़ी में नहीं हैं
4. $a = -6, d = 3$

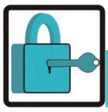
7.2

1. -29 2. 3 3. 5, -3 4. 10 वाँ पद

7.3

1. (i) -360 (ii) 630
2. 20
3. 2380
4. 1689
5. 3, 7, 11 अथवा 11, 7, 3
6. (i) $n = 16, l = 73$ (ii) $a = -3, d = 3$

   (iii) $d = 375, S_n = -11400$ (iv) $a = -\frac{3}{8}, S_n = \frac{220}{3}$



आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (ii)
2. (i) $t_n = 4n + 1$ (ii) $t_n = -4n - 3$
3. 3, 2
4. 15, 2
5. $30^o, 60^o, 90^o$
6. (i) 26 वाँ पद (ii) 25 वाँ पद
7. a + b, b

9. हाँ, प्रथम पद = 2a, सार्वअन्तर = 2d

10. 3 11. (i) 22 पद (ii) 13 पद

12. 10,000 14. 6r – 1 15. 123525

माध्यमिक पाठ्यक्रम
गणित

अभ्यास कार्य–बीजगणित

अधिकतम अंक: 25 **समय : 45 मिनट**

अनुदेश

1. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पुस्तिका के अलग–अलग पृष्ठ पर दीजिए।
2. निम्न सूचना अपनी उत्तर पुस्तिका में दीजिए।

   नाम

   नामांकन संख्या

   विषय

   अभ्यास कार्य का प्रकरण (Topic)

   पता
3. आप अपने अभ्यास कार्य की जांच अध्ययन केन्द्र पर अपने विषय अध्यापक से कराइए जिससे आपके कार्य का उचित परिष्करण मिल सके।

अपना अभ्यास कार्य राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान को नहीं भेजें।

1. यदि $(x - a)$, $x^6 - ax^5 + x^4 - ax^3 + 3x - a + 2$ का एक गुणनखंड है, तो a का मान है: 1

   (A) $a = 1$

   (B) $a = -1$

   (C) $a = 2$

   (D) $a = -2$

2. $\dfrac{1}{(-3/5)^{-2}}$ का व्युत्क्रम है 1

   (A) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2$

(B) $\left(\frac{-5}{3}\right)^2$

(C) $(-5/3)^{-2}$

(D) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

3. तीन संख्याएँ, जो एक A.P. में हैं का योग 15 है तथा उनका गुणनफल 45 है। तब, ये तीन संख्याएँ हैं: 1

(A) 1, 3, 15

(B) 2, 4, 9

(C) 1, 5, 9

(D) 0, 5, 9

4. यदि $y=\frac{x-1}{x+1}$ है, तो $2y-\frac{1}{2y}$ बराबर है: 1

(A) $\frac{3x^2-10x-3}{2(x^2-1)}$

(B) $\frac{3x^2-10x+1}{x^2-1}$

(C) $\frac{3x^2+10x+3}{2(x^2-1)}$

(D) $\frac{3x^2-10x+3}{2(x^2-1)}$

5. व्यंजक $\frac{4x^2-25}{2x^2+11x+15}$ का न्यूनतम रूप है: 1

(A) $\frac{2x-5}{x+3}$

(B) $\frac{2x+5}{x+3}$

(C) $\dfrac{2x+5}{x-3}$

(D) $\dfrac{2x+5}{x-3}$

6. x का मान ज्ञात कीजिए, जिससे $\left(\dfrac{7}{8}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{8}{7}\right)^{-11} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{x}$ हो। 2

7. $\sqrt{3}$ और $\sqrt{8}$ के बीच में तीन अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए। 2

8. दो बहुपदों का म.स. $(x-2)$ है तथा उनका ल.स. $x^4 + 2x^3 - 8x - 16$ है। यदि इनमें से एक बहुपद $x^3 - 8$ है, तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए। 2

9. किसी संख्या और उसके व्युत्क्रम का योग $\dfrac{50}{7}$ है। वह संख्या ज्ञात कीजिए। 2

10. किसी आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई के दुगुने से 5 सेमी कम है। यदि इसका परिमाप 110 सेमी है, तो आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2

11. दर्शाइए कि प्रथम पद a, द्वितीय पद b और अंतिम पद c वाली A.P. के सभी पदों का योग $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ होता है। 4

12. यदि अजय ने अपने 30 अंकों के टेस्ट में 10 अंक अधिक प्राप्त किए होते, तो इन अंकों का नौ गुना उसके द्वारा प्राप्त किए गए वास्तविक अंकों का वर्ग होता। उसने टेस्ट में कितने अंक प्राप्त किए थे? 6