

2

घातांक तथा करणी

- **घातांकीय संकेतन:** किसी संख्या को स्वयं से कई बार गुणा करने का संकेतन उदाहरण के लिए $a \times a \times a \times a = a^4$
- **आधार और घातांक:** $a^n = a \times a \times a \dots n$ बार, a आधार है, n घातांक (घात) है।
- **किसी घातांक को पढ़ना:** $5 \times 5 \times 5 \times \dots 20$ बार $= 5^{20}$ को 5 की घात 20 या 5 की 20वीं घात पढ़ते हैं।
- **अभाज्य गुणनखण्डन:** 1 के अतिरिक्त किसी प्राकृत संख्या को अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।

घातांकों के नियम : $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $a \neq 0$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \text{ (यदि } m > n \text{),}$$

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ (यदि } m < n \text{)}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, a \neq 0$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m, a \neq 0, b \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, a \neq 0, b \neq 0$$

- **ऋणात्मक पूर्णांक घातांक के रूप में :** यदि a एक शून्येत्तर परिमेय संख्या है तथा m एक पूर्णांक है, तो a^m का व्युत्क्रम a^{-m} या $\frac{1}{a^m}$ होता है। इसे a की घात $(-m)$ या $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ पढ़ते हैं।
- **करणी:** $\sqrt[n]{x}$ एक करणी होगी यदि और केवल यदि यह एक अपरिमेय संख्या है तथा यह एक धनात्मक परिमेय संख्या का मूल है। $\sqrt{\quad}$ को करणी

चिह्न कहा जाता है। घात n को करणी की घात तथा x को करणीगत कहते हैं।

- **शुद्ध और मिश्रित करणियां:** ऐसी करणी जिसका एक परिमेय गुणनखण्ड केवल 1 है तथा दूसरा गुणनखण्ड एक अपरिमेय संख्या है, शुद्ध करणी कहलाती है उदाहरण के लिए $\sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{50}$.
ऐसी करणी, जिसका परिमेय गुणनखण्ड 1 के अतिरिक्त अन्य परिमेय संख्या है जबकि अन्य गुणनखण्ड अपरिमेय संख्या है मिश्रित करणी कहलाती है उदाहरण के लिए $5\sqrt[3]{3}, 4\sqrt[3]{7}$

करणियों के नियम: यदि x, y धनात्मक परिमेय संख्या हैं तथा m, n और p धनात्मक पूर्णांक हैं,

$$\text{तो } (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} \text{ अथवा } x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \text{ अथवा } \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \text{ अथवा}$$

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \text{ अथवा } (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{x^p} = \sqrt[mn]{x^{mp}} \text{ अथवा } x^{\frac{pm}{mn}} = (x^{pm})^{\frac{1}{mn}}$$

- **सजातीय करणियां:** दो करणियां सजातीय कहलाती हैं यदि उनके अपरिमेय गुणनखण्ड समान हैं। उदाहरण के लिए $3\sqrt{5}$ तथा $7\sqrt{5}$ सजातीय करणियां हैं।

● **करणी का सरलतम या न्यूनतम रूप:** एक करणी अपने सरलतम रूप में होती है, यदि करणी चिह्न की घात न्यूनतम हो, करणी चिह्न के अंतर्गत कोई भिन्न न हो, n घात के करणी चिह्न में a^n रूप का कोई गुणनखण्ड न हो, जहाँ a धन पूर्णांक है।

● **करणियों के नियम:**

(i) सजातीय करणियों को जोड़ तथा घटा सकते हैं।

(ii) एक करणी की घात को बदलने के लिए हम करणी की घात को तथा करणीगत की घात को एक ही धनात्मक पूर्णांक से गुणा कर

देते हैं। समान घात की करणियों को गुणा और भाग कर सकते हैं।

● **करणियों की तुलना:** दी गई करणियों को समान घात की करणियों में बदलते हैं, फिर उनके करणीगतों की उनके गुणांकों सहित तुलना करते हैं।

● **करणी का परिमेयकारी गुणक:** यदि दो करणियों का गुणनफल परिमेय है, प्रत्येक करणी को दूसरी करणी का परिमेयकारी गुणक कहते हैं। $x + \sqrt{y}$ का परिमेयकारी गुणक $x - \sqrt{y}$ है तथा विलोमतः

देखें आपने कितना सीखा :

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5$ बराबर है:

(A) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{15}$

(B) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-15}$

(C) $\left(-\frac{2}{3}\right)^8$

(D) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

2. करणी $3\sqrt[3]{47}$ की घात है:

(A) 5

(B) 3

(C) 47

(D) $\frac{1}{5}$

3. $\sqrt[3]{25}$ का परिमेयकारी गुणक है:

(A) 5

(B) $\sqrt{5}$

(C) $\sqrt[3]{5}$

(D) $\sqrt[3]{25}$

4. $\sqrt{8}$ है, एक:

(A) शुद्ध करणी

(B) मिश्रित करणी

(C) करणी नहीं

(D) परिमेय संख्या

5. $\left(-\frac{3}{4}\right)^0$ बराबर है:

(A) -1

(B) 1

(C) $\frac{-3}{4}$

(D) $\frac{-4}{3}$

6. निम्नलिखित में से प्रत्येक को अभाज्य संख्याओं के घातांकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 194400

(ii) 864360

6 :: शिक्षार्थी मार्गदर्शिका

7. निम्नलिखित मिश्रित करणियों को न्यूनतम रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\sqrt[4]{1215}$ (ii) $\sqrt[3]{1024}$

8. निम्नलिखित को शुद्ध करणी में व्यक्त कीजिए:

(i) $5\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt[3]{5}$ (iii) $2\sqrt[5]{2}$

9. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

(i) $3\sqrt{80} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} + 3\sqrt{120}$ (ii) $2\sqrt{50} \times \sqrt{32} \times 2\sqrt{72}$ (iii) $\frac{15\sqrt[3]{13}}{6\sqrt[6]{5}}$

10. (i) $\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}$ तथा $\sqrt[5]{5}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

(ii) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{4}$ को अवरोही क्रम में लिखिए।

11. निम्नलिखित के हर का परिमेयकरण करके सरल कीजिए:

(i) $\frac{28}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ (ii) $\frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{7} + 2}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

स्वयं विस्तारण:

1. यदि $\left(\frac{5}{7}\right)^{5+x} \div \left(\frac{25}{49}\right)^x = \left(\frac{7}{5}\right)^2$ तो, x का

मान ज्ञात कीजिए:

2. सरल कीजिए: $\left(\frac{-5}{6}\right)^2 \div \left(\frac{-3}{5}\right)^2$ ।

3. यदि $x = 7 + 4\sqrt{3}$, तो $x + \frac{1}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\frac{5 + 2\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$, तो a तथा b के

मान ज्ञात कीजिए।

8. (i) $\sqrt{50}$ (ii) $\sqrt[3]{320}$

(iii) $\sqrt[3]{64}$

9. (i) $\frac{88}{5}\sqrt{5}$ (ii) $960\sqrt{2}$

(iii) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{845}$

10. (i) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{5}, \sqrt{3}$

(ii) $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{2}$

11. (i) $7(\sqrt{7} - \sqrt{3})$ (ii) $\frac{11 - 4\sqrt{7}}{3}$

(iii) $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{12}$

उत्तर

देखें आपने कितना सीखा :

1. C 2. A 3. C

4. B 5. B

6. (i) $2^5 3^5 5^2$ (ii) $2^5 3^2 5^1 7^4$

7. (i) $3\sqrt[4]{15}$ (ii) $8\sqrt[3]{2}$

स्वयं विस्तारण:

1. $x = 7$

3. 14

2. $\frac{625}{324}$

4. $a = 11, b = -6$