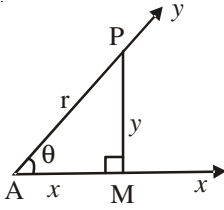


त्रिकोणमिति का परिचय

- **त्रिकोणमिति:** गणित की वह शाखा जो त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों के मापन और कोणों से सम्बन्धित समस्याओं से, सम्बन्ध रखती है।



- **त्रिकोणमितीय अनुपात:** त्रिभुज के न्यून कोणों के सापेक्ष उसकी भुजाओं के अनुपात, त्रिकोणमितीय अनुपात कहलाते हैं।

समकोण ΔAMP में, न्यून कोण $PAM = \theta$ के लिए आधार = $AM = x$, लम्ब = $PM = y$, कर्ण = $AP = r$

यहां, $\sin \theta = \frac{y}{r}$, जिसे $\sin \theta$ लिखा जाता है।

$\cos \theta = \frac{x}{r}$, जिसे $\cos \theta$ लिखा जाता है।

$\tan \theta = \frac{y}{x}$, जिसे $\tan \theta$ लिखा जाता है।

$\text{cosec} \theta = \frac{r}{y}$, जिसे $\text{cosec} \theta$ लिखा जाता है।

$\text{sec} \theta = \frac{r}{x}$, जिसे $\text{sec} \theta$ लिखा जाता है।

$\text{cot} \theta = \frac{x}{y}$, जिसे $\text{cot} \theta$ लिखा जाता है।

$\Rightarrow \sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ इत्यादि सम्पूर्ण प्रतीक हैं और इन्हें θ से अलग नहीं किया जा सकता।

\Rightarrow प्रत्येक त्रिकोणमिति अनुपात एक वास्तविक संख्या है।

$\Rightarrow \theta$ का न्यूनकोण होना अनिवार्य है।

\Rightarrow सुविधा के लिए, हम $(\sin \theta)^2, (\cos \theta)^2, (\tan \theta)^2$ को क्रमशः $\sin^2 \theta, \cos^2 \theta$ एवं $\tan^2 \theta$ लिखते हैं।

- **त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर सम्बन्ध:**

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\text{cosec} \theta} \text{ अथवा } \text{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\text{अथवा } \sin \theta \times \text{cosec} \theta = 1$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\text{sec} \theta} \text{ अथवा } \text{sec} \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ अथवा}$$

$$\cos \theta \times \text{sec} \theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\text{cot} \theta} \text{ अथवा } \text{cot} \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ अथवा}$$

$$\tan \theta \times \text{cot} \theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \text{cot} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

- **त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएं:** कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के समीकरण को त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहा जाता है, यदि यह समीकरण θ के उन सभी मानों के लिए संतुष्ट होता है जिनके लिए त्रिकोणमितीय अनुपात परिभाषित हैं।

- **कुछ विशिष्ट त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएं:**

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ अथवा } 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\text{अथवा } 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta.$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \theta = \text{sec}^2 \theta \text{ अथवा } \text{sec}^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\text{अथवा } \text{sec}^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$$

$$\Rightarrow 1 + \text{cot}^2 \theta = \text{cosec}^2 \theta \text{ अथवा } \text{cosec}^2 \theta - \text{cot}^2 \theta = 1$$

$$\text{अथवा } \text{cosec}^2 \theta - 1 = \text{cot}^2 \theta.$$

- **पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात:** यदि θ एक न्यून कोण है, तो

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \text{ और } \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \text{cot} \theta \text{ और } \text{cot}(90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

$$\text{cosec}(90^\circ - \theta) = \text{sec} \theta \text{ और } \text{sec}(90^\circ - \theta) = \text{cosec} \theta$$

$$\text{अथवा } \text{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

यहां θ एक न्यूनकोण है और $(90^\circ - \theta)$ इसका पूरक कोण है।

- **त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना:**

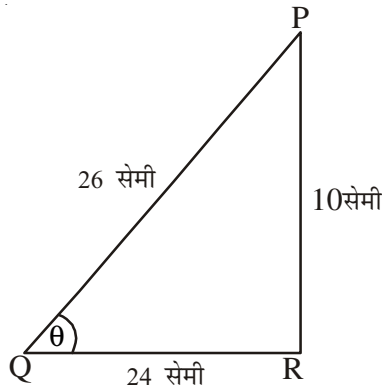
\Rightarrow यदि किसी समकोण त्रिभुज की दो भुजाएं दी हुई

है, तो सभी छः त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किए जा सकते हैं।
 ⇒ यदि एक त्रिकोणमितीय अनुपात दिया हुआ है, तो

पायथागोरस प्रमेय अथवा त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं के प्रयोग से दूसरे त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किए जा सकते हैं।

देखें आपने कितना सीखा:

1. निम्न आकृति के लिए कौन सा कथन सत्य है?



- (A) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{17}{13}$ (B) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{17}{13}$
 (C) $\sin \theta + \sec \theta = \frac{17}{13}$ (D) $\tan \theta + \sec \theta = \frac{17}{13}$

2. यदि $5 \tan \theta - 4 = 0$, तो $\frac{5 \sin \theta - 4 \cos \theta}{5 \sin \theta + 4 \cos \theta}$ का मान है:

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{6}$

3. $\left(\frac{\sin \theta \cdot \cos(90^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta) \cdot \cos \theta} + 1 \right)$ का मान है:

- (A) $\sin \theta + \cos \theta$ (B) $\cos^2 \theta$ (C) $\sec^2 \theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2 \theta$

4. $\frac{\sec 41^\circ \operatorname{cosec} 49^\circ - \tan 41^\circ \cot 49^\circ}{\sec 41^\circ \cdot \sin 49^\circ + \cos 49^\circ \cdot \operatorname{cosec} 41^\circ}$ का मान है:

- (A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

5. यदि $\sin(\theta + 36^\circ) = \cos \theta$ और $\theta + 36^\circ$ एक न्यूनकोण है, तो θ का मान है:

- (A) 54° (B) 18° (C) 21° (D) 27°

6. यदि $\cot \theta = \frac{12}{5}$, तो $\frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{\sec \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए:
7. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A$.
8. यदि $\cos \theta = \frac{1}{2}$ और $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, तो θ , $\operatorname{cosec} \theta$ एवं $\tan \theta$ का मान ज्ञात कीजिए:

स्वयं विस्तारण:

1. एक समकोण त्रिभुज ABC, जिसमें $\angle C = 90^\circ$, $\tan A = 1$, $\sin^2 B \cdot \cos^2 B$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \dots \tan 89^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए
4. C
5. D
6. $\frac{720}{2197}$
8. $\sec \theta = 2$, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\tan \theta = \sqrt{3}$

स्वयं विस्तारण:

उत्तर:

देखें आपने कितना सीखा:

1. A
2. C
3. C

1. $\frac{1}{4}$
2. 1