12

311hi12

द्विपद प्रमेय

मान लीजिए कि आपने कोई धनराशि 15% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से लाभ के लिए लगाई है और आप परिकलन करना चाहते हैं कि 5 वर्ष बाद आपको मिलने वाले ब्याज की राशि कितनी होगी। अथवा मान लीजिए कि यदि हमें वृद्धि दर ज्ञात है और हम 10 वर्ष बाद देश की जनसंख्या का आकार ज्ञात करना चाहते हैं। एक परिणाम जो इन राशियों को ज्ञात करने में सहायक होगा, वह द्विपद प्रमेय है। जैसा कि आप देखेंगे, यह प्रमेय, किसी वास्तविक द्विपद व्यंजक अर्थात् दो पदों से संम्बद्ध व्यंजक की परिमेय घातांकों के परिकलन में हमारी सहायता करता है।

कुछ परिस्थितियों में द्विपद प्रमेय भारतीय तथा यूनानी गणितज्ञों को 300 ई. पू. में ज्ञात था। प्राकृतिक संख्या घाताकों के परिणाम का श्रेय एक अरब कवि तथा गणितज्ञ उमर खैय्याम (1048-1122 ई.) को जाता है। इससे आगे परिमेय घातांकों के लिए, और अधिक व्यापकीकरण ब्रिटिश गणितज्ञ न्यूटन (1642-1727 ई.) द्वारा किया गया।

गणितीय लाभ के अतिरिक्त, अधिकाधिक व्यापकीकरण का एक अन्य कारण था। यह कारण इसकी बहुत सी उपयोगिताएँ थीं। प्रारम्भ में चर्चित परिस्थितियों के अतिरिक्त द्विपद प्रमेय की अनेक उपयोगितायें प्रायिकता सिद्धान्त, अवकलन गणित तथा संख्याओं $(1.02)^7$ आदि की तरह के सन्निकट मान ज्ञात करने में है।

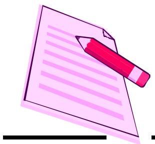
उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे :

- धनात्मक पूर्णांक के लिए द्विपद प्रमेय का वर्णन करना तथा गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा इसे सिद्ध करना
- द्विपद प्रमेय के उपयोग से व्यंजक $(x+y)^n$ का n तथा y के भिन्न मानों के लिए, द्विपद प्रसार लिखना
- किसी द्विपद प्रसार का व्यापक तथा मध्य पद लिखना

पूर्व ज्ञान

- संख्या निकाय
- संख्याओं तथा ब्यंजकों पर चार मूल–भूत संक्रियाएँ
- बीजीय व्यंजक तथा उनका सरलीकरण
- घात तथा घातांक



टिप्पणी

12.1 प्राकृत संख्या घातांक के लिए द्विपद प्रमेय

आपने एक द्विपद का स्वयं उससे अथवा अन्य द्विपद से गुणा अवश्य किया होगा। इस ज्ञान का प्रयोग करते हुए, आइए कुछ प्रसार करें। द्विपद $(x + y)$ पर विचार कीजिए। अब,

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = (x + y)\,(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)^2 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = (x + y)\,(x + y)^3 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$(x + y)^5 = (x + y)\,(x + y)^4 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ इत्यादि।

उपरोक्त समीकरणों में से प्रत्येक में, दायाँ पक्ष, बाएँ पक्ष का द्विपद प्रसार कहलाता है।

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त प्रसार में से प्रत्येक में, हमने एक द्विपद की घात को प्रसारित रूप में इस प्रकार लिखा है कि उसके पद द्विपद के पहले पद (जो इन उदाहरणों में x है) की घटती हुई घातों के पदों में रहें। यदि आप इन प्रसारों को ध्यानपूर्वक देखें, तो आपके सम्मुख निम्न बातें आएँगी :

1. प्रसार में पदों की संख्या द्विपद के घातांक से एक अधिक है। उदाहरणार्थ, $(x + y)^4$ के प्रसार में पदों की संख्या 5 है।
2. प्रथम पद में x का घातांक द्विपद के घातांक के बराबर है तथा प्रसार के प्रत्येक उत्तरोत्तर पद में यह घातांक 1 कम होता जाता है।
3. प्रथम पद में y का घातांक शून्य है (चूँकि $y^0 = 1$)। दूसरे पद में y का घातांक 1 है। प्रत्येक उत्तरोत्तर पद में यह 1 बढ़ता जाता है, जब तक कि यह द्विपद की घातांक के बराबर नहीं हो जाता। ऐसा प्रसार के अन्तिम पद में होता है।
4. प्रत्येक पद में x और y के घातांकों का योग द्विपद के घातांक के समान होता है। उदाहरणार्थ $(x + y)^5$ के प्रसार में प्रत्येक पद में x और y के घातांकों का योग 5 है।

   यदि हम संचयी गुणांकों का प्रयोग करें, तो प्रसारों को इस प्रकार लिख सकते हैं :

   $$(x + y)^3 = {}^3C_0\, x^3 + {}^3C_1 x^2y + {}^3C_2 x\, y^2 + {}^3C_3\, y^3$$

   $$(x + y)^4 = {}^4C_0 x^4 + {}^4C_1 x^3y + {}^4C_2 x^2y^2 + {}^4C_3 xy^3 + {}^4C_4\, y^4$$

   $(x + y)^5 = {}^5C_0 x^5 + {}^5C_1 x^4y + {}^5C_2 x^3y^2 + {}^5C_3 x^2y^3 + {}^5C_4 xy^4 + {}^5C_5\, y^5$, इत्यादि।

   अधिक व्यापक रूप में, $(x + y)^n$ के द्विपद प्रसार को हम निम्न प्रमेय में दिए गए रूप में लिख सकते हैं, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है। यह कथन **प्राकृत संख्या (अथवा धनात्मक पूर्णांकीय) घातांक के लिए द्विपद प्रमेय कहलाता है।**

   प्रमेय: $(x + y)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} y^1 + {}^nC_2\, x^{n-2} y^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} xy^{n-1} + {}^nC_n\, y^n \ldots$(A)

   जहाँ $n \in N$ और $x, y \in R$।

उपपत्ति : आइए, इस प्रमेय को गणितीय आगमन के सिद्धान्त से सिद्ध करें। मान लीजिए हम कथन (A) को $P(n)$ से व्यक्त करते हैं। अर्थात्,

$$P(n):\ (x+y)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \ldots + {}^nC_{n-1}xy^{n-1} + {}^nC_ny^n \quad \ldots(i)$$

आइए, जाँच करें कि $P(1)$ सत्य है अथवा नहीं। (i) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$P(1) : (x+y)^1 = {}^1C_0x + {}^1C_1\,y = 1\times x + 1\times y$

अर्थात्, $(x+y)^1 = x+y$ इस प्रकार, $P(1)$ सत्य है।

अब हम यह मान लेते हैं कि $P(k)$ सत्य है। अर्थात्,

$P(k)$: $(x+y)^k = {}^kC_0x^k + {}^kC_1x^{k-1}y + {}^kC_2x^{k-2}y^2 + {}^kC_3x^{k-3}y^3 + \ldots + {}^kC_{k-1}xy^{k-1} + {}^kC_k\,y^k \quad \ldots(ii)$

यह मानते हुए कि $P(k)$ सत्य है, यदि हम सिद्ध कर दें कि $P(k+1)$ भी सत्य है, तो $P(n)$ सभी n के लिए सत्य होगा। अब,

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k = (x+y)({}^kC_0x^k + {}^kC_1x^{k-1}y + {}^kC_2x^{k-2}y^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}xy^{k-1} + {}^kC_ky^k)$$

$$= {}^kC_0x^{k+1} + {}^kC_0x^ky + {}^kC_1x^ky + {}^kC_1x^{k-1}y^2 + {}^kC_2x^{k-1}y^2 + {}^kC_2x^{k-2}y^3 + \ldots + {}^kC_{k-1}x^2y^{k-1} + {}^kC_{k-1}xy^k + {}^kC_kxy^k + {}^kC_ky^{k+1}$$

अर्थात्, $(x+y)^{k+1} = {}^kC_0x^{k+1} + ({}^kC_0 + {}^kC_1)x^ky + ({}^kC_1 + {}^kC_2)x^{k-1}y^2 + \ldots + ({}^kC_{k-1} + {}^kC_k)xy^k + {}^kC_ky^{k+1} \quad \ldots(iii)$

पाठ 11 से, आप जानते हैं कि ${}^kC_0 = 1 = {}^{k+1}C_0 \quad \ldots.(iv)$

और ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$ साथ ही, ${}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$

अतः, ${}^kC_0 + {}^kC_1 = {}^{k+1}C_1 \quad \ldots.(v)$

${}^kC_1 + {}^kC_2 = {}^{k+1}C_2$

${}^kC_2 + {}^kC_3 = {}^{k+1}C_3$

....

.... इत्यादि।

(iv) और (v) का प्रयोग करके, हम (iii) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$(x+y)^{k+1} = {}^{k+1}C_0x^{k+1} + {}^{k+1}C_1x^ky + {}^{k+1}C_2x^{k-1}y^2 + \ldots + {}^{k+1}C_kxy^k + {}^{k+1}C_{k+1}y^{k+1}$$

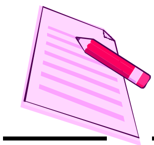
जो यह दर्शाता है कि $P(k+1)$ सत्य है।

इस प्रकार हमने दर्शाया कि (i) $P(1)$ सत्य है तथा (ii) यदि $P(k)$ सत्य है, तो $P(k+1)$ भी सत्य है।

अतः, गणितीय आगमन के सिद्धांत से, n के किसी भी मान के लिए $P(n)$ सत्य है। अर्थात् हमने किसी भी प्राकृत संख्या घातांक के लिए द्विपद प्रमेय सिद्ध कर दिया है।

ऐसा समझा जाता है कि यह परिणाम अरब के प्रसिद्ध कवि उमर खैय्याम द्वारा सिद्ध किया गया था। यद्यपि उनका यह प्रमाण अभी तक किसी को प्राप्त नहीं हुआ है।

अब हम इस प्रमेय को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लेंगे।



उदाहरण 12.1. $(x + 3y)^5$ का द्विपद प्रसार लिखिए।

हल : यहाँ द्विपद का पहला पद x तथा द्वितीय पद $3y$ है। द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(x+3y)^5 = {}^5C_0x^5 + {}^5C_1x^4(3y)^1 + {}^5C_2x^3(3y)^2 + {}^5C_3x^2(3y)^3 + {}^5C_4x(3y)^4 + {}^5C_5(3y)^5$$

$$= 1\times x^5 + 5x^4\times 3y + 10x^3\times(9y^2) + 10x^2\times(27y^3) + 5x\times(81y^4) + 1\times 243y^5$$

$$= x^5 + 15x^4y + 90x^3y^2 + 270x^2y^3 + 405xy^4 + 243y^5$$

इस प्रकार, $(x+3y)^5 = x^5 + 15x^4y + 90x^3y^2 + 270x^2y^3 + 405xy^4 + 243y^5$

उदाहरण 12.2. $(1+a)^n$ का a की घातों के पदों में प्रसार कीजिए, जहाँ a एक वास्तविक संख्या है।

हल : द्विपद प्रमेय के कथन में, $x = 1$ तथा $y = a$ लेने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(1+a)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}a + {}^nC_2(1)^{n-2}a^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}(1)a^{n-1} + {}^nC_na^n$$

अर्थात्, $\quad (1+a)^n = 1 + {}^nC_1a + {}^nC_2a^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}a^{n-1} + {}^nC_na^n \quad \ldots$ (B)

(B) द्विपद प्रमेय के कथन का एक अन्य रूप है।

इस प्रमेय का उपयोग $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$, $\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\right)^5$, $\left(\frac{a}{4}+\frac{2}{a}\right)^5$, $\left(\frac{2t}{3}-\frac{3}{2t}\right)^6$, इत्यादि प्रकार के व्यंजकों के प्रसारों को प्राप्त करने के लिए भी किया जा सकता है।

आइए, इसे एक उदाहरण से स्पष्ट करें।

उदाहरण 12.3. $\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\right)^4$ का प्रसार लिखिए, जहाँ $x, y \neq 0$ है।

हल : हमें निम्न प्राप्त है :

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\right)^4 = {}^4C_0\left(\frac{y}{x}\right)^4 + {}^4C_1\left(\frac{y}{x}\right)^3\left(\frac{1}{y}\right) + {}^4C_2\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(\frac{1}{y}\right)^2 + {}^4C_3\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{1}{y}\right)^4$$

$$= 1\times\frac{y^4}{x^4} + 4\times\frac{y^3}{x^3}\times\frac{1}{y} + 6\times\frac{y^2}{x^2}\times\frac{1}{y^2} + 4\times\left(\frac{y}{x}\right)\times\frac{1}{y^3} + 1\times\frac{1}{y^4}$$

$$= \frac{y^4}{x^4} + 4\frac{y^2}{x^3} + \frac{6}{x^2} + \frac{4}{xy^2} + \frac{1}{y^4}$$

उदाहरण 12.4. एक नगर की जनसंख्या 3% वार्षिक की दर से बढ़ती है। 5 वर्ष के बाद कितने प्रतिशत वृद्धि अपेक्षित है? दशमलव के 2 स्थानों तक उत्तर दीजिए।

हल : मान लीजिए कि वर्तमान जनसंख्या a है। 1 वर्ष बाद यह $a+\frac{3}{100}a = a\left(1+\frac{3}{100}\right)$ होगी।

2 वर्ष बाद यह $a\left(1+\frac{3}{100}\right)+\frac{3}{100}\left[a\left(1+\frac{3}{100}\right)\right] = a\left(1+\frac{3}{100}\right)\left(1+\frac{3}{100}\right) = a\left(1+\frac{3}{100}\right)^2$

इसी प्रकार, 5 वर्ष बाद यह $a\left(1+\frac{3}{100}\right)^5$ होगी। द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए तथा दशमलव के 3 स्थानों से अधिक से सम्बन्धित पदों को छोड़ते हुए, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$a\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 \approx a\left[1+5(0.03)+10(0.03)^2\right] = a\times 1.159$$

इसलिए, 5 वर्षों में वृद्धि $0.159\times 100\% = \frac{159}{1000}\times 100\times\frac{1}{100} = 15.9\%$ होगी।

उदाहरण 12.5. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए, मान ज्ञात कीजिए: (*i*) 102^4 (*ii*) 97^3

हल :

(*i*) $102^4 = (100+2)^4$

$= {}^4C_0\,(100)^4 + {}^4C_1(100)^3.2 + {}^4C_2(100)^2.2^2 + {}^4C_3\,(100).2^3 + {}^4C_4\,.2^4$

$= 100000000 + 8000000 + 240000 + 3200 + 16 = 108243216$

(*ii*) $(97)^3 = (100-3)^3 = {}^3C_0(100)^3 - {}^3C_1(100)^2.3 + {}^3C_2(100).3^2 - {}^3C_3.3^3$

$= 1000000 - 90000 + 2700 - 27 = 1002700 - 90027 = 912673$

देखें आपने कितना सीखा 12.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार लिखिए :

   (a) $(2a+b)^3$ (b) $(x^2-3y)^6$ (c) $(4a-5b)^4$ (d) $(ax+by)^n$

2. निम्नलिखित के प्रसार लिखिए :

   (a) $(1-x)^7$ (b) $\left(1+\frac{x}{y}\right)^7$ (c) $(1+2x)^5$

3. निम्नलिखित के प्रसार लिखिए :

   (a) $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)^5$ (b) $\left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^7$ (c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ (d) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^5$

4. मान लीजिए मैं एक लाख रुपये 18% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से निवेश करता हूँ। 10 वर्ष बाद मुझे कितनी राशि मिलेगी? अपने उत्तर को 2 दशमलव स्थानों तक दीजिए।

5. जीवाणुओं की संख्या 2% प्रति घण्टे की दर से बढ़ती है। यदि प्रात: 9 बजे जीवाणुओं की संख्या 1.5×10^5 हो, तो उसी दिन दोपहर बाद 1 बजे की उनकी संख्या ज्ञात कीजिए।

6. द्विपद प्रमेय द्वारा, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(*i*) $(101)^4$ (*ii*) $(99)^4$ (*iii*) $(1.02)^3$ (iv) $(0.98)^3$

12.2 द्विपद प्रसार में व्यापक पद

आइए, $(x + y)^n$ के प्रसार (A) में अर्थात्

$$(x+y)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \ldots + {}^nC_{n-1}xy^{n-1} + {}^nC_ny^n$$

विभिन्न पदों की जाँच करें।

हम देखते हैं कि

${}^nC_0x^n$, अर्थात् ${}^nC_{1-1}x^ny^0$ प्रथम पद है।

${}^nC_1x^{n-1}y$, अर्थात् ${}^nC_{2-1}x^{n-1}y^1$ द्वितीय पद है,

${}^nC_2x^{n-2}y^2$, अर्थात् ${}^nC_{3-1}x^{n-2}y^2$ तृतीय पद है, इत्यादि।

उपरोक्त से, हम व्यापक रूप से यह कह सकते हैं कि

$(r + 1)$वाँ पद ${}^nC_{(r+1)-1}x^{n-r}y^r$, अर्थात् ${}^nC_rx^{n-r}y^r$ होगा।

यदि हम इस पद को T_{r+1} से व्यक्त करें, तो हमें प्राप्त होता है कि $T_{r+1} = {}^nC_rx^{n-r}y^r$

T_{r+1} को सामान्यतः द्विपद प्रसार का **व्यापक पद** कहा जाता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेंगे और कुछ प्रसारों के व्यापक पद ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 12.6. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ के प्रसार में $(r + 1)$वाँ पद ज्ञात कीजिए जहाँ, n एक प्राकृत संख्या है। प्रसार के प्रथम पद के लिए अपने उत्तर का सत्यापन कीजिए।

हल : प्रसार का व्यापक पद निम्न से प्राप्त है :

$$T_{r+1} = {}^nC_r(x^2)^{(n-r)}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}^nC_rx^{2n-2r}\frac{1}{x^r} = {}^nC_rx^{2n-3r} \qquad \ldots(i)$$

इसलिए, प्रसार में $(r + 1)$वाँ पद ${}^nC_rx^{2n-3r}$ है।

$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ का प्रसार करने पर, हम देखते हैं कि प्रथम पद $(x^2)^n$ अथवा x^{2n} है। (*i*) का प्रयोग करते हुए, $r = 0$ रखकर, हम प्रथम पद ज्ञात करते हैं।

चूँकि $T_1 = T_{0+1}$

$$\therefore \qquad T_1 = {}^nC_0x^{2n-0} = x^{2n}$$

यह सत्यापित करता है कि T_{r+1} के लिए दिया व्यंजक, $r + 1 = 1$ के लिए सही है।

टिप्पणी

उदाहरण 12.7. $\left(1-\frac{2}{3}x^3\right)^6$ के प्रसार का पाँचवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $T_{r+1} = T_5$ जिससे $r+1 = 5$, अर्थात् $r = 4$ प्राप्त होता है।

साथ ही, $n = 6$ और मान लीजिए कि $x = 1$ एवं $y = \frac{-2x^3}{3}$ है।

$$\therefore \quad T_5 = {}^6C_4\left(-\frac{2}{3}x^3\right)^4 = {}^6C_2\left(\frac{16}{81}x^{12}\right) = \frac{6\times5}{2}\times\frac{16}{81}\times x^{12} = \frac{80}{27}x^{12}$$

इस प्रकार, प्रसार में पाँचवाँ पद $\frac{80}{27}x^{12}$ है।

देखें आपने कितना सीखा 12.2

1. एक प्राकृत संख्या n के लिए, निम्न में से प्रत्येक के प्रसार में $(r + 1)$वाँ पद लिखिए :

   (a) $(2x+y)^n$ (b) $(2a^2-1)^n$ (c) $(1-a)^n$ (d) $\left(3+\frac{1}{x^2}\right)^n$

2. निम्न प्रसारों में से प्रत्येक में, निर्दिष्ट पद ज्ञात कीजिए:

   (a) $(1+2y)^8$; छठा पद (b) $(2x+3)^7$; चौथा पद

   (c) $(2a-b)^{11}$; सातवाँ पद (d) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$; चौथा पद

   (e) $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^7$; पाँचवाँ पद

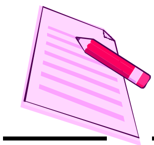
12.3 द्विपद प्रसार में मध्य पद

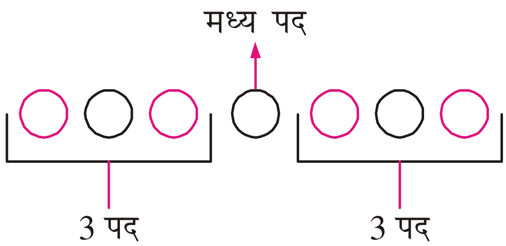
अब तक आप एक प्रसार के व्यापक पद से परिचित हो चुके हैं। आइए देखें कि **मध्य पद** (अथवा **पदों**) को हम कैसे प्राप्त कर सकते हैं। याद कीजिए कि एक द्विपद प्रसार में पदों की संख्या द्विपद के घातांक से सदैव एक अधिक होती है। इसका अर्थ यह है कि यदि घातांक एक सम संख्या है, तो पदों की संख्या विषम होगी और घातांक यदि एक विषम संख्या हो, तो पदों की संख्या सम होगी।

इस प्रकार, एक द्विपद प्रसार में मध्य पद ज्ञात करते समय, हमारे सामने दो प्रकार की स्थितियाँ आती हैं :

स्थिति 1 : जब n एक सम संख्या है

ऐसी स्थिति का अध्ययन करने के लिए, हम n का विशिष्ट मान, जैसे $n = 6$ लेते हैं। तब प्रसार में पदों की संख्या 7 होगी। चित्र 12.1 से, आप देख सकते हैं कि चौथे पद के दोनों ओर तीन–तीन पद हैं।



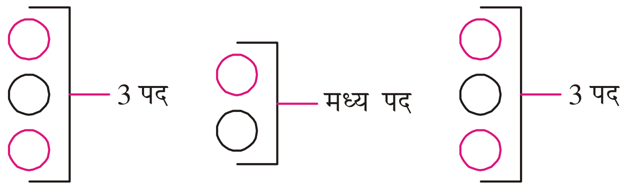


चित्र 12.1

व्यापक रूप में, जब द्विपद का घातांक एक सम संख्या n है, तो $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें पद के दोनों ओर $\frac{n}{2}$ पद हैं। इसलिए, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद मध्य पद है।

स्थिति 2 : जब n एक विषम संख्या है।

आइए, उदाहरणार्थ $n = 7$ लेकर देखते हैं कि इस स्थिति में क्या होता है। प्रसार में पदों की संख्या 8 होगी। चित्र 12.2 को देखिए। क्या इसमें कोई एक मध्य पद पाते है? नहीं। परन्तु हम इसे एक रेखा द्वारा दो समान भागों में विभाजित कर सकते हैं, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। हम विभाजित करने वाली रेखा के प्रत्येक ओर के निकटतम पद को मध्य पद कहते हैं, क्योंकि एक मध्य पद के बायीं ओर तथा दूसरे मध्य पद के दायीं ओर के पदों की संख्या समान है।

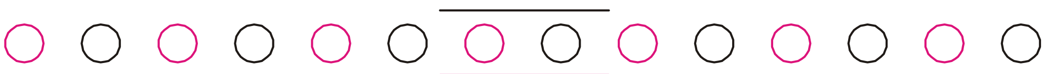


चित्र 12.2

इस प्रकार, इस स्थिति में, दो मध्य पद हैं।

इस प्रकार, मध्य पद चौथे, अर्थात् $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ वें और पाँचवें अर्थात् $\left(\frac{7+3}{2}\right)$वें पद हैं।

इसी प्रकार यदि $n = 13$ है, तब $\left(\frac{13+1}{2}\right)$वाँ और $\left(\frac{13+3}{2}\right)$वाँ, अर्थात् 7वाँ और 8वाँ दो मध्य पद हैं, जैसा कि चित्र 12.3 में दिखाया गया है।



चित्र 12.3

उपरोक्त से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि जब किसी द्विपद का घातांक n एक विषम प्राकृत संख्या होती है, तो संगत द्विपद प्रसार में $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वें तथा $\left(\frac{n+3}{2}\right)$वें पद उसके दो मध्य पद होते हैं।

आइए अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 12.8. $(x^2+y^2)^8$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $n = 8$ (एक सम संख्या) है।

$\therefore \quad \left(\frac{8}{2}+1\right)$ वाँ अर्थात् 5वाँ पद मध्य पद है।

व्यापक पद $T_{r+1} = {}^8C_r(x^2)^{8-r}y^r$ में $r = 4$ रखने पर,

$$T_5 = {}^8C_4(x^2)^{8-4}(y^2)^4 = 70x^8y^8$$

उदाहरण 12.9. $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^9$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $n = 9$ है, जो एक विषम संख्या है।

$\therefore \left(\frac{9+1}{2}\right)$ वाँ तथा $\left(\frac{9+3}{2}\right)$ वाँ पद मध्य पद हैं,

अर्थात् T_5 तथा T_6 मध्य पद हैं।

T_5 तथा T_6 ज्ञात करने के लिए, व्यापक पद

$T_{r+1} = {}^9C_r(2x^2)^{9-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$, में $r = 4$ तथा $r = 5$ रखने पर,

$$T_5 = {}^9C_4(2x^2)^{9-4}\left(\frac{1}{x}\right)^4 = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2}\times(32x^{10})\times\left(\frac{1}{x}\right)^4 = 4032\,x^6$$

तथा $T_6 = {}^9C_5\,(2\,x^2)^{9-5}\left(\frac{1}{x}\right)^5 = 2016\,x^3$

इस प्रकार, वाँछित दो मध्य पद $4032\,x^6$ तथा $2016\,x^3$ हैं।

देखें आपने कितना सीखा 12.3

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए :

   (a) $(2x+y)^{10}$ (b) $\left(1+\frac{2}{3}x^3\right)^8$ (c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ (d) $\left(1-x^2\right)^{10}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए :

   (a) $(a+b)^7$ (b) $(2a-b)^9$ (c) $\left(\frac{3x}{4}-\frac{4y}{3}\right)^7$ (d) $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{11}$

आइये दोहराएँ

- एक प्राकृत संख्या n के लिए, $(x+y)^n = {}^nC_o\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}y + {}^nC_2\, x^{n-2}\, y^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}\, xy^{n-1} + {}^nC_n\, y^n$

  यह धनात्मक पूर्णांकीय (अथवा प्राकृत संख्या) घातांक के लिए द्विपद प्रमेय कहलाता है।
- धनात्मक पूर्णांकीय घातांक के लिए, द्विपद प्रमेय का एक अन्य रूप इस प्रकार है : $(1 + a)^n = {}^nC_o + {}^nC_1\, a + {}^nC_2\, a^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}\, a^{n-1} + {}^nC_n\, a^n$
- $(x+y)^n$ के प्रसार में व्यापक पद ${}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r$ होता है और $(1 + a)^n$ के प्रसार में यह पद ${}^nC_r a^r$, होता है, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है और $0 \le r \le n$ है।
- यदि n एक सम प्राकृत संख्या है, तो $(x + y)^n$ के प्रसार में केवल एक ही मध्य पद होगा। यदि n एक विषम प्राकृत संख्या है, तो इसके प्रसार में दो मध्य पद होंगे।
- व्यापक पद के सूत्र का प्रयोग एक प्रसार में मध्य पद (पदों) और कुछ अन्य विशिष्ट पद ज्ञात करने में किया जा सकता है।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=g0ilZEf1N6A*
- *https://www.youtube.com/watch?v=jH7VVVTEkxs*
- *https://www.youtube.com/watch?v=HXPJLHR4G4s*

आइए अभ्यास करें

1. निम्न में से प्रत्येक का प्रसार लिखिए :

   (a) $(3x + 2y)^5$ (b) $(p - q)^8$ (c) $(1 - x)^8$

   (d) $\left(1+\frac{2}{3}x\right)^6$ (e) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^6$ (f) $\left(3x-y^2\right)^5$

   (g) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{2}{x}\right)^4$ (h) $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^7$ (i) $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^5$ (j) $\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)^4$

2. निम्न में से प्रत्येक के प्रसार में (r + 1)वाँ पद लिखिए, जहाँ $n \in N$:

   (a) $(3x - y^2)^n$ (b) $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^n$

3. निम्न प्रसारों में से प्रत्येक में निर्दिष्ट पद ज्ञात कीजिए :

   (a) $(1 - 2x)^7$: तीसरा पद [संकेत : यहाँ $r = 2$] (b) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^6$: मध्य पद (पदों)

(c) $(3x-4y)^6$: चौथा पद (d) $\left(y^2-\dfrac{1}{y}\right)^{11}$: मध्य पद (पदों)

(e) $(x^3-y^3)^{12}$: चौथा पद (f) $(1-3x^2)^{10}$: मध्य पद (पदों)

(g) $(-3x-4y)^6$: पाँचवाँ पद (h) $(x-2y)^6$ के प्रसार में rवाँ पद

4. यदि x की बढ़ती हुई घातों के क्रम में, $(1+x)^n$ के प्रसार में T_{r+1}, rवें पद को व्यक्त करता है (जहाँ n एक प्राकृत संख्या है), तो सिद्ध कीजिए कि

$r(r+1)T_{r+2}=(n-r+1)(n-r)x^2\,T_r$ [**संकेत :** $T_r={}^nC_{r-1}\,x^{r-1}$ और $T_{r+2}={}^nC_{r+1}\,x^{r+1}$]

5. x की बढ़ती हुई घातों के क्रम में, $(1+2x)^{10}$ के प्रसार में x^{r-1} का गुणांक k_r है और $k_{r+2}=4k_r$. है। r का मान ज्ञात कीजिए। [**संकेत :** $k_r={}^{10}C_{r-1}\,2^{r-1}$ और $k_{r+2}={}^{10}C_{r+1}2^{r+1}$]

6. $(1+a)^n$ के प्रसार में (जहाँ n एक प्राकृत संख्या है), पाँचवें, छठे और सातवें पदों के गुणांक एक समान्तर श्रेढ़ी में हैं। n ज्ञात कीजिए। [**संकेत :** ${}^nC_5-{}^nC_4={}^nC_6-{}^nC_5$]

7. $(1+y+y^2)^4$ का प्रसार कीजिए। $\left[\quad :(1+y+y^2)^4=\{(1+y)+y^2\}^4\right]$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 12.1

1. (a) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

(b) $x^{12}-18x^{10}y+135x^8y^2-540x^6y^3+1215x^4y^4-1458x^2y^5+729y^6$

(c) $256a^4-1280a^3b+2400a^2b^2-2000ab^3+625b^4$

(d) $a^nx^n+na^{n-1}x^{n-1}by+\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^{n-2}b^2y^2+\ldots+b^ny^n$

2. (a) $1-7x+21x^2-35x^3+35x^4-21x^5+7x^6-x^7$

(b) $1+\dfrac{7x}{y}+\dfrac{21x^2}{y^2}+\dfrac{35x^3}{y^3}+\dfrac{35x^4}{y^4}+\dfrac{21x^5}{y^5}+\dfrac{7x^6}{y^6}+\dfrac{x^7}{y^7}$

(c) $1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5$

3. (a) $\dfrac{a^5}{243}+\dfrac{5a^4b}{162}+\dfrac{5a^3b^2}{54}+\dfrac{5a^2b^3}{36}+\dfrac{5ab^4}{48}+\dfrac{b^5}{32}$

(b) $2187x^7-25515x^4+127575x-\dfrac{354375}{x^2}+\dfrac{590625}{x^5}-\dfrac{590625}{x^8}+\dfrac{328125}{x^{11}}-\dfrac{78125}{x^{14}}$

(c) $x^4+4x^2+6+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$ (d) $\dfrac{x^5}{y^5}+5\dfrac{x^3}{y^3}+10\dfrac{x}{y}+10\dfrac{y}{x}+5\dfrac{y^3}{x^3}+\dfrac{y^5}{x^5}$

4. 4.96 लाख रुपए 5. 162360

6. (i) 104060401 (ii) 96059601 (iii) 1.061208 (iv) 0.941192

देखें आपने कितना सीखा 12.2

1. (a) ${}^nC_r 2^{n-r} x^{n-r} y^r$ (b) ${}^nC_r 2^{n-r} a^{2n-2r} (-1)^r$ (c) ${}^nC_r (-1)^r a^r$
   (d) ${}^nC_r 3^{n-r}.x^{-2r}$
2. (a) $1792y^5$ (b) $15120x^4$ (c) $14784a^5b^6$
   (d) 20 (e) $35x$

देखें आपने कितना सीखा 12.3

1. (a) $8064x^5y^5$ (b) $\frac{1120}{81}x^{12}$ (c) 20 (d) $-252x^{10}$
2. (a) $35a^4b^3$, $35a^3b^4$ (b) $4032a^5b^4, -2016a^4b^5$ (c) $\frac{-105}{4}x^4y^3, \frac{140}{3}x^3y^4$
   (d) $\frac{462}{x^4}, \frac{462}{x^7}$

आइए अभ्यास करें

1. (a) $243x^5+810x^4y+1080x^3y^2+720x^2y^3+240xy^4+32y^5$
   (b) $p^8-8p^7q+28p^6q^2-56p^5q^3+70p^4q^4-56p^3q^5+28p^2q^6-8pq^7+q^8$
   (c) $1-8x+28x^2-56x^3+70x^4-56x^5+28x^6-8x^7+x^8$
   (d) $1+4x+\frac{20}{3}x^2+\frac{160}{27}x^3+\frac{80}{27}x^4+\frac{64}{81}x^5+\frac{64}{729}x^6$
   (e) $x^6+3x^4+\frac{15}{4}x^2+\frac{5}{2}+\frac{15}{16x^2}+\frac{3}{16x^4}+\frac{1}{64x^6}$
   (f) $243x^5-405x^4y^2+270x^3y^4-90x^2y^6+15xy^8-y^{10}$
   (g) $\frac{x^8}{256}+\frac{x^5}{8}+\frac{3}{2}x^2+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^4}$
   (h) $x^{14}-7x^9+21x^4-\frac{35}{x}+\frac{35}{x^6}-\frac{21}{x^{11}}+\frac{7}{x^{16}}-\frac{1}{x^{21}}$
   (i) $x^{15}+5x^{10}+10x^5+10+\frac{5}{x^5}+\frac{1}{x^{10}}$
   (j) $\frac{1}{x^8}-\frac{4}{x^3}+6x^2-4x^7+x^{12}$
2. (a) $(-1)^r\, {}^nC_r 3^{n-r} x^{n-r} y^{2r}$ (b) ${}^nC_r x^{3n-4r}$
3. (a) $84x^2$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $-34560\, x^3y^3$ (d) $-462y^7, 462y^4$
   (e) $-220x^{27}y^9$ (f) $-61236\, x^{10}$ (g) $34560x^2y^4$
   (h) $(-2)^{r-1}\ {}^6C_{r-1}\, x^{7-r} y^{r-1}$ (i) $-2^{r-2}\ {}^8C_{r-2}\, x^{r-2}$
5. 5 6. 7, 14 7. $1+4y+10y^2+16y^3+19y^4+16y^5+10y^6+4y^7+y^8$