311hi21

21

सारणिक तथा इसके अनुप्रयोग

प्रत्येक वर्ग आव्यूह एक अद्वितीय संख्या से सम्बन्धित है–यह संख्या सारणिक कहलाती है। इस पाठ में हम सारणिक के भिन्न–भिन्न गुणों (गुणधर्मों) का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाऐंगे :

- एक वर्ग आव्यूह के सारणिक को परिभाषित करना
- एक आव्यूह के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखंड परिभाषित करना
- आव्यूह के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखंड ज्ञात करना
- सारणिकों के गुण लिखना
- अधिक–से–अधिक 3 क्रम वाले सारणिकों के मान ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- समीकरणों के हल का ज्ञान
- संख्या निकाय (सम्मिश्र संख्याओं सहित) का ज्ञान
- संख्याओं और व्यंजकों पर चार मौलिक संक्रियाएँ

21.1 कोटि (क्रम) 2 के सारणिक

आइए नीचे दिये गये रैखिक समीकरण निकाय पर विचार करें :

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

इस समीकरण निकाय को x तथा y के लिए हल करने पर,

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ तथा } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ जबकि } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

संख्या $a_1b_2 - a_2b_1$ यह ज्ञात करती है कि x तथा y के मान हैं या नहीं

संख्या $a_1b_2 - a_2b_1$ सारणिक का मान कहलाता है तथा इसे हम

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \text{ द्वारा दर्शाते हैं।}$$

21.2 कोटि 2 के सारणिक का विस्तार

क्रम 2 के सारणिक को विस्तृत रूप में लिखने का नियम नीचे दिया गया है :

सारणिक, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, जिसमें a_{11} प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का अवयव है,

a_{12} प्रथम पंक्ति तथा द्वितीय स्तम्भ का अवयव है,

a_{21} द्वितीय पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का अवयव है,

a_{22} द्वितीय पंक्ति तथा द्वितीय स्तम्भ का अवयव है

के अवयवों को निम्न प्रकार से लिखिए :

$$\begin{matrix} a_{11} & \searrow\!\!\!\!\nearrow & a_{12} \\ a_{21} & & a_{22} \end{matrix}$$

तीर के निशान द्वारा जुड़े अवयवों को गुणा कीजिए। जो तीर का निशान नीचे की ओर जाता है जैसे $a_{11}\,a_{22}$ वह धनात्मक होगा तथा जिस गुणनफल में तीर का निशान ऊपर की ओर जाता है वह ऋणात्मक होगा जैसे कि $-a_{21}\,a_{12}$ ।

इन दोनों गुणनफलों का योग अर्थात् $a_{11}\,a_{22} + (-a_{21}.a_{12})$ या $a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$ दिए गए सारणिक का वांछित मान है।

उदाहरण 21.1. मान ज्ञात कीजिए :

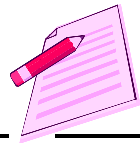
(i) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 \\ x^2-x+1 & x-1 \end{vmatrix}$

हल:

(i) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (6 \times 2) - (8 \times 4) = 12 - 32 = -20$

(ii) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\,(a+b) - (2a)\,(2b)$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$



टिप्पणी

(iii) $\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 \\ x^2-x+1 & x-1 \end{vmatrix} = (x^2+x+1)(x-1) - (x^2-x+1)(x+1)$

$= (x^3-1) - (x^3+1) = -2$

उदाहरण 21.2. x का मान ज्ञात कीजिए यदि :

(i) $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = 6$ हो। (ii) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = 0$ हो।

हल :

(i) $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-3)(x+3) - x(x+1) = (x^2-9) - x^2 - x = -x-9$

प्रश्न के अनुसार, $-x-9 = 6 \Rightarrow x = -15$

(ii) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = (2x-1)(4x+2) - (x+1)(2x+1)$

$= 8x^2 + 4x - 4x - 2 - 2x^2 - x - 2x - 1$

$= 6x^2 - 3x - 3 = 3(2x^2 - x - 1)$

प्रश्न के अनुसार, $3(2x^2 - x - 1) = 0$

या, $2x^2 - x - 1 = 0$ या, $2x^2 - 2x + x - 1 = 0$

या, $2x(x-1) + 1(x-1) = 0$ या, $(2x+1)(x-1) = 0$

या, $x = 1, -\frac{1}{2}$

21.3 कोटि 3 का सारणिक

व्यंजक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ में 9 राशियाँ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ तथा c_3 हैं जिन्हें 3 पंक्तियों तथा 3 स्तम्भों में व्यवस्थित किया गया है। कोटि 3 के सारणिक में $(3)^2 = 9$ अवयव हैं।

कोटि 3 के सारणिक को दोहरे पादांकों का प्रयोग करते हुए हम इस प्रकार लिखते हैं :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

एक सारणिक को प्रायः हम Δ या |A|, |B| इत्यादि द्वारा दर्शाते हैं।

$\Delta = |a_{ij}|$ जबकि i = 1, 2, 3, तथा $j = 1, 2, 3$ है।

21.4 एक वर्ग आव्यूह का सारणिक

प्रत्येक वर्ग आव्यूह के लिए हम एक संगत सारणिक को सम्बद्ध करते हैं।

1×1 आव्यूह $[a]$, के लिए हम कोटि 1 के सारणिक, जिसमें केवल एक अवयव a होता है, को सम्बद्ध करते हैं। इस सारणिक का मान a है।

यदि A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ कोई कोटि 2 का आव्यूह है, तो व्यंजक $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ कोटि 2 का सारणिक कहलाता है। इसे हम

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ द्वारा दर्शाते हैं।

3×3 आव्यूह $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, के साथ हम सारणिक $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ को सम्बद्ध करते हैं तथा इसका मान है

$$a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)\, a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

उदाहरण 21.3. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो |A| ज्ञात कीजिए।

हल : $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 6 = 15 - 6 = 9$

उदाहरण 21.4. यदि A= $\begin{bmatrix} a+b & a \\ b & a-b \end{bmatrix}$ हो, तो |A| ज्ञात कीजिए।

हल : $|A| = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a-b \end{vmatrix} = (a + b)\,(a - b) - b \times a = a^2 - b^2 - ab$

टिप्पणी: 1. एकांक आव्यूह I का सारणिक 1 होता है।

2. एक वर्ग आव्यूह जिसका सारणिक शून्य होता है, अव्युत्क्रमणीय (Singular) आव्यूह कहलाता है।

21.5 कोटि 3 के सारणिक का मान

खण्ड 21.4 में हमने लिखा है कि

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

जिस का आगे इस प्रकार विस्तार किया जा सकता है :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

हम देखते हैं कि विस्तार की उपरोक्त विधि में, हम प्रथम पंक्ति के प्रत्येक अवयव को, कोटि 2 के उस सारणिक से गुणा करते हैं जो उस पंक्ति तथा स्तम्भ को हटाने पर प्राप्त होता है जिसमें वह अवयव है।

ध्यान दीजिए कि अवयव a_{11}, a_{12}, a_{13} को क्रमशः धनात्मक, ऋणात्मक तथा धनात्मक चिह्न दिए गए हैं। दूसरे शब्दों में उन्हें धनात्मक चिह्न से आरम्भ कर एकान्तरतः धनात्मक तथा ऋणात्मक चिह्न देते हैं। यदि अवयव के पादांकों का योग समसंख्या हो, तो हम धनात्मक चिह्न लगाते हैं तथा यदि विषम संख्या हो, तो हम ऋणात्मक चिह्न लगाते हैं। इसलिए a_{11} को धनात्मक चिह्न दिया गया है।

टिप्पणीः हम सारणिक का विस्तार उसकी किसी भी पंक्ति या स्तम्भ द्वारा कर सकते हैं। सारणिक का वही मान होगा चाहे हम उसका विस्तार प्रथम पंक्ति या प्रथम स्तम्भ अथवा किसी अन्य पंक्ति या स्तम्भ द्वारा करें। हमें केवल यह ध्यान रखना है कि ऊपर दिए गए नियम के अनुसार चिह्न लगाने हैं।

उदाहरण 21.5. निम्न सारणिक का विस्तार प्रथम पंक्ति के प्रयोग द्वारा कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

हल : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 \times (20 - 2) - 2 \times (10 - 3) + 3 \times (4 - 12) = 18 - 14 - 24 = -20$

उदाहरण 21.6. निम्न सारणिक का विस्तार दूसरे स्तम्भ के प्रयोग द्वारा कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

हलः $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= -2 \times (3 - 4) + 1 \times (1 - 6) - 3 \times (2 - 9)$

$= 2 - 5 + 21$

$= 18$

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 21.1

1. |A| ज्ञात कीजिए यदि

(a) $A = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 5 \\ 2 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha+\cos\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}$

2. ज्ञात कीजिए कि निम्न में से कौन–कौन से आव्यूह अव्युत्क्रमणीय हैं :

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

3. निम्न में से प्रत्येक सारणिक का प्रथम पंक्ति से विस्तार कीजिए :

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

21.6 उपसारणिक तथा सहखण्ड

21.6.1 |A| में अवयव a_{ij} का उपसारणिक

किसी सारणिक के प्रत्येक अवयव के संगत एक संख्या होती है जिसे उस अवयव का उपसारणिक कहते हैं। किसी सारणिक का **उपसारणिक** वह संख्या है जो उस अवयव की पंक्ति तथा स्तम्भ को छोड़ने पर (जिसमें वह अवयव आता है) शेष सारणिक का मान होता है इस प्रकार |A| में किसी अवयव a_{ij} का उपसारणिक उस सारणिक का वह मान है जो उसकी iवीं पंक्ति तथा jवें स्तम्भ को हटाकर प्राप्त होता है। aij के उपसारणिक को M_{ij}. द्वारा निरूपित किया जाता है। उदाहरणार्थ सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ में 3 का उपसारणिक 7 है।

उदाहरण 21.7. निम्नलिखित सारणिक के अवयवों के उपसारणिक ज्ञात कीजिए :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

हल : मान लीजिए कि a_{ij} का उपसारणिक M_{ij}. द्वारा निरूपित होता है। अब a_{11} प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का अवयव है। अतः a_{11} का उपसारणिक ज्ञात करने के लिए हमें |A| की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ को छोड़ना होगा।

a_{11} के उपसारणिक M_{11} का मान नीचे दिया गया है:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

इसी प्रकार a_{12} के उपसारणिक M_{12} का मान है :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \text{ ; इसी प्रकार, } M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} \text{ ; } \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

इसी प्रकार हम M_{31}, M_{32} तथा M_{33} ज्ञात कर सकते हैं।

21.6.2 |A| में a_{ij} के सहखण्ड

|A| के किसी अवयव a_{ij} का सहखण्ड, इसके उपसारणिक M_{ij} को $(-1)^{i+j}$ द्वारा गुणा करने पर प्राप्त होता है। इसे प्रायः C_{ij} द्वारा व्यक्त किया जाता है।

अतः a_{ij} का सहखण्ड $= C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

उदाहरण 21.8. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ में अवयवों a_{11}, a_{12} तथा a_{21} के सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : किसी अवयव a_{ij} का सहखण्ड $(-1)^{i+j} M_{ij}$ होता है।

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}) = (a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23})$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -(a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23}) = (a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33})$$

तथा $$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = (a_{32}\, a_{13} - a_{12}\, a_{33})$$

उदाहरण 21.9. नीचे दिये गए सारणिक में, दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड ज्ञात कीजिए:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

हल: दूसरी पंक्ति के अवयव हैं : $a_{21}=5$; $a_{22}=2$; $a_{23}=4$.

a_{21} अर्थात् 5 का उपसारणिक $M_{21} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 0 = 48$

a_{22} अर्थात् 2 का उपसारणिक $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$

तथा a_{23} अर्थात् 4 का उपसारणिक $= \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 42 = -42$ संगत सहखण्ड हैं :

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -(48) = -48 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = +(-13) = -13$$

तथा $$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -(-42) = 42$$

देखें आपने कितना सीखा 21.2

1. सारणिक की दूसरी पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$$

2. सारणिक के तीसरे स्तम्भ के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. सहखण्डों के उपयोग द्वारा निम्न में से प्रत्येक सारणिक का मान ज्ञात कीजिए:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

4. निम्नलिखित समीकरणों को x के लिये हल कीजिए :

(a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$

21.7 सारणिक के गुण

अब हम सारणिक के गुणों की चर्चा करेंगे। ये गुण सारणिक का मान ज्ञात करने में उपयोगी सिद्ध होते हैं।

गुण 1 : किसी सारणिक की पंक्तियों तथा स्तम्भों को परस्पर बदलने देने से सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

प्रथम स्तम्भ से सारणिक का विस्तार करने पर हम प्राप्त करते है:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 2\,(3-0) - 0\,(1-6) + 4\,(0+9) = 6 + 36 = 42$$

मान लीजिए कि Δ' वह सारणिक है जो Δ की पंक्तियों तथा स्तम्भों को परस्पर परिवर्तित करने से प्राप्त होता है। तब

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

ध्यान दीजिए कि किसी सारणिक का विस्तारित रूप किसी भी पंक्ति या स्तम्भ का उपयोग करके हल किया जा सकता है।

अतः Δ' का स्तम्भ 2 अर्थात C_2 द्वारा विस्तार करने पर

$$(-)\,0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-)\,0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + (-3)\,(-2-12) + 0 = 42$$

अतः हम पाते हैं कि $\Delta = \Delta'$

गुण 2 : यदि किसी सारणिक की दो संलग्न पंक्तियों या दो संलग्न स्तम्भों को परस्पर बदल दें, तो सारणिक के मान का चिह्न बदल जाता है परन्तु उसका वास्तविक मान नहीं बदलता।

मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

सारणिक का प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(4-3) - 3\,(2-9) + 1\,(1-6) = 2 + 21 - 5 = 18$$

माना C_1 तथा C_2 को परस्पर बदलने पर सारणिक Δ' प्राप्त होता है

तब, $\Delta' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

सारणिक Δ' का विस्तार प्रथम पंक्ति से करने पर,

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\,(2-9) - 2(4-3) + 1(6-1) = -21 - 2 + 5 = -18$$

अतः हम देखते हैं कि $\Delta' = -\Delta$

उपप्रमेय यदि किसी सारणिक में कोई पंक्ति (या स्तम्भ) उस सारणिक की n पंक्तियों (या स्तम्भों) को पार करता है तो परिणामी सारणिक Δ' का मान $\Delta' = (-1)^n\,\Delta$ होगा।

उदाहरणार्थ
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\,(10-24) - 3\,(2-0) + 5(4)$$
$$= -28 - 6 + 20 = -14$$

गुण 3 : यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ (या स्तम्भ) समान हों, तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ एक दिया गया सारणिक है।

आइए प्रथम और दूसरे स्तम्भ को परस्पर बदल कर एक नया सारणिक Δ' प्राप्त करें

$$\therefore \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

परन्तु प्रमेय–2 द्वारा सारणिक का चिह्न बदल जाता है यदि उसकी दो संलग्न पंक्तियों (या स्तम्भों) को परस्पर बदल दिया जाए।

$$\therefore \Delta' = -\Delta$$

इस प्रकार हम देखते है कि $\Delta = -\Delta$

या $\qquad 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

अतः यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ (या स्तम्भ) समान हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

गुण 4 : किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव को यदि किसी स्थिरांक $k \neq 0$ से गुणा किया जाए तो सारणिक का मान k गुणा हो जाता है।

माना $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

पहली पंक्ति द्वारा विस्तार करने पर,

$$\Delta = 2(3-0) - 1\,(0-0) + (-5)\,(0+12) = 6 - 60 = -54$$

अब हम तीसरे स्तम्भ को 4 से गुणा करते हैं। माना नया सारणिक Δ' है।

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -20 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

Δ' का प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर,

$$\Delta' = 2\,(12-0) - 1\,(0-0) + (-20)\,(0+12)$$
$$= 24 - 240 = -216 = 4 \times (-54) = 4\,\Delta$$

उपप्रमेयः यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियां (या स्तम्भ) समानुपाती हों, तो उस का मान शून्य होता है।

उपपत्तिमाना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3 \end{vmatrix}$

यहां पर तीसरे स्तम्भ के अवयव पहले स्तम्भ के संगत अवयवों का k गुना हैं

गुण 4 द्वारा, $\Delta = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$

$= k \times 0$ (गुण 3 द्वारा)

$= 0$

गुण 5 : यदि किसी सारणिक की कोई पंक्ति या स्तम्भ दो या अधिक पदों के रूप में हो तो उस सारणिक को उसी कोटि के दो या अधिक सारणिकों के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

उपपत्तिः माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1+\alpha & b_1+\beta & c_1+\gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तो प्रथम पंक्ति से विस्तृत करने पर

$$\Delta = (a_1+\alpha)(b_2c_3-b_3c_2)-(b_1+\beta)(a_2c_3-a_3c_2)+(c_1+\gamma)(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)+\alpha(b_2c_3-b_3c_2)$$

$$-\beta(a_2c_3-a_3c_2)+\gamma(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

अतः सारणिक Δ को उसी कोटि के दो सारणिकों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

गुण 6 : यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव में किसी दूसरी पंक्ति (या स्तम्भ) के संगत अवयव का k गुणा जोड़ दिया जाय तो सारणिक का मान नहीं बदलता।

उपपत्ति मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

R_1 के प्रत्येक अवयव में, R_3 का k गुणा संगत अवयव जोड़ने पर अर्थात $R_1 \to R_1 + kR_3$

मान लीजिए कि $\Delta' = \begin{vmatrix} a_1+ka_3 & b_1+kb_3 & c_1+kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तब $\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_3 & kb_3 & kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

या $$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

या $\Delta' = \Delta + k \times 0$ (क्योंकि पंक्ति 1 और पंक्ति 3 समान हैं।)

$\therefore$ $\Delta' = \Delta$

21.8 गुणों के प्रयोग द्वारा सारणिक का मान

अब हम उपर्युक्त गुणों के प्रयोग से एक सारिणक का सुविधा पूर्वक मान ज्ञात करने की स्थिति में हैं। किसी सारणिक को सरलतम रूप में लाने का अभिप्राय किसी पंक्ति (या स्तम्भ) में उपरोक्त प्रमेयों का उपयोग करके अधिक से अधिक अवयवों को शून्य बनाने से है। फिर उस पंक्ति (या स्तम्भ) द्वारा सारणिक का विस्तार करते हैं। हम सांकेतिक भाषा में प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय पंक्ति को R_1, R_2, तथा R_3 से तथा स्तम्भों को C_1, C_2 तथा C_3 से निरूपित करते हैं।

उदाहरण 21.10. दर्शाइये कि $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$ जबकि w संख्या 1 का अवास्तविक घनमूल है।

हल : मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$

प्रथम स्तम्भ के अवयवों में दूसरे तथा तीसरे स्तम्भों के अवयवों का योग, करने पर अर्थात् क्रिया $C_1 \to C_1 + (C_2 + C_3)$ करने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega+\omega^2+1 & \omega^2 & 1 \\ \omega^2+1+\omega & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0 \qquad (\because\ 1+w+w^2 = 0)$$

उदाहरण 21.11. दर्शाइये कि $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

हल: $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-c & bc-ab \\ 0 & b-c & ca-ab \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - R_3 \text{ तथा } R_2 \to R_2 - R_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a-c & b(c-a) \\ 0 & b-c & a(c-b) \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -b \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

C_1 द्वारा विस्तार करने पर

$$\Delta = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & -a \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

उदाहरण 21.12. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4\,abc$

हल: $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)]$

R_1 द्वारा विस्तार करने पर

$$= 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - 2b\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2c\,[b(a+b) - bc] - 2b[bc - c(c+a)]$$

$$= 2bc\,[a+b-c] - 2bc[b-c-a]$$

$$= 2bc\,[(a+b-c) - (b-c-a)]$$

$$= 2bc\,[a+b-c-b+c+a] = 4abc$$

उदाहरण 21.13. मान ज्ञात कीजिए: $\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

हल : $\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$

$= 0,$ (C_1 द्वारा विस्तार करने पर)

उदाहरण 21.14. सिद्ध कीजिए कि: $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

हल: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & bc & bc+ab+ac \\ 1 & ca & ca+bc+ba \\ 1 & ab & ab+ca+cb \end{vmatrix} \quad [C_3 \to C_2 + C_3]$

$$= (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & ca & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (ab+bc+ca) \times 0 \qquad \text{(गुण 3 द्वारा)}$$

$$= 0$$

उदाहरण 21.15. दर्शाइये कि $\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

हल : $\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}$

$$= abc\begin{vmatrix} -a & b & c \\ 0 & 0 & 2c \\ 0 & 2b & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{bmatrix} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{bmatrix}$$

$$= abc(-a)\begin{vmatrix} 0 & 2c \\ 2b & 0 \end{vmatrix} \qquad (C_1 \text{ द्वारा विस्तार करने पर})$$

$$= abc(-a)(-4bc)$$

$$= 4a^2b^2c^2$$

उदाहरण 21.16. दर्शाइये कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2\,(a+3)$

हल : $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 \\ a+3 & 1+a & 1 \\ a+3 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \qquad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{bmatrix}$$

$$= (a+3) \times (1)\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)(a^2)$$

$$= a^2(a+3)$$

देखें आपने कितना सीखा 21.3

1. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} x+3 & x & x \\ x & x+3 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 27\,(x+1)$

2. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

3. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = bc+ca+ab+abc$

4. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix} = 9b^2\,(a+b)$

5. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} (a+1)(a+2) & a+2 & 1 \\ (a+2)(a+3) & a+3 & 1 \\ (a+3)(a+4) & a+4 & 1 \end{vmatrix} = -2$

6. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

7. मान ज्ञात कीजिए :

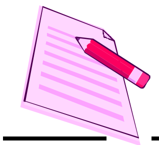
(a) $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

8. x के लिये हल कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & x \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

21.11 सारणिक के अनुप्रयोग

सारणिक को त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये प्रयोग किया जाता है।



21.11.1 त्रिभुज का क्षेत्रफल

हम जानते हैं एक ऐसे त्रिभुज ABC जिसके शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हो, का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \qquad ...(i)$$

तथा, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$

$= x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)$ [स्तंभ C_1 के साथ प्रसार का करने पर]

$$= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \qquad ...(ii)$$

समीकरण (*i*) तथा (*ii*) से,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

अतः किसी त्रिभुज, जिसके शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हों, तो उसका क्षेत्रफल

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

21.11.2 तीन बिन्दुओं का संरेख प्रतिबन्ध

माना $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ तीन बिन्दु हैं। तब

A, B, C संरेख होंगे जब, ΔABC का क्षेत्रफल शून्य हो

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

21.11.3 दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण

माना दो बिन्दु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ और $R(x, y)$ P तथा Q को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित हैं। तब P, Q तथा R संरेख होंगे

$$\therefore \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

अतः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कर सकते हैं,

$$\text{इस प्रकार } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

उदाहरण 21.17. ΔPQR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि इसके शीर्ष P(5, 4), Q(–2, 4) तथा R(2, –6) हैं।

हल : माना A, त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल है

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[5(4-(-6))-4(-2-2)+1(12-8)]$$

$$= \frac{1}{2}[50+16+4] = \frac{1}{2}(70) = 35 \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 21.18. दर्शाइए कि बिन्दु (a, b + c), (b, c + a) तथा (c, a + b) संरेख हैं।

हल: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b+c & 1 \\ b & b+c+a & 1 \\ c & c+a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a + b + c) \times 0 = 0$

अतः दिये गये बिन्दु संरेख हैं।

उदाहरण 21.19. सारणिकों का प्रयोग करते हुए, A(1, 3) तथा B(2, 1) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : माना P(x, y) इन दोनों बिन्दुओं A(1, 3) तथा B(2, 1) को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित है। तब

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad x\,(3 - 1) - y\,(1 - 2) + 1\,(1 - 6) = 0 \Rightarrow \quad 2x + y - 5 = 0$

यह AB का समीकरण है।

देखें आपने कितना सीखा 21.4

1. ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ इसके शीर्ष A (3, 8), B (–4, 2) तथा (5, –1) हैं।
2. दर्शाइए कि बिन्दु A(5, 5), B(–5, 1) तथा C(10, 7) संरेख है।
3. सारणिकों का प्रयोग करते हुए, बिन्दु (1, 2) तथा (3, 6) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

आइये दोहराएँ

- व्यंजक $a_1b_2 - a_2b_1$ को $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।
- प्रत्येक वर्ग आव्यूह के साथ आव्यूह के एक सारणिक को सम्बद्ध किया जा सकता है।

- किसी एक सारणिक में एक अवयव का उपसारणिक, दिए गए सारणिक से अवयव वाले स्तम्भ तथा पंक्ति को हटा कर प्राप्त किया जाता है।
- सारणिक में अवयव a_{ij} का सहखण्ड, a_{ij} के उपसारणिक को $(-1)^{i+j}$ द्वारा गुणा करके प्राप्त किया जाता है।
- किसी सारणिक का विस्तार किसी भी पंक्ति या स्तम्भ के द्वारा किया जा सकता है। सारणिक का मान एक ही रहता है।
- एक वर्ग आव्यूह जिसका सारणिक शून्य होता है, *अव्युत्क्रमणीय आव्यूह* कहलाता है।
- यदि किसी एक सारणिक की पंक्तियों तथा स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाए तो सारणिक का मान वही रहता है।
- यदि किसी सारणिक की दो आसन्न पंक्तियों (या स्तम्भों) को आपस में बदल दिया जाए, तो सारणिक के मान में चिह्न का ही अन्तर पड़ता है।
- यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ (स्तम्भ) समान हों, तो सारणिक का मान शून्य होता है।
- यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति (स्तम्भ) के अवयवों को एक स्थिरांक से गुणा किया जाए, तो सारणिक का मान भी उस स्थिरांक से गुणा हो जाता है।
- यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ (स्तम्भ) समानुपाती हों, तो इसका मान शून्य होता है।
- यदि किसी सारणिक की कोई पंक्ति या स्तम्भ दो या अधिक पदों के रूप में हो, तो उस सारणिक को उसी कोटि के दो या अधिक सारणिकों के येाग के रूप में लिखा जा सकता है।
- यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव में किसी दूसरी पंक्ति (या स्तम्भ) संगत के अवयवों का k गुणा जोड़ दिया जाए, तो सारणिक का मान नहीं बदलता।
- किसी आव्यूह तथा इसके व्युत्क्रम का गुणनफल उसी कोटि का इकाई आव्यूह होता है।
- किसी आव्यूह का व्युत्क्रम एक अद्वितीय आव्यूह होता है।
- आवश्यक नहीं कि सभी आव्यूह व्युत्क्रमणीय हों।
- कोई तीन बिन्दु तभी संरेख होंगे, जब इन बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्राफल शून्य हो।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi?c=det*
- *http://mathworld.wolfram.com/Determinant.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Determinant*
- *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html*
- *https://www.youtube.com/watch?v=kThkOjhbtWY*

आइए अभ्यास करें

1. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ के सभी उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

2. प्रथम स्तम्भ द्वारा सारणिक $\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ का विस्तार करके इसका मान ज्ञात कीजिए।

3. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. x के लिए हल कीजिए यदि $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

5. सारणिकों के गुणों का उपयोग करके दर्शाइये कि :

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & x+y & x^2+y^2 \\ 1 & y+z & y^2+z^2 \\ 1 & z+x & z^2+x^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

6. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^5 \\ \omega^3 & 1 & \omega^4 \\ \omega^5 & \omega^5 & 1 \end{vmatrix}$ जबकि ω संख्या 1 का काल्पनिक घनमूल है।

7. उन त्रिभुज के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनके शीर्ष निम्न बिन्दु हैं :

   (i) (2, 7), (1, 1) तथा (10, 8) (ii) $(-1,-8), (-2,-3)$ तथा $(3,2)$

   (ii) (0, 0) (6, 0) तथा (4, 3) (iv) (1, 4), (2, 3) तथा (–5, –3)

8. सारणिक का प्रयोग करते हुये 'k' का मान ज्ञात कीजिए जिससे तीनों बिन्दु संरेख हों

   (i) $(k, 2-2k), (-k+1, 2k)$ तथा $(-4-k, 6-2k)$

   (ii) $(k,-2), (5,2)$ तथा $(6,8)$ (iii) $(3,-2), (k,2)$ तथा $(8,8)$ (iv) $(1,-5), (-4,5), (k,7)$

9. सारणिक का प्रयोग हुये, निम्न बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

   (i) (1, 2) तथा (3, 6) (ii) (3, 1) तथा (9, 3)

10. यदि बिन्दु (a, 0), (0, b) तथा (1, 1) संरेख हों, तो सारणिक का प्रयोग करते हुये, दर्शाइए $ab = a + b$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 21.1

1. (a) 11 (b) 1 (c) 0 (d) $(a^2+b^2)-(c^2+d^2)$
2. (a) तथा (d)
3. (a) 18 (b) −54 (c) $adf + 2bce - ae^2 - fb^2 - dc^2$
   (d) $x-1$

देखें आपने कितना सीखा 21.2

1. $M_{21} = 39;\ C_{21} = -39$
   $M_{22} = 3;\ C_{22} = 3$
   $M_{23} = -11;\ C_{23} = 11$
2. $M_{13} = -5;\ C_{13} = -5$
   $M_{23} = -7;\ C_{23} = 7$
   $M_{33} = 1;\ C_{33} = 1$
3. (a) 19 (b) 0 (c) –131 (d) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (e) $4abc$ (f) 0
4. (a) $x = 2$ (b) $x = 2, 3$ (c) $x = 2, -\frac{17}{7}$

देखें आपने कितना सीखा 21.3

7. (a) a^3 (b) $2abc(a+b+c)^3$
8. $x = \frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 21.4

1. $\frac{75}{2}$ वर्ग इकाई 3. y = 2x

आइए अभ्यास करें

1. $M_{11} = -2,\ M_{12} = -1,\ M_{13} = 1,\ M_{21} = -7,\ M_{22} = -5,\ M_{23} = -1,$
   $M_{31} = -8,\ M_{32} = -7,\ M_{33} = -2$
   $C_{11} = -2,\ C_{12} = 1,\ C_{13} = 1,\ C_{21} = 7,\ C_{22} = -5,\ C_{23} = 1,$
   $C_{31} = -8,\ C_{32} = 7,\ C_{33} = -2$
2. 0
3. –31
4. $x = 0,\ x = 1$
6. (a) –8 (b) 0
7. (*i*) $\frac{45}{2}$ वर्ग इकाई (*ii*) 5 वर्ग इकाई (*iii*) 9 वर्ग इकाई (*iv*) $\frac{15}{2}$ वर्ग इकाई
8. (*i*) $k = -1, \frac{1}{2}$ (*ii*) $k = \frac{13}{3}$ (*iii*) $k = 5$ (*iv*) $k = -5$
9. (*i*) $y = 2x$ (ii) $x = 3y$