311hi32

32

अवकल समीकरण

अवकलन तथा समाकलन की संकल्पना पढ़ लेने के बाद हमारे सामने प्रश्न है कि उनका प्रयोग कहां किया जाए।

वास्तव में ये वे साधन हैं जो सही–सही प्रारम्भिक चाल, प्रक्षेप कोण, आवश्यक प्रणोद तथा आन्तरिक्ष प्रमोचन में अन्य सम्बंधित विशिष्टताओं को ज्ञात करने में हमारी सहायता करते हैं।

केवल यहीं नहीं, बल्कि भौतिकी तथा जीव विज्ञान में कुछ प्रश्नों में हमें ऐसे सम्बन्ध मिलते हैं जो अवकलज से सम्बद्ध होते हैं।

एक ऐसा सम्बन्ध $\frac{ds}{dt} = 4.9\ t^2$ हो सकता है जहां s दूरी है, t समय है, अतः, $\frac{ds}{dt}$, समय t पर वेग (दूरी के परिवर्तन की दर) निरूपित करता है।

ऐसे समीकरणों को, जिनके पद अवकलज सम्बद्ध होते हैं, अवकल समीकरण कहते हैं। इस पाठ में हम, ऐसे समीकरणों के हल तथा उन के प्रयोग पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- अवकल समीकरण, इसकी कोटि तथा घात को परिभाषित कर सकना
- अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात कर सकना
- दी गई स्थिति से अवकल समीकरण बना सकना
- उदाहरण द्वारा अवकल समीकरण के व्यापक हल तथा विशिष्ट हल के अर्थ की व्याख्या कर सकना
- निम्न प्रकार के अवकल समीकरणों को हल कर सकना

  (i) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ (ii) $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$

  (iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ (iv) $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$
- दिए हुए सीमा प्रतिबन्धों के लिए, दिए हुए अवकल समीकरण के विशिष्ट हल ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- बीजीय फलनों, परिमेय फलनों तथा त्रिकोणमितीय फलनों का समाकलन

32.1 अवकल समीकरण

जैसा कि भूमिका में वर्णन किया गया है कि भौतिकी, जीव विज्ञान तथा समाजशास्त्र के प्रश्नों को गणितीय पदों में जब सूत्रण किया जाता है तो ऐसे समीकरण बनते हैं जो अवकलज सम्बद्ध होते हैं। ऐसे समीकरणों को अवकल समीकरण कहते हैं। उदाहरणार्थ,

(i) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (iii) $xdx + ydy = 0$

(iv) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ (vi) $y = \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

32.2 अवकल समीकरण की कोटि (क्रम) तथा घात

कोटि : अवकल समीकरण की कोटि उस समीकरण में आने वाले सबसे बड़े अवकलज की कोटि होती है।

घात : यह अवकल समीकरण में सबसे बड़ी कोटि वाले अवकलज की घात होती है।

उदाहरणार्थ,

	अवकल समीकरण	क्रम (कोटि)	घात
(i)	$\frac{dy}{dx} = \sin x$	एक	एक
(ii)	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3y^2 = 5x$	एक	दो
(iii)	$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + t^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 = 0$	दो	दो
(iv)	$\frac{d^3v}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0$	तीन	एक
(v)	$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + x^3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^5 = \sin x$	चार	दो

उदाहरण 32.1. निम्न अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0$$

हल : दिया है, $$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0$$

i.e. $$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

अत: अवकल समीकरण का क्रम दो है तथा घात एक हैं।

टिप्पणी: अवकल समीकरण की घात तभी परिभाषित होती है यदि वह समीकरण अवकलजों के संदर्भ में एक बहुपद समीकरण है।

32.3 रैखिक तथा अरैखिक अवकल समीकरण

ऐसे अवकल समीकरण को जिस में आश्रित चर तथा उस के सभी अवकलज की घात एक है और उनका परस्पर गुणा भी नहीं है, रैखिक अवकल समीकरण कहते हैं। जो अवकल समीकरण रैखिक नहीं हैं वे अरैखिक समीकरण कहलाते हैं।

उदाहरणार्थ, अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \text{ तथा } \cos^2 x \frac{d^3y}{dx^3} + x^3 \frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ रैखिक हैं।}$$

अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{x} = \log x$ अरैखिक है क्योंकि $\frac{dy}{dx}$ की घात दो है।

पुन:, अवकल समीकरण $y\frac{d^2y}{dx^2} - 4 = x$ रैखिक नहीं हैं क्योंकि आश्रित चर y तथा इसके अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ का परस्पर गुणा है।

32.4 अवकल समीकरण बनाना

मूल बिन्दु से जाने वाली सभी सरल रेखाओं के परिवार पर विचार कीजिए (चित्र 32.1)

रेखाओं के परिवार को

$$y = mx \qquad .....(1)$$

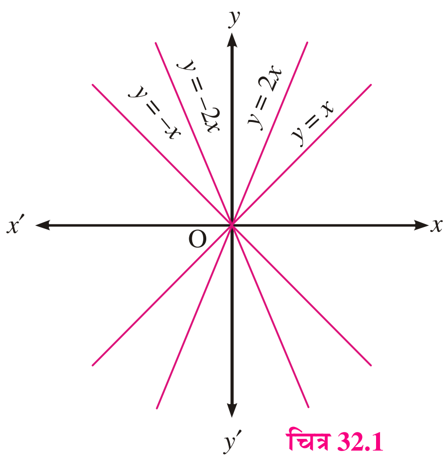
से प्रदर्शित किया जा सकता है।

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = m \qquad .....(2)$$

(1) तथा (2) से हमें, प्राप्त हुआ

$$y = x\frac{dy}{dx} \qquad .....(3)$$



चित्र 32.1

अतः $y = mx$ तथा $y = x\frac{dy}{dx}$ एक ही परिवार को प्रदर्शित करते हैं।

स्पष्टतः, समीकरण (3) एक अवकल समीकरण है।

कार्यकारी नियम: एक समीकरण जिसमें दो चर x तथा y हैं तथा कुछ स्वैच्छिक अचर जैसे a,b,c इत्यादि हैं, के संगत अवकल समीकरण बनाना।

(i) समीकरण को उतनी बार अवकलित करें जितनी संख्या स्वैच्छिक अचरों की उस में है।

(ii) इन समीकरणों से स्वैच्छिक अचरों का विलोपन करें।

टिप्पणी: यदि समीकरण में n स्वैच्छिक अचर हैं तो हमें एक n कोटि का अवकल समीकरण प्राप्त होगा।

उदाहरण 32.2. वक्रों के कुल को प्रदर्शित करने वाले समीकरण $y = ax^2 + .bx$ का अवकल समीकरण बनाइये।

हल : $$y = ax^2 + bx \qquad ......(1)$$

दोनों पक्षों को अवकलित करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 2\,ax + b \qquad ......(2)$$

(2) को पुनः अवकलित करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,a \qquad ......(3)$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad ......(4)$$

(समीकरण में दो स्वैच्छिक अचर हैं, अतः हमने, इस समीकरण को दो बार अवकलित किया है और अब 'a' और 'b' का विलोपन करना है)

'a' का मान समीकरण (2) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d^2y}{dx^2} + b$$

$$\Rightarrow \qquad b = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}$$

'a' और 'b' के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = x^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

या $$y = \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

या $$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

या $$\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

उदाहरण 32.3. वक्रों के कुल को प्रदर्शित करने वाले समीकरण $y = a\cos(x+b)$ का अवकल समीकरण बनाइये।

हल : $$y = a\cos(x+b) \quad .....(1)$$

दोनों पक्षों को अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(x+b) \quad ....(2)$$

पुनः अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) \quad ....(3)$$

(1) और (3) से, $$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

अर्थात् $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$ प्राप्त हुआ।

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

उदाहरण 32.4. उन सभी वृत्तों का, जो मूल बिन्दु से होकर जाते हैं तथा जिनके केन्द्र x-अक्ष पर हैं, अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि वृत्तों के केन्द्र x-अक्ष पर हैं, अतः इस केन्द्र का निर्देशांक (a, 0) होगा।
क्योंकि वृत्त मूल बिन्दु से होकर जाते हैं, अतः त्रिज्या a है।

तब समीकरण $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ होगा। (1)

संगत अवकल समीकरण ज्ञात करने के लिए, हम समीकरण (1) को अवकलित करते हैं और हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2(x-a) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $$x - a + y\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $$a = y\frac{dy}{dx} + x$$

समीकरण (1) में 'a' का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\left(x - y\frac{dy}{dx} - x\right)^2 + y^2 = \left(y\frac{dy}{dx} + x\right)^2$$

अथवा $$\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = x^2 + \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$$

अथवा $$y^2 = x^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

टिप्पणी: यदि समीकरण में एक स्वैच्छिक अचर है, तो संगत अवकल समीकरण प्रथम क्रम का है तथा यदि समीकरण में दो स्वैच्छिक अचर हैं तो संगत अवकल समीकरण का क्रम दो है।

देखें आपने कितना सीखा 32.1

1. अवकल समीकरण $y = x\frac{dy}{dx} + 1$ की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए।

2. निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि तथा घात लिखिये :

   (a) $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ (b) $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 4 = 0$

3. बताइए कि निम्नलिखित अवकल समीकरण रैखिक है अथवा अरैखिक :

   (a) $\left(xy^2 - x\right)dx + \left(y - x^2y\right)dy = 0$ (b) $dx + dy = 0$

   (c) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (d) $\frac{dy}{dx} + \sin^2 y = 0$

4. 'a' तथा 'b' का विलोपन करके $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ का संगत अवकल समीकरण बनाइए।

5. (a) $y^2 = m\left(a^2 - x^2\right)$ का संगत अवकल समीकण बनाइए।

   (b) $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ का संगत अवकल समीकरण बनाइए, जबकि a स्वैच्छिक अचर है।

   (c) वक्रों के परिवार $y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ के संगत अवकल समीकरण बनाइए जहां A तथा B स्वैच्छिक अचर हैं।

   (d) उन सभी सरल रेखाओं का अवकल समीकरण बनाइए जो (3, 2) से होकर जाती हैं।

   (e) उन सभी वृत्तों का अवकल समीकरण बनाइए जो मूल बिन्दु से होकर जाते हैं तथा जिनके केन्द्र y-अक्ष स्थित पर हैं।

32.5 व्यापक तथा विशिष्ट हल

अवकल समीकरण का हल प्रतिलोम प्रक्रिया है। यहाँ हम ऐसा समीकरण प्राप्त करने का प्रयत्न करते हैं, जिसका अवकलन करने पर तथा अचरों का विलोपन करने पर हमें दी गई अवकल समीकरण प्राप्त हो। इस प्रकार प्राप्त समीकरण को **आद्य** या अवकल समीकरण का **हल** करते हैं।

टिप्पणी

1. यदि हम आद्य को अवकलित करते हैं तो हमें अवकल समीकरण प्राप्त होता है। यदि हम अवकल समीकरण का समाकलन करते हैं तो हमें आद्य प्राप्त होता है।
2. अवकल समीकरण का हल अवकल समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

उदाहरण 32.5. दर्शाइए कि $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल है जहां C_1 तथा C_2 स्वैच्छिक अचर है।

हल : $$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \qquad .....(1)$$

(1) को अवकलित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cos x - C_2 \sin x \qquad .....(2)$$

पुनः अवकलित करने पर हमें

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

दिये गये अवकल समीकरण में $\frac{d^2y}{dx^2}$ तथा y का मान प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + (-C_1 \sin x - C_2 \cos x)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

समाकलन में स्वैच्छिक अचरों का महत्वपूर्ण स्थान है। अचरों के भिन्न मानों के लिए अवकल समीकरण के भिन्न हल हमें प्राप्त होते हैं। जिस हल में अवकल समीकरण की कोटि के समान स्वैच्छिक अचर रहते हैं उसे **व्यापक हल** कहते हैं।

यदि हम अचरों को विशिष्ट मान देते हैं, तो हल **विशिष्ट हल** कहलाता है।

टिप्पणी: व्यापक हल में स्वैच्छिक अचरों की संख्या अवकल समीकरण की कोटि के बराबर होती है।

उदाहरण 32.6. दर्शाइए कि $y = cx + \frac{a}{c}$ (जहां c अचर है) अवकल समीकरण $y = x\frac{dy}{dx} + a\frac{dx}{dy}$ का एक हल है।

हल : दिया है $y = cx + \frac{a}{c}$ .....(1)

(1) का अवकलन करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{c}$$

अवकल समीकरण के दाएँ पक्ष में $\frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{dx}{dy}$ का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$x(c) + a\left(\frac{1}{c}\right) = cx + \frac{a}{c} = y$$

अर्थात् दायाँ पक्ष = बायाँ पक्ष

अतः दिए गए अवकल समीकरण का $y = cx + \frac{a}{c}$ एक हल है।

उदाहरण 32.7. यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - 6x = 0$ का व्यापक हल $y = 3x^2 + c$ है तो विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जब $y = 3$ तब $x = 2$ हो।

हल : अवकल समीकरण का व्यापक हल $y = 3x^2 + c$ है,

अब इस समीकरण में $y = 3, x = 2$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$3 = 12 + c \text{ अथवा } c = -9$$

c का मान व्यापक हल में रखने पर हमें प्राप्त होता है:

$$y = 3x^2 - 9$$

यही अभीष्ट विशिष्ट हल है।

32.6 अवकल समीकरण को हल करने की विधियाँ

32.6.1 जब चरों को पृथक किया जा सके

(i) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ प्रकार के अवकल समीकरण

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ अथवा $dy = f(x)\,dx$ प्रकार के अवकल समीकरण पर विचार करें।

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त हुआ

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$

या

$$y = \int f(x)\,dx + c$$

जहां c स्वैच्छिक अचर है। यही दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

टिप्पणी: व्यापक हल में c का लिखना आवश्यक है, अन्यथा यह विशिष्ट हल बन जायेगा।

उदाहरण 32.8. $(x+2)\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 5$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण है : $(x+2)\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 5$

या $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x+2} \qquad$ या $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 4x + 4 - 4 - 5}{x+2}$

या $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+2)^2}{x+2} - \dfrac{9}{x+2} \qquad$ या $\quad \dfrac{dy}{dx} = x + 2 - \dfrac{9}{x+2}$

या $\quad dy = \left(x + 2 - \dfrac{9}{x+2}\right)dx \qquad .....(1)$

(1) के दोनों पक्षों को समाकलित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\int dy = \int\left(x + 2 - \frac{9}{x+2}\right)dx$$

या $\quad y = \dfrac{x^2}{2} + 2x - 9\log|x+2| + c$ जहाँ c स्वैच्छिक अचर है।

यही अभीष्ट व्यापक हल है।

उदाहरण 32.9. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^3 - x$ को हल कीजिए, दिया है कि जब $x = 0$ तो $y = 1$

हल : दिया गया अवकल समीकरण है : $\dfrac{dy}{dx} = 2x^3 - x$

या $\quad dy = \left(2x^3 - x\right)dx \qquad ...(1)$

(1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$\int dy = \int\left(2x^3 - x\right)dx \qquad$ या $\qquad y = 2.\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + c$

या $\quad y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^2}{2} + c$ प्राप्त होता है $\qquad .....(2)$

क्योंकि $y = 1$ तथा $x = 0$

$\therefore$ यदि हम इन मानों को (2) में रखें तो हमें प्राप्त होता है :

$$1 = 0 - 0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 1$$

पुनः c के मानों को (2) में रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$y = \frac{1}{2}\left(x^4 - x^2\right) + 1$$

या $\quad y = \dfrac{1}{2}x^2\left(x^2 - 1\right) + 1$ जो अभीष्ट विशिष्ट हल है।

(ii) $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ **के प्रकार के अवकल समीकरण**

$\frac{dy}{dx} = f\ (x) \cdot g(y)$ या $\frac{dy}{g(y)} = f\ (x)\ dx$ के प्रकार के अवकल समीकरण पर विचार करें।..(1)

समीकरण (1) में x तथा y के पद परस्पर अलग हो जाते हैं। अतः ऐसे समीकरण **चर पृथक्की अवकल समीकरण** कहलाते हैं।

ऐसे अवकल समीकरण को हल करने के लिए हम दोनों तरफ का समाकलन करते हैं तथा एक तरफ स्वैच्छिक अचर जोड देते हैं।

आइए हम कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 32.10. अवकल समीकरण $\left(1+x^2\right)dy = \left(1+y^2\right)dx$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण है, $\left(1+x^2\right)dy = \left(1+y^2\right)dx$ जिसको निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{...(यहाँ चरों को पृथक कर दिया जाता है)} \qquad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों को समाकलित करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

या $\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c$ जहाँ c, स्वैच्छिक अचर है। यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण 32.11. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+1}$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y(0)=3$ अर्थात जब $x=0, y=3$

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण निम्न है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+1}$$

या
$$\left(3y^2+1\right)dy = 2x\,dx \qquad (1)$$

यदि (1) के दोनों पक्षों को समाकलित करें तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\int\left(3y^2+1\right)dy = \int 2x\,dx + c,$$

$$y^3 + y = x^2 + c \qquad \text{जहाँ } c\text{, स्वैच्छिक अचर है।} \qquad (2)$$

यह दिया गया है कि $y(0) = 3$

$y=3$ जब $x=0$, (2) में रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$27 + 3 = c$$

$\therefore \qquad c = 30$

अतः अभीष्ट विशिष्ट हल है

$$y^3 + y = x^2 + 30$$

32.6.2 समघातीय अवकल समीकरण

निम्न अवकल समीकरणों पर विचार करें :

(i) $y^2 + x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$ (ii) $\left(x^3 + y^3\right)dx - 3xy^2dy = 0$ (iii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + xy^2}{y^2x}$

समीकरण (i) में, हम देखते हैं कि प्रत्येक पद की घात 2 है। [जैसे y^2 की घात 2 है, x^2 की घात 2 है तथा xy की घात 1+1=2 है]

समीकरण (ii) में, प्रत्येक पद की घात 3 है।

समीकरण (iii) में, प्रत्येक पद की घात 3 है।

ऐसे समीकरणों को **समघातीय समीकरण** कहा जाता है।

टिप्पणी: समघातीय समीकरण में अचर नहीं होते।

उदाहरण के लिए, अवकल समीकरण $\left(x^2 + 3yx\right)dx - \left(x^3 + x\right)dy = 0$ समघातीय समीकरण नहीं हैं क्योंकि प्रत्येक पद की घात समान नहीं है। x^2 की घात 2 है, $3xy$ की घात 2 है, x^3 की 3 है, x की 1 है।

32.6.3 समघातीय अवकल समीकरण के हल

ऐसे समीकरण के हल के लिए

(i) एक चर y को vx या चर x को vy मान लीजिए जहाँ v भी एक चर है।

(ii) अवकल समीकरण में $y = vx$ (या $x = vy$) लिखिए। और इस प्रकार से प्राप्त अवकल समीकरण पृथक्की अवकल समीकरण हो जायेगा।

(iii) इस समीकरण को अब वैसे ही हल करें जैसे कि आपने पहले हल किया है।

उदाहरण 32.12. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2dy = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण है :

$$\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2dy = 0$$

या

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} \qquad .....(1)$$

यह दो घात का समघातीय समीकरण है। $y = vx$ लिखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$\therefore$ (1) से,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + 3x.vx + (vx)^2}{x^2} \quad \text{या} \quad v + x\frac{dv}{dx} = x^2\left[\frac{1 + 3v + v^2}{x^2}\right]$$

या $$v + x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2 \quad \text{या} \quad x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2 - v$$

या $$x\frac{dv}{dx} = v^2 + 2v + 1 \quad \text{या} \quad \frac{dv}{v^2 + 2v + 1} = \frac{dx}{x}$$

या $$\frac{dv}{(v+1)^2} = \frac{dx}{x} \qquad .....(2)$$

(2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{-1}{v+1} + c = \log|x| \text{ जहाँ } c\text{, स्वैच्छिक अचर है।}$$

इसमें v का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{x}{y+x} + \log|x| = c \text{ जहाँ } c\text{, स्वैच्छिक अचर है।}$$

जो दिए हुए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

टिप्पणी: यदि समघातीय समीकरण को $\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ के रूप में लिखा जाए तो $x = vy$ प्रतिस्थापित करके हल ज्ञात किया जाता है

32.6.4 $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के प्रकार के अवकल समीकरण, जहाँ P तथा Q, केवल x के फलन हैं।

समीकरण $$\frac{dy}{dx} + Py = Q \qquad .....(1)$$

पर विचार करें जहां P तथा Q,x के फलन हैं। यह कोटि एक का रैखिक समीकरण है।

समीकरण (1) को हल करने के लिए हम (1) के दोनों पक्षों को $e^{\int Pdx}$ (जिसे समाकलन गुणक कहा जाता है) से गुणा करते हैं। इस प्रकार हमें निम्न प्राप्त होता है

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + Py\, e^{\int Pdx} = Qe^{\int Pdx}$$

या $$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right) = Qe^{\int Pdx} \qquad .....(2)$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right) = e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + Py.e^{\int Pdx}\right]$$

समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$ye^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} dx + c \qquad .....(3)$$

या
$$y = e^{-\int P dx}\left[\int Q e^{\int P dx} dx + c\right]$$

टिप्पणी 1

$e^{\int Pdx}$ को समीकरण का समाकलन गुणक कहते हैं और संक्षेप में इसे I.F. लिखा जाता है।

टिप्पणी 2

(i) हम ने देखा कि रैखिक अवकल समीकरण (1) का बायाँ पक्ष $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right)$ बन जाता है जब हम इसे $e^{\int P dx}$ से गुणा करते हैं।

(ii) रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ का हल $ye^{\int P dx} = \int Q\left(e^{\int P dx}\right) dx + c$ है जहां P तथा Q केवल x के फलन है।

(iii) यदि $\frac{dy}{dx}$ का गुणांक 1 नहीं है तो समीकरण को इस से भाग देकर गुणांक 1 बना लेना चाहिए।

(iv) कुछ समीकरण ऐसे पाए जाते हैं, जहां y का व्यवहार, स्वतन्त्र चर की तरह और x आश्रित चर की तरह, होता है।

$\frac{dx}{dy} + Px = Q$ रैखिक अवकल समीकरण है जहां P तथा Q केवल y के फलन हैं।

इस स्थिति में, $\text{I.F.} = e^{\int P dy}$

और हल $x(\text{I.F.}) = \int Q.(\text{I.F.})dy + c$ है।

उदाहरण 32.13. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{-x}$ को हल कीजिए।

हल : यहां $P = \frac{1}{x}, Q = e^{-x}$ [देखिये कि P तथा Q दोनों x के फलन हैं।]

समाकलन गुणक $e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x \qquad (x > 0)$

अत: दिए हुए समीकरण का हल है:

$$yx = \int xe^{-x} dx + c \quad \text{जबकि } c \text{ स्वैच्छिक अचर है।}$$

या $\quad xy = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx + c \qquad$ या $\quad xy = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

या $\quad xy = -e^{-x}(x+1) + c \qquad$ या $\quad y = -\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x} + \frac{c}{x}$

नोट : हल में $x > 0$ है।

उदाहरण 32.14. $\sin x \dfrac{dy}{dx} + y \cos x = 2\sin^2 x \cos x$ को हल कीजिए।

हल : दिया है $\qquad \sin x \dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 2\sin^2 x \cos x$

या $\qquad \dfrac{dy}{dx} + y \cot x = 2\sin x \cos x \qquad .....(1)$

यहां $\qquad P = \cot x, Q = 2\sin x \cos x$

$$\text{I.F.} = e^{\int P dx} = e^{\int \cot x dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

अत: दिए हुए समीकरण का हल है:

$$y \sin x = \int 2\sin^2 x \cos x \, dx + c,$$ जहाँ कि c स्वैच्छिक अचर है।

या $\qquad y\sin x = \dfrac{2}{3}\sin^3 x + c$

जो अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 32.15. $\left(1+y^2\right)\dfrac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण है :

$$\left(1+y^2\right)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$$

या $\qquad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\tan^{-1} y}{1+y^2} - \dfrac{x}{1+y^2}$

या $\qquad \dfrac{dx}{dy} + \dfrac{x}{1+y^2} = \dfrac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \qquad ....(1)$

जिस का रूप $\dfrac{dx}{dy} + Px = Q$ है, जहां P तथा Q,y के फलन हैं।

$$\text{I.F.} = e^{\int P dy} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

अत: दिए हुए समीकरण का हल है:

$$x.e^{\tan^{-1} y} = \int \frac{(\tan^{-1} y)}{1+y^2} e^{\tan^{-1}} y.dy + c$$

मान लीजिए $t = \tan^{-1} y$ इसलिए $dt = \dfrac{1}{1+y^2} dy$

$\therefore \qquad \left(e^{\tan^{-1} y}\right) x = \int e^t.tdt + c$ जबकि c स्वैच्छिक अचर है।

या $\left(e^{\tan^{-1}y}\right)x = te^t - \int e^t + c$

या $\left(e^{\tan^{-1}y}\right)x = te^t - e^t + c$

या $\left(e^{\tan^{-1}y}\right)x = \tan^{-1}y\, e^{\tan^{-1}y} - e^{\tan^{-1}y} + c$ $\quad$ ($t = \tan^{-1}y$ रखने पर)

या $$x = \tan^{-1}y - 1 + ce^{-\tan^{-1}y}$$

देखें आपने कितना सीखा 32.2

1. (i) क्या $y = \sin x$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का एक हल है?

   (ii) क्या $y = x^3$, अवकल समीकरण $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$ का एक हल है?

2. समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = 3x$ के कुछ हल नीचे दिए गये हैं। बताइए कि उनमें कौन से विशिष्ट हल तथा कौन से व्यापक हल है?

   (i) $2y = 3x^2$ $\qquad$ (ii) $y = \dfrac{3}{2}x^2 + 2$

   (iii) $2y = 3x^2 + C$ $\qquad$ (iv) $y = \dfrac{3}{2}x^2 + 3$

3. बताइए कि क्या निम्नलिखित अवकल समीकरण समघातीय हैं अथवा नहीं?

   (i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$ $\qquad$ (ii) $\left(3xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + xy\right)dy = 0$

   (iii) $\left(x+2\right)\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 9$ $\qquad$ (iv) $\left(x^3 - yx^2\right)dy + \left(y^3 + x^3\right)dx = 0$

4. (a) दर्शाइए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ का एक हल $y = a\sin 2x$ है।

   (b) सत्यापित कीजिए कि $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6$ का एक हल $y = x^3 + ax^2 + c$ है।

5. $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$ का व्यापक हल, $y = \tan x + c$ है। विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जब

   (a) $x = \dfrac{\pi}{4}, y = 1$ $\qquad$ (b) $x = \dfrac{2\pi}{3}, y = 0$

6. निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = x^5\tan^{-1}\left(x^3\right)$ $\qquad$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \sin^3 x\cos^2 x + xe^x$

   (c) $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx} = x$ $\qquad$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + \sin 3x$

7. $e^x \dfrac{dy}{dx} = 4$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जब दिया है कि $y=3$ जब $x=0$

8. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $\left(x^2 - yx^2\right)\dfrac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$

(c) $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + e^{-y}x^2$

9. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xy\, dy = 0$ (b) $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2}{x} = y$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$

10. $\dfrac{dy}{dx} + y \sec x = \tan x$ को हल कीजिए ।

11. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $\left(1 + x^2\right)\dfrac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$ (b) $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

(c) $x \log x \dfrac{dy}{dx} + y = 2 \log x,\ x > 1$

12. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $(x + y + 1)\dfrac{dy}{dx} = 1$

[संकेत: $\dfrac{dx}{dy} = x + y + 1$ या $\dfrac{dx}{dy} - x = y + 1$ का रूप $\dfrac{dx}{dy} + Px = Q$ है]

(b) $\left(x + 2y^2\right)\dfrac{dy}{dx} = y,\ y > 0$ [संकेत: $y\dfrac{dx}{dy} = x + 2y^2$ या $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} = 2y$]

32.7 अवकल समीकरण से संबंधित कुछ अन्य उदाहरण

उदाहरण 32.16. सत्यापित कीजिए कि $\left(1 - x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - m^2y = 0$ का हल $y = e^{m\sin^{-1}x}$ है।

हल : दिया गया है कि

$$y = e^{m\sin^{-1}x} \qquad .....(1)$$

x के सापेक्ष (1) का अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{me^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{my}{\sqrt{1-x^2}}$$

या

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = my$$

दोनों पक्षों में वर्ग करने पर, $\left(1-x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2y^2$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$-2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 2m^2y\frac{dy}{dx}$$

या $-x\frac{dy}{dx} + \left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} = m^2y$ या $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$

अत:, दिया हुआ सम्बन्ध $y = e^{m\sin^{-1}x}$

$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$ का हल है।

उदाहरण 32.17. $(y - yx)dx + (x + xy)dy = 0$ द्वारा प्रदर्शित वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिएं जो बिन्दु (1,1) से होकर जाता है।

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण है :

$$(y - yx)dx + (x + xy)dy = 0$$

या $\quad (x + xy)dy = (yx - y)dx$

या $\quad x(1 + y)dy = y(x - 1)dx$

या $\quad \frac{(1+y)}{y}dy = \frac{x-1}{x}dx \qquad .....(1)$

(1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int\left(\frac{1+y}{y}\right)dy = \int\left(\frac{x-1}{x}\right)dx$$

या $$\int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy = \int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx \qquad .....(2)$$

या $$\log y + y = x - \log x + c$$

चूंकि वक्र (1, 1) बिन्दु से होकर जाता है, इसलिए

समीकरण (2) में $x = 1, y = 1$ रखने पर,

$$1 = 1 + c \text{ या } c = 0$$

अत: अभीष्ट वक्र का समीकरण है

$$\log y + y = x - \log x \text{ या } \log(xy) = x - y$$

उदाहरण 32.18. $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$ को हल कीजिए।

हल: दिया है कि $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{3x}\left(e^{-x}+e^{x}\right)}{e^{x}+e^{-x}} \quad \text{या} \quad \frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$$

या $$dy = 3e^{3x}dx \qquad .....(1)$$

(1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$y = \int 3e^{3x}dx + c,$$ जहाँ कि c एक स्वैच्छिक अचर है।

या $$y = 3\frac{e^{3x}}{3} + c \quad \text{या} \quad y = e^{3x} + c$$

जो समीकरण का अभीष्ट हल है।

देखें आपने कितना सीखा 32.3

1. (a) यदि $y = \tan^{-1} x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$

   (b) यदि $y = e^x \sin x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

2. (a) $\frac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$ द्वारा प्रदर्शित वक्र, जो बिन्दु (2, 0) से होकर जाता है, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

   (b) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$ द्वारा प्रदर्शित वक्र, जो बिन्दु $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ से होकर जाता है, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{3x}+4e^{5x}}{e^{x}+e^{-x}}$ को हल कीजिए।

4. (a) $dx + xdy = e^{-y}\sec^2 y\,dy$ को हल कीजिए।

   (b) $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} - 4x = 3\cot^{-1} x$ को हल कीजिए।

   (c) $(1+y)xy\,dy = \left(1-x^2\right)(1-y)\,dx$ को हल कीजिए।

आइये दोहराएँ

- अवकल समीकरण ऐसा समीकरण होता है जिस में स्वतन्त्र चर, आश्रित चर तथा स्वतन्त्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के भिन्न भिन्न अवकलज सम्बद्ध होते हैं।
- अवकल समीकरण की कोटी उस समीकरण में आने वाले अधिकतम अवकलज की कोटि होती है।
- एक अवकल समीकरण की घात उस समीकरण में अधिकतम कोटि वाले अवकलज की घात होती है।

- अवकल समीकरण की घात तभी परिभाषित होती है यदि वह समीकरण अवकलजों के संदर्भ में एक बहुपद समीकरण है।
- जिस अवकल समीकरण में आश्रित चर तथा इसके अवकलज की घात केवल एक (1) पाई जाए तथा उनका परस्पर गुणा न हो, ऐसे अवकल समीकरण को रैखिक अवकल समीकरण कहते हैं।
- रैखिक अवकल समीकरण प्रथम घात का होता है।
- अवकल समीकरण का व्यापक हल ऐसा हल होता है जिस में स्वैच्छिक अचरों की संख्या अवकल समीकरण के कोटि के बराबर होती है।
- व्यापक हल, विशिष्ट हल तब बन जाता है जब कि दिए हुए प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करने वाले स्वैच्छिक अचरों के विशिष्ट मान निर्धारित हो जाते हैं।
- $\frac{dy}{dx} = f(x)$ के प्रकार के अवकल समीकरण का हल प्राप्त करने के लिए, उसके दोनो पक्षों को x के सापेक्ष समाकलित करते हैं।
- $\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$ के प्रकार के अवकल समीकरण का हल चरों को पृथक कर के और दोनों पक्षों का समाकलन करके प्राप्त किया जाता है।
- अवकल समीकरण $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ को समघातीय कहा जाता है यदि $M(x, y)$ तथा $N(x, y)$ समघातीय है।
- समघातीय अवकल समीकरण का हल $y = vx$ अथवा $x = vy$ प्रतिस्थापित करके तब चरों को पृथक करके, निकाला जाता है।
- प्रथम कोटि के रैखिक समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ का हल

  $ye^{\int P dx} = \int Q\left(e^{\int P dx}\right) dx + c$ है जबकि c एक स्वैच्छिक अचर है।
- व्यंजक $e^{\int P dx}$ को अवकल समीकरण का समाकलन गुणक कहते हैं। संक्षेप में इसे I.F. लिखा जाता है।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=LloXYtsHyK4*
- *https://www.youtube.com/watch?v=arYcc6IQ-WU*

आइए अभ्यास करें

1. अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए:

   (a) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ (b) $xdx + ydy = 0$

टिप्पणी

(c) $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 5\cos 3x$ (d) $\frac{dy}{dx} = \cos x$

(e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - xy\frac{dy}{dx} = y$ (f) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

2. ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरणों में कौन से रैखिक तथा कौन से अरैखिक हैं :

(a) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (b) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \log x$

(c) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (d) $x\frac{dy}{dx} - 4 = x$

(e) $dx + dy = 0$

3. a का विलोपन करते हुए $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ के संगत अवकल समीकरण बनाइए। इस की कोटि तथा घात लिखिए।

4. a,b,c का विलोपन करते हुए $y = ax^2 + bx + c$ से अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। इसकी कोटि तथा घात लिखिए।

5. निम्न के व्यापक हल में कितने अचर होंगे ?

(a) द्विकोटि का अवकल समीकरण।

(b) तृतीय कोटि का अवकल समीकरण

(c) पांच कोटि का अवकल समीकरण

6. दर्शाइए कि अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ का हल

$y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ है।

7. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $\sin^2 x\frac{dy}{dx} = 3\cos x + 4$ (b) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$

(c) $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x \sin y}{\cos y} = 0$ (d) $dy + xydx = xdx$

(e) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = x^m \cos mx$ (f) $\left(1 + y^2\right)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 32.1

1. कोटि 1, घात 1

2. (a) कोटि 2, घात 1 (b) कोटि 2, घात 2

3. (a) अरैखिक (b) रैखिक

(c) रैखिक (d) अरैखिक

4. $$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

5. (a) $xy\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - y\dfrac{dy}{dx} = 0$ (b) $\left(x^2 - 2y^2\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\dfrac{dy}{dx} - x^2 = 0$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$ (d) $y = (x-3)\dfrac{dy}{dx} + 2$

(e) $\left(x^2 - y^2\right)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$

देखें आपने कितना सीखा 32.2

1. (i) हाँ (ii) नहीं

2. (i), (ii) तथा (iv) विशिष्ट हल (iiii) विशिष्ट हल

3. (ii) (iv) समघातीय

5. (a) $y = \tan x$ (b) $y = \tan x + \sqrt{3}$

6. (a) $y = \dfrac{1}{6}x^6\tan^{-1}\left(x^3\right) - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{6}\tan^{-1}\left(x^3\right) + c$

(b) $y = \dfrac{1}{5}\cos^5 x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x + (x-1)e^x + c$

(c) $y = \dfrac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + c$ (d) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}\cos 3x + c$

7. $y = -4e^{-x} + 7$

8. (a) $\log\left|\dfrac{x}{y}\right| = c + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ (b) $\log|y+1| = x + \dfrac{x^2}{2} + c$

(c) $\tan x \tan y = c$ (d) $e^y = e^x + \dfrac{x^3}{3} + c$

9. (a) $x = c\left(x^2 - y^2\right)$

(b) $x + cy = y\log|x|$

(c) $\sin^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log|x| + c$

(d) $\tan\dfrac{y}{2x} = cx$

10. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c$

11. (a) $y = \tan^{-1}x - 1 + ce^{-\tan x}$

(b) $y = \tan x - 1 + ce^{-\tan x}$

(c) $y = \log x + \dfrac{c}{\log x}$

12. (a) $x = ce^{y} - (y + 2)$ (b) $x = y^2 + cy$

देखें आपने कितना सीखा 32.3

2. (a) $\log(y+1) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 4$

(b) $y \sin x + 5e^{\cos x} = 7$

3. $y = \dfrac{4}{5}e^{5x} + c$

4. (a) $x = e^{-y}(c + \tan y)$

(b) $y = 2\log|1 + x^2| - \dfrac{3}{2}(\cot^{-1} x)^2 + c$

(c) $\log x + 2\log|1 - y| = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} - 2y + c$

आइए अभ्यास करें

1. (a) कोटि 2, घात 3 (b) कोटि 1, घात 1

(c) कोटि 4, घात 1 (d) कोटि 1, घात 1

(e) कोटि 2, घात 1 (f) कोटि 2, घात 1

2. (a), (d), (e) रैखिक, (b), (c) अरैखिक

3. $\left(x^2 - 2y^2\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\left(\dfrac{dy}{dx}\right) - x^2 = 0$

4. . $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$; कोटि 3, घात 1

5. (a) दो (b) तीन (c) पाँच

7. (a) $y + 3\,\text{cosec}\, x + 4\cot x = c$ (b) $e^y = e^x + \dfrac{x^3}{3} + c$

(c) $\sin y = ce^{-\sin x}$ (d) $\log(1 - y) + \dfrac{x^2}{2} = c$

(e) $y = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\cos x + c\cos x$

(f) $x = \tan^{-1} y - 1 + ce^{-\tan^{-1} y}$