33

311hi33

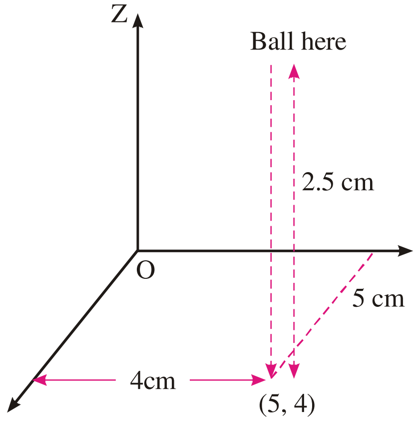
त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

पिछले पाठों में आपने पढ़ा है कि यदि समतल में एक बिन्दु दिया गया हो, तो दो संख्याओं, जो बिन्दु की स्थिति दर्शाते हैं, को ढूंढना सम्भव है जिन्हें समतल में बिन्दु के निर्देशांक कहते हैं। विलोमत: यदि एक क्रमित युग्म (x, y) दिया गया है, तो इसके संगत समतल में एक बिन्दु होगा जिस के निर्देशांक (x,y) हैं।

आइये एक कमरे में एक रबर की गेंद को उर्ध्वाधार स्थिति में गिराएं। फर्श के उस बिन्दु x,y जिस पर गेंद टकराती है, को कमरे की लम्बाई और चौड़ाई के अनुदिश अक्षों के संदर्भ में अद्वितीय रूप में ज्ञात किया जा सकता है। परन्तु यदि गेंद उर्ध्वाधार रूप में वापिस उछल कर उपर जाए, तो किसी क्षण पर आकाश में उस की स्थिति को दो अक्षों के संदर्भ में नहीं जाना जा सकता है। किसी क्षण पर गेंद की स्थिति को तभी जाना जा सकता है यदि दो अक्षों के साथ-साथ हम फर्श से गेंद की ऊँचाई भी जानते हों।

यदि फर्श से गेंद की ऊँचाई 2.5 सेमी हो तथा भूमि पर टकराने के स्थान वाले बिन्दु के निर्देशांक (5,4) हों, तो आकाश में गेंद की स्थिति को निर्धारित करने की एक विधि, तीन संख्याओं (5, 4, 2.5) की सहायता से उस बिन्दु को निरूपित करना है।

अत: आकाश में एक बिन्दु की स्थिति को तीन संख्याओं की सहायता से अद्वितीय रूप से निर्धारित किया जा सकता है। इस पाठ में हम निर्देशांक निकाय तथा आकाश में एक बिन्दु के निर्देशांकों, आकाश में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी, दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड में दिये गए आन्तरिक/बाह्य अनुपात में विभाजन करने वाले बिन्दु की स्थिति तथा एक बिन्दु/रेखा आकाश में प्रक्षेप के बारे में विस्तार पूर्वक अध्ययन करेंगे।



चित्र 33.1

उद्देश्य

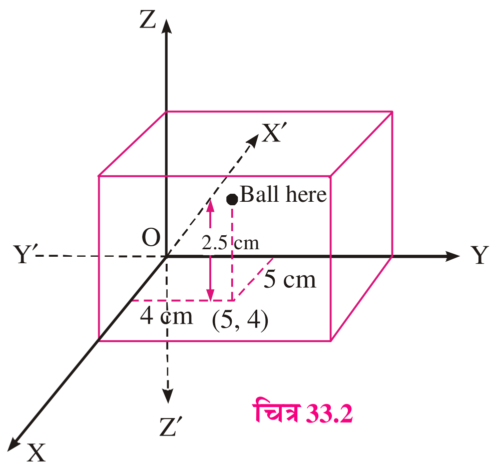
- इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :
- आकाश में एक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना
- आकाश में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना
- दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रखाखण्ड को दिये गए अनुपात में आन्तरिक विभाजन, बाह्य विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना
- आकाश में किसी रेखा के दिक कोसाइन/अनुपात को परिभाषित करना
- आकाश में एक रेखा के दिक कोसाइन/अनुपात ज्ञात करने में आकाश में एक रेखाखण्ड का दूसरी रेखा पर प्रक्षेप ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- द्विविम निर्देशांक ज्यामिति
- त्रिकोणमिति के मूल सिद्धान्त

33.1 निर्देशांक निकाय और आकाश में एक बिन्दु के निर्देशांक

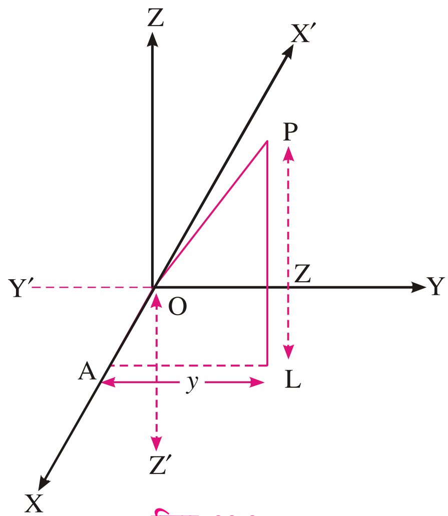
उछलती हुई गेंद का उदाहरण याद कीजिए जिस में कमरे का एक कोना मूल बिन्दु लिया गया था।



चित्र 33.2

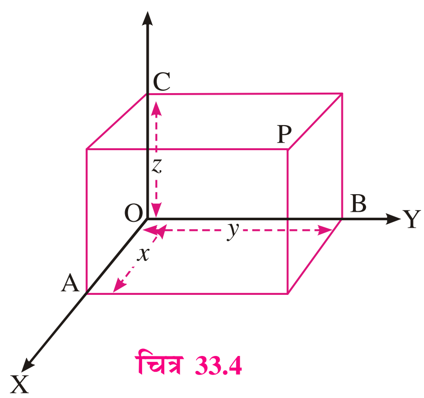
यह आवश्यक नहीं कि हम कमरे के एक विशेष कोने को मूल बिन्दु लें। हम किसी भी कोने को (यहाँ तक कि कमरे में किसी भी बिन्दु को) संदर्भ के लिए मूल बिन्दु ले सकते हैं तथा इस के अनुसार बिन्दु के निर्देशांक बदल जाते हैं। अत: कमरे में किसी भी स्वैच्छिक बिन्दु को हम मूल बिन्दु ले सकते हैं।

आइए हम आकाश में एक बिन्दु O लें तथा इसमें से तीन पारस्परिक लम्ब रेखाएँ $X'OX, Y'OY$ और $Z'OZ$ लें। इन्हें हम क्रमश: X-अक्ष, Y-अक्ष और Z-अक्ष कहते हैं। तीर द्वारा अक्षों की धनात्मक दिखाएँ दिखाई गई हैं। X-अक्ष और Y-अक्ष द्वारा निर्धारित समतल XY समतल (XOY समतल) और इसी प्रकार YZ समतल (YOZ समतल) और ZX समतल (ZOX समतल) कहे जाते हैं। इन तीन समतलों को निर्देशांक समतल कहते हैं। तीन निर्देशांक समतल पूरे आकाश को आठ भागों में विभाजित करते हैं जिन्हें अष्टांशक कहते हैं।



चित्र 33.3

मान लीजिए कि आकाश में कोई बिन्दु P है। P से XY समतल पर PL लम्ब खींचिए जो उस समतल को मान लीजिए, L पर मिलता है। बिन्दु L से एक रेखा LA अक्ष OY के समान्तर खींचिए जो OX को A पर काटती है। यदि हम $OA = x$, $AL = y$ और $LP = z$ लिखें तो (x,y,z) बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते हैं।



चित्र 33.4

पुन: यदि हम P में से समकोण समान्तर अषट्फलक को पूरा करें जिस के किनारे OA,OB और OC हैं जो एक दूसरे को O पर मिलते हैं

तथा OP इसका मुख्य विकर्ण है तब लम्बाइयाँ (OA, OB, OC) अर्थात् (x, y, z) बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते हैं।

टिप्पणी: आप चित्र 33.4 में अवलोकर करें।

P का x-निर्देशांक = OA = P से YZ समतल पर लम्ब की लम्बाई

P का y- निर्देशांक = OB = P से ZX समतल पर लम्ब की लम्बाई

P का z- निर्देशांक = OC = P से XY समतल पर लम्ब की लम्बाई

अत: आकाश में किसी बिन्दु P के संगत एक त्रिक (x,y,z) है जो आकाश में बिन्दु के निर्देशांक कहलाते हैं। विलोमत: किसी दिये गए त्रिक (x,y,z) के संगत आकाश में एक बिन्दु P है जिस के निर्देशांक (x,y,z) हैं।

टिप्पणी

1. जैसे समतल निर्देशांक ज्यामिति में निर्देशांक अक्ष समतल को चार चर्तुथाशों में विभाजित करते हैं, इसी तरह त्रिविम ज्यामिति में, आकाश को निर्देशांक समतल आठ अष्टांशक में विभाजित करते हैं जिनके नाम हैं

   OXYZ, OX'YZ, OXY'Z, OXYZ',OXY'Z', OX'YZ',OX'Y'Z', और OX'Y'Z

2. यदि कोई बिन्दु P प्रथम अष्टांशक में, तो दूसरे प्रत्येक अष्टांशक में एक ऐसा बिन्दु होगा जिसकी निर्देशांक समतल से दूरियां उनके बिन्दु P की दूरी के बराबर होगी। यदि बिन्दु P (a,b,c) हो तो दूसरे बिन्दु क्रमश: होंगे (-a,b,c), (a,b,c), (a,b,-c), (a,-b-c),(-a,b,-c), (-a,-b,c) और (-a,-b,-c),उसी क्रम में जो क्रम ऊपर (i) में दिया गया है।

3. एक बिन्दु, जो XY-समतल, YZ-समतल तथा ZX-समतल में है, के निर्देशांक क्रमश: (a, b, o), (o, b, c) तथा (a, o, c) हैं।

4. X अक्ष Y-अक्ष और Z-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक क्रमश: (a,0,0), (0,b,0) और (0,0,c) है।

5. आप देख सकते हैं कि (x,y,z) बिन्दु P के स्थिति सदिश के संगत है जो सदिश OP मूल बिन्दु O के संदर्भ में हैं।

उदाहरण 33.1. निम्न बिन्दु किस किस अष्टांशक में स्थित है?

(a) (2, 6, 8) (b) (–1, 2, 3) (c) (–2, –5, 1)

(d) (–3, 1, –2) (e) (–6, –1, –2)

हल:

(a) क्योंकि सभी निर्देशांक घनात्मक है

$\therefore$ (2, 6, 8) अष्टांशक OXYZ में स्थित है।

(b) क्योंकि x ऋणात्मक है और y और z धनात्मक हैं

$\therefore$ (–1, 2, 3)अष्टांशक OX'YZ में स्थित है।

मॉड्यूल - IX
सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति

टिप्पणी

(c) क्योंकि x और y ऋणात्मक हैं और z धनात्मक है,

$\therefore (-2, -5, 1)$ अष्टांशक OX'Y'Z में स्थित है।

(d) $(-3, 1, -2)$ अष्टांशक OX'YZ' में स्थित है।

(e) क्योंकि x,y और z सभी ऋणात्मक ह

$\therefore (-6, -1, -2)$ अष्टांशक OX'Y'Z' में स्थित है।

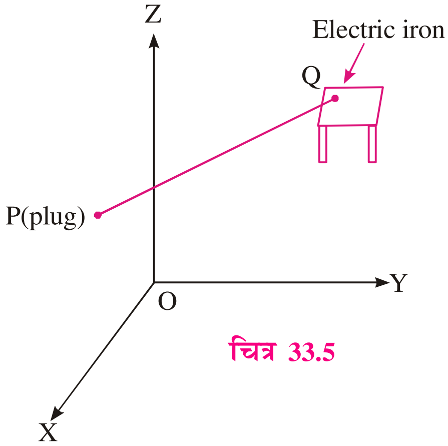
देखें आपने कितना सीखा 33.1

1. उन अष्टांशकों के नाम लिखिए जिन में निम्न बिन्दु स्थित है:

(a) $(-4, 2, 5)$ (b) $(4, 3, -6)$ (c) $(-2, 1, -3)$

(d) $(1, -1, 1)$ (f) $(8, 9, -10)$

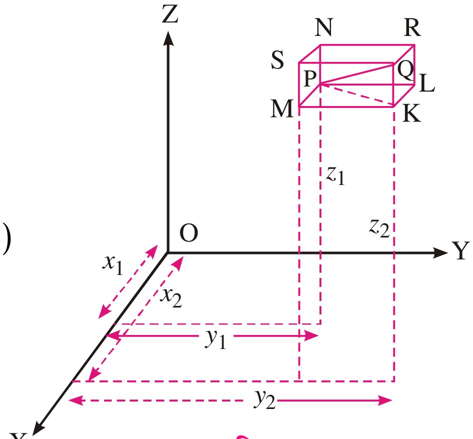
33.2 दो बिन्दुओं के बीच दूरी



चित्र 33.5

मान लीजिए कि कमरे की दीवार पर एक विद्युत प्रैस एक मेज़ पर रखी है। कितने न्यूनतम तार की आवश्यकता होगी जिससे प्रैस प्लग से जुड जाए? इस उदाहरण से हमें आकाश में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी को जानने की आवश्यकता हुई।

मान लीजिए कि बिन्दुओं P और Q के निर्देशांक क्रमश (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) हैं। PQ को विकर्ण मानकर समान्तर अष्टफलक PMSNRLKQ पूरा कीजिए। PK रेखा KQ पर लम्ब है।



चित्र 33.6

$\therefore$ समकोण Δ PKQ में $\angle K = 90°$

$$\therefore \quad PQ^2 = PK^2 + KQ^2$$

$\therefore$ पुनः समकोण Δ PKL में $\angle L = 90°$

$$\therefore PK^2 = KL^2 + PL^2 = MP^2 + PL^2 \quad (\because KL = MP)$$

$$\therefore PQ^2 = MP^2 + PL^2 + KQ^2 \qquad \text{...(i)}$$

MP, PL और KQ निर्देशांक अक्षों के समान्तर हैं।

$\therefore$ बिन्दु P की समतल YOZ से दूरी $= x_1$

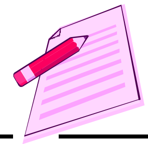
तथा Q और M की समतल YOZ से दूरी $= x_2$ $\quad MP = |x_2 - x_1|$

इसी प्रकार $PL = |y_2 - y_1|$ और $KQ = |z_2 - z_1|$

$$\therefore \quad PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \qquad \text{....[(i) से]}$$

या

$$\mathbf{|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$



उपप्रमेय: एक बिन्दु की मूल बिन्दू से दूरी

यदि बिन्दु $Q(x_2, y_2, z_2)$ मूल बिन्दु (0, 0, 0) के संपाती हो, तो $x_2 = y_2 = z_2 = 0$

$\therefore$ मूल बिन्दु से P की दूरी $\quad |OP| = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2}$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

सामान्यत: बिन्दु $P(x, y, z)$ की मूल बिन्दु 0 से दूरी $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

उदाहरण 33.2. बिन्दुओं $(2, 5, -4)$ और $(8, 2, -6)$ के बीच दूरी ज्ञात कीजिए ।

हल : माना $P(2, 5, -4)$ और $Q(8, 2, -6)$ दिये गए बिन्दु हैं

$$\therefore \quad |PQ| = \sqrt{(8-2)^2 + (2-5)^2 + (-6+4)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 9 + 4}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

दिये हुए बिन्दुओं के बीच की दूरी 7 इकाई है।

उदाहरण 33.3. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(-2, 4, -3)$, $(4, -3, -2)$ और $(-3, -2, 4)$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल : माना $A(-2, 4, -3)$, $B(4, -3, -2)$ और $C(-3, -2, 4)$ दिये गये बिन्दु हैं।

$$\therefore \quad |AB| = \sqrt{(4+2)^2 + (-3-4)^2 + (-2+3)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 49 + 1} = \sqrt{86}$$

$$|BC| = \sqrt{(-3-4)^2 + (-2+3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{86}$$

$$|CA| = \sqrt{(-2+3)^2 + (4+2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{86}$$

$$\therefore \quad |AB| = |BC| = |CA|$$

Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

उदाहरण 33.4. जांच कीजिए कि नीचे दिये गए हैं। बिन्दु एक त्रिभुज बनाते है या नहीं :

(a) $A(-1, 2, 3)$ $B(1, 4, 5)$ और $C(5, 4, 0)$

(b) $(2, -3, 3)$, $(1, 2, 4)$ और $(3, -8, 2)$

हल : (a) $|AB| = \sqrt{(1+1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2}$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \quad = 3.464 \text{ लगभग}$$

$$|BC| = \sqrt{(5-1)^2 + (4-4)^2 + (0-5)^2}$$

$$= \sqrt{16+0+25} = \sqrt{41} \quad = 6.4 \text{ लगभग}$$

और $$|AC| = \sqrt{(5+1)^2 + (4-2)^2 + (0-3)^2}$$

$$= \sqrt{36+4+9} = 7$$

$\therefore$ $$|AB| + |BC| = 3.464 + 6.4 = 9.864 > |AC|,$$

इसी प्रकार $$|AB| + |AC| > |BC|$$

तथा $$|BC| + |AC| > |AB|.$$

क्योंकि दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा है, अतः बिन्दु A, B तथा C एक त्रिभुज बनाते हैं।

(b) माना बिन्दु $(2,-3,3),(1,2,4)$ और $(3,-8,2)$ क्रमशः P,Q और R द्वारा निरूपित होते हैं।

$\therefore$ $$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (2+3)^2 + (4-3)^2}$$

$$= \sqrt{1+25+1} = 3\sqrt{3}$$

$$|QR| = \sqrt{(3-1)^2 + (-8-2)^2 + (2-4)^2}$$

$$= \sqrt{4+100+4} = 6\sqrt{3}$$

तथा $$|PR| = \sqrt{(3-2)^2 + (-8+3)^2 + (2-3)^2}$$

$$= \sqrt{1+25+1}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

इस अवस्था में $|PQ| + |PR| = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = |QR|$

अतः दिये गए बिन्दु त्रिभुज नहीं बनाते। वास्तव में ये बिन्दु एक रेखा पर स्थित है।

उदाहरण 33.5. दिखाइये कि बिन्दु $A(1,2,-2), B(2,3,-4)$ और $C(3,4,-3)$ एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

हल : $$AB^2 = (2-1)^2 + (3-2)^2 + (-4+2)^2 = 1+1+4 = 6$$

$$BC^2 = (3-2)^2 + (4-3)^2 + (-3+4)^2 = 1+1+1 = 3$$

और $$AC^2 = (3-1)^2 + (4-2)^2 + (-3+2)^2 = 4+4+1 = 9$$

यहाँ पर $AB^2 + BC^2 = 6 + 3 = 9 = AC^2$

दिये गए बिन्दु समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

उदाहरण 33.6. दिखाइये कि बिन्दु $A(0, 4, 1)$, $B(2, 3, -1)$, $C(4, 5, 0)$ तथा $D(2, 6, 2)$ एक वर्ग के शीर्ष हैं।

हलः यहाँ $$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (3-4)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3 \text{ इकाई}$$

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (5-3)^2 + (0+1)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ इकाई}$$

$$CD = \sqrt{(2-4)^2 + (6-5)^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{4+1+4} = 3 \text{ इकाई}$$

तथा
$$DA = \sqrt{(0-2)^2 + (4-6)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ इकाई}$$

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$

अब
$$AC^2 = \sqrt{(4-0)^2 + (5-4)^2 + (0-1)^2}$$

$$= 16+1+1 = 18 \text{ इकाई}$$

$\therefore$ $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18 = AC^2$

$\therefore$ $\angle B = 90°$ चतुर्भुज $ABCD$ में

$AB = BC = CD = DA$ तथा $\angle B = 90°$

$\therefore$ चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है।

देखें आपने कितना सीखा 33.2

1. निम्नलिखित बिन्दुओं के बीच दूरी ज्ञात कीजिए :

   (a) $(4, 3, -6)$ और $(-2, 1, -3)$ (b) $(-3, 1, -2)$ और $(-3, -1, 2)$

   (c) $(0, 0, 0)$ और $(-1, 1, 1)$

2. दिखाइये कि यदि बिन्दुओं $(5, -1, 7)$ और $(a, 5, 1)$ के बीच की दूरी 9 एकक हो, तो "a" का मान 2 या 8 होगा।

3. दिखाइये कि बिन्दुओं (a, b, c), (b, c, a) और (c, a, b) द्वारा बनाया गया त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होगा।

4. दिखाइये कि बिन्दु $(-1, 0, -4)$, $(0, 1, -6)$ और $(1, 2, -5)$ एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

5. दिखाइये कि बिन्दु $(0, 7, 10)$, $(-1, 6, 6)$ और $(-4, 9, 6)$ एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं।

6. दिखाइए कि बिन्दु $(3, -1, 2)$, $(5, -2, -3)$, $(-2, 4, 1)$ तथा $(-4, 5, 6)$ एक समांतर चतुर्भुज बनाते हैं।

7. दिखाइए कि बिन्दु $(2, 2, 2)$, $(-4, 8, 2)$, $(-2, 10, 10)$ तथा $(4, 4, 10)$ एक वर्ग बनाते हैं।

8. दिखाइये कि प्रत्येक अवस्था में तीनों दिए बिन्दु संरेख है :

   (a) $(-3, 2, 4)$, $(-1, 5, 9)$ और $(1, 8, 14)$

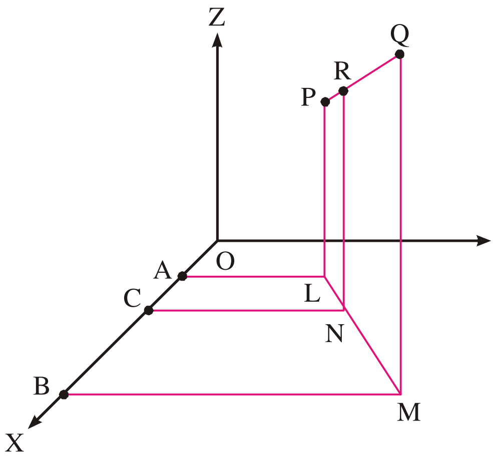
मॉड्यूल - IX
सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति

टिप्पणी

(b) $(5, 4, 2), (6, 2, -1)$ और $(8, -2, -7)$

(c) $(2, 5, -4), (1, 4, -3)$ और $(4, 7, -6)$

33.3 एक रेखाखण्ड को विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक



चित्र 33.7

माना बिन्दु R (x, y, z) रेखाखण्ड PQ को $l : m$ के आन्तरिक अनुपात में विभाजित करता है।

माना P के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) है तथा Q के निर्देशांक (x_2, y_2, z_2) हैं।

बिन्दुओं P,Q तथा Q से PL, RN और QM समतल XY पर लम्ब खींचिएं

LA, NC और MB अक्ष OX पर लम्ब खीचिए

अब $AC = OC - OA = x - x_1$

और $BC = OB - OC = x_2 - x$

अब $$\frac{AC}{BC} = \frac{LN}{NM} = \frac{PR}{RQ} = \frac{l}{m}$$

$\therefore$ $$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m}$$

अथवा $$mx - mx_1 = lx_2 - lx$$

अथवा $$(l + m)x = lx_2 + mx_1$$

अथवा $$x = \frac{lx_2 - mx_1}{l + m}$$

इसी प्रकार यदि हम क्रमशः OY और OZ पर लम्ब खींचें, तो

$$y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m} \quad \text{और} \quad z = \frac{lz_2 + mz_1}{l + m}$$

R एक बिन्दु $\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}, \frac{lz_2 + mz_1}{l + m}\right)$ है।

यदि $\lambda = \frac{l}{m}$ हो, तो $\lambda : 1$ के अनुपात में रेखाखण्ड PQ को विभाजित करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक

$$\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}\right), \lambda + 1 \neq 0 \text{ है।}$$

यह स्पष्ट ही है कि λ के प्रत्येक मान के लिए, रेखा PQ पर एक संगत बिन्दु है तथा PQ पर प्रत्येक बिन्दु R के लिए λ का कुछ मान है। यदि λ घनात्मक है तो R रेखाखण्ड PQ पर स्थित होगा औरयदि λ का मान ऋणात्मक है तो R रेखा खण्ड PQ पर नहीं होगा।

दूसरी अवस्था में आप कह सकते हैं कि R रेखा खण्ड PQ को $-\lambda : 1$ के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है।

उपप्रमेय 1 : PQ को $l : m$ के बाह्य अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}, \frac{lz_2 - mz_1}{l - m}\right)$$

उपप्रमेय 2 : PQ के मध्य बिन्दु के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

उदाहरण 33.7. बिन्दुओं $(2, -4, 3)$ और $(-4, 5, -6)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:1 के आन्तरिक अनुपात में विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना $A(2, -4, 3)$ और $B(-4, 5, -6)$ दो बिन्दु हैं

माना P (x, y, z) रेखाखण्ड AB को 2:1 के आन्तरिक अनुपात में विभाजित करता है

$\therefore$ $$x = \frac{2(-4) + 1.2}{2 + 1} = -2, \quad y = \frac{2.5 + 1(-4)}{2 + 1} = 2$$

और $$z = \frac{2(-6) + 1.3}{2 + 1} = -3$$

P के निर्देशांक $(-2, 2, -3)$ हैं।

उदाहरण 33.8. बिन्दुओं $(-1, -3, 2)$ और $(1, -1, 2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:3 के बाह्य अनुपात में विभाजन करने वाला बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : माना $(-1, -3, 2)$ और $(1, -1, 2)$ दो बिन्दु हैं

माना R (x, y, z) रेखाखण्ड PQ को 2:3 के बाह्य अनुपात में विभाजि करता है।

अब $$x = \frac{2(1) - 3(-1)}{2 - 3} = -5, \quad y = \frac{2(-1) - 3(-3)}{2 - 3} = -7$$

और $$z = \frac{2(2) - 3(2)}{2 - 3} = 2$$

$\therefore$ R के निर्देशांक हैं $(-5, -7, 2)$.

उदाहरण 33.9. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिस में बिन्दुओं $(2, -3, 5)$ और $(7, 1, 3)$ को मिलाने वाला रेखा खण्ड XY समतल द्वारा विभाजित होता है।

हल : माना अभीष्ट अनुपात जिसमें रेखाखंड विभाजित होता है $= l : m$

$\therefore$ बिन्दु के निर्देशांक हैं $\left(\frac{7l + 2m}{l + m}, \frac{l - 3m}{l + m}, \frac{3l + 5m}{l + m}\right)$

क्योंकि यह बिन्दु XY समतल में है।

$\therefore$ इसका Z- निर्देशांक शून्य है

अर्थात $\frac{3l + 5m}{l + m} = 0$ और $\frac{l}{m} = -\frac{5}{3}$

अत: XY समतल को 5:3 के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है।

देखें आपने कितना सीखा 33.3

1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(2, -5, 3)$ और $(-3, 5, -2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 1:4 के आन्तरिक अनुपात में विभाजित करता है।

2. वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(2, -3, 1)$ और $(3, 4, -5)$ को 3:2 के आन्तरिक तथा बाह्य अनुपात में विभाजित करते हैं।

3. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $(2, 4, 5)$ और $(3, 5, -4)$ को मिलाने वाला रेखाखण्ड YZ समतल द्वारा विभाजित होता है।

4. दिखाइये कि YZ समतल बिन्दुओं $(3, 5, -7)$ और $(-2, 1, 8)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $\left(0, \frac{13}{5}, 2\right)$ पर 3:2 के अनुपात में विभाजित करता है।

5. दिखाइये कि वह अनुपात, जिसमें निर्देशांक समतल बिन्दुओं $(-2, 4, 7)$ और $(3, -5, 8)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को क्रमश: $2 : 3, 4 : 5$ में आन्तरिक और $7 : 8$ में बाह्य अनुपात विभाजत करते हैं।

6. एक बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:1 के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है।चांच कीजिए कि Q रेखाखण्ड PR का मध्य बिन्दु है।

आइये दोहराएँ

- आकाश में आयताकार निर्देशांक अक्षों के संदर्भ में, दिये गये बिन्दु $P(x, y, z)$ से यदि हम तीन निर्देशांक समतलों के समान्तर समतल खींचे जो अक्षों को A, B और C में मिलें (माना), तब $OA = x, OB = y$ और $OC = z$ जबकि O मूल बिन्दु है।

- विलोमत: यदि तीन संख्याएँ x, y और z दी गई हों, तो हम आकाश में एक अद्वितीय बिन्दु ज्ञात कर सकते हैं, जिस के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

  बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी

  $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

  विशेषतया, बिन्दु P की मूल बिन्दु से दूरी $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

- बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $l : m$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक है।

  (a) (आन्तरिक विभाजन) $\left(\dfrac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \dfrac{ly_2 + my_1}{l+m}, \dfrac{lz_2 + mz_1}{l+m}\right)$

  (b) (बाह्य विभाजन) $\left(\dfrac{lx_2 - mx_1}{l-m}, \dfrac{ly_2 - my_1}{l-m}, \dfrac{lz_2 - mz_1}{l-m}\right)$

  विशेष रूप से, PQ के मध्य बिन्दु के निर्देशांक है:

  $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.mathguru.com/level3/introduction-to-three-dimensional-geometry-*
- *http://www.goiit.com/posts/show/0/content-3-d-geometry-804299.htm*
- *http://www.askiitians.com/iit-jee-3d-geometry*

आइए अभ्यास करें

1. दिखाइये कि बिन्दु (0,7,10), (–1,6,6) और (–4,9,6) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाते हैं।
2. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P, Q और R जिन के निर्देशांक क्रमश: (3,2,–4), (5,4,–6) और (9,8,–10) हैं। सरेख हैं तथा वह अनुपात भी ज्ञात कीजिए जिस में Q रेखाखण्ड PR को विभाजित करता है।
3. दिखाइये कि बिन्दु (0,4,1), (2,3,–1), (4,5,0) और (2,6,2) एक वर्ग के शीर्ष हैं।
4. दिखाइये कि बिन्दु (4,7,8),(2,3,4), (–1,–2,1) और (1,2,5) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।
5. एक समान्तर चतुभुज के तीन शीर्ष (3,–4,7) , B(5,3,–2) तथा C(1,2,–3) है, चौथा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 33.1

1. (a) OX' YZ (b) OXYZ'
   (c) OX' YZ' (d) OXY'Z
   (e) OXYZ'

देखें आपने कितना सीखा 33.2

1. (a) 7 (b) $2\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{3}$

देखें आपने कितना सीखा 33.3

1. $(1, -3, 2)$ 2. $\left(\frac{13}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{13}{5}\right)$; $(5, 18, -17)$

3. $-2:3$ 6. $(2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1, 2z_2 - z_1)$

आइए अभ्यास करें

5. $(-1, -5, -6)$