4

त्रिकोणमितीय फलन- II

311hi04

पिछले पाठ में आपने त्रिकोणमितीय फलनों के बारे में सीखा । आपने त्रिकोणमितीय फलनों के ग्राफ को खींचना तथा उनसे निष्कर्ष निकालने के बारे में भी सीखा है। इस पाठ में हम योग तथा अन्तर के सूत्र $\cos(A \pm B)$, $\sin(A \pm B)$ तथा $\tan(A \pm B)$ स्थापित करेंगे। हम गुणज कोणों तथा अपवर्तक कोणों के सूत्रों को भी बताऐंगे और उनसे संबन्धित उदाहरणों को हल करेगें। साधारण त्रिकोणमितीय फलनों के व्यापक हलों की भी इस पाठ में चर्चा करेंगे।

पूर्व ज्ञान

- त्रिकोणमितीय फलनों की परिभाषा
- त्रिकोणमितीय फलनों के पूरक तथा संपूरक कोण
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- $-x, \frac{x}{2}, x \pm y, \frac{\pi}{2} \pm x, \pi \pm x$ के त्रिकोणमितीय फलनों को लिख सकना जहां x और y वास्तविक संख्याएँ हैं।
- योग और अन्तर के सूत्र स्थापित करना :
  $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$,
  $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ तथा $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
- योग व अन्तर के सूत्रों का उपयोग करके प्रश्नों को हल करना
- कोणों के गुणज तथा अपवर्तक सूत्रों जैसे $\cos 2A, \sin 2A, \tan 2A, \cos 3A, \sin 3A, \tan 3A$, $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}$ और $\tan\frac{A}{2}$ को बताना
- सरल त्रिकोणमितीय समीकरण जैसे $\sin x = \sin\alpha$, $\cos x = \cos\alpha$, $\tan x = \tan\alpha$ को हल करना

4.1 त्रिकोणमितीय फलनों का योग तथा गुणन

पिछले पाठ में आपने वृत्तीय कोणों की माप, त्रिकोणमितीय फलन और निर्दिष्ट और अन्य सम्बंधित संख्याओं पर त्रिकोणमितीय फलनों के मानों के बारे में सीखा था।

अब आप यह जानना चाहेंगे कि त्रिकोणमितीय फलनों के किन्हीं दो संख्याओं A तथा B के दिए हुए मानों के लिए क्या त्रिकोणमितीय फलनों के योग व अन्तर को ज्ञात कर पाना सम्भव है।

आप देखेंगे कि संख्याओं के योग व अन्तर के त्रिकोणमितीय फलन किस प्रकार अलग-अलग संख्याओं के त्रिकोणमितीय फलनों से सम्बंधित हैं।

यह त्रिकोणमितीय फलनों के $\frac{\pi}{12}$ और $\frac{5\pi}{12}$ इत्यादि का मान ज्ञात करने में आपकी सहायता करेगा।

$\frac{\pi}{12}$ को $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$\frac{5\pi}{12}$ को $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$\frac{7\pi}{12}$ को योग व अन्तर के रूप में कैसे व्यक्त किया जा सकता है?

इस अनुच्छेद में हम इसी प्रकार के त्रिकोणमितीय फलनों का अध्ययन करेंगे।

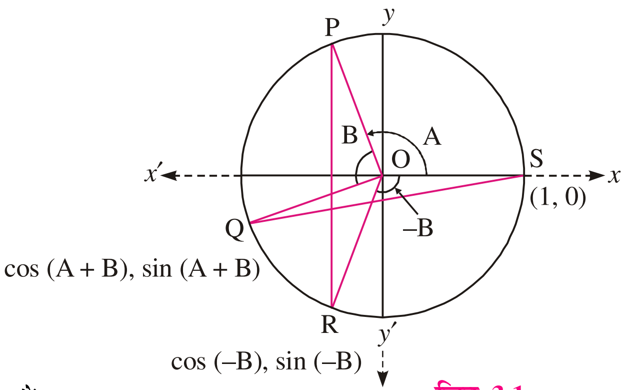
4.1.1 योग के सूत्र

किन्हीं दो संख्याओं A और B के लिए

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

दी गई चित्र में बनाइए :

$$\angle SOP = A$$
$$\angle POQ = B$$
$$\angle SOR = -B$$



चित्र 3.1

जबकि बिन्दु P, Q, R, S इकाई वृत्त पर स्थित हैं।

बिन्दु P, Q, R, S के निर्देशांक (cos A, sin A), [cos (A + B), sin (A + B)],

$[\cos(-B), \sin(-B)]$ और (1, 0) होगें।

दिये गये चित्र के अनुसार हमें प्राप्त होता है, भुजा OP = भुजा OQ

$\angle POR = \angle QOS$ [प्रत्येक कोण $= \angle B + \angle QOR$]

भुजा OR = भुजा OS

$\Delta POR \cong \Delta QOS$ (SAS के द्वारा) $\quad \therefore$ PR = QS

$$PR=\sqrt{(\cos A-\cos(-B))^2+(\sin A-\sin(-B))^2}$$

$$QS=\sqrt{(\cos(A+B)-1)^2+(\sin(A+B)-0)^2}$$

क्योंकि $PR^2 = QS^2$

$$\therefore\ \cos^2 A+\cos^2 B-2\cos A\cos B+\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B$$

$$=\cos^2(A+B)+1-2\cos(A+B)+\sin^2(A+B)$$

$$\Rightarrow\quad 1+1-2(\cos A\cos B-\sin A\sin B)=1+1-2\cos(A+B)$$

$$\Rightarrow\quad \cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B) \qquad \text{(I)}$$

उपप्रमेय 1

किन्हीं दो कोणों A और B के लिए $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

उपपत्ति : (1) में B को (–B) से प्रतिस्थापित कीजिए :

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad [\because \cos(-B) = \cos B \text{ तथा } \sin(-B) = -\sin B]$$

उपप्रमेय 2

किन्हीं दो कोणों A और B के लिए

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि $\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right) = \sin A$ और $\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right) = \cos A$

$$\therefore \quad \sin(A+B) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-(A+B)\right)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-B\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin B$$

या
$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \qquad .....(II)$$

उपप्रमेय 3

किन्हीं दो कोणों A और B के लिए

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

उपपत्ति : (II) में B को –B से प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा :

$$\sin(A+(-B)) = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

या
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

उदाहरण 4.1.

(a) निम्नलिखित में प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin\frac{5\pi}{12}$ (ii) $\cos\frac{\pi}{12}$ (iii) $\cos\frac{7\pi}{12}$

(b) यदि $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A+B = \frac{\pi}{4}$

हल : (a) (i)
$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(ii)
$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

ध्यान दीजिए $\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}$

(iii) $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(b) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$$\cos A=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{और} \quad \cos B=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

इन सभी मानों को (II) में रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\sin(A+B)=\frac{1}{\sqrt{10}}\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{50}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$$

या $\quad A+B=\frac{\pi}{4}$

देखें आपने कितना सीखा 4.1

1. (a) निम्नलिखित में प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\sin\frac{\pi}{12}$ (ii) $\sin\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}$

   (b) सिद्ध कीजिए :

   (i) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+A\right)=\frac{1}{2}\left(\cos A+\sqrt{3}\sin A\right)$ (ii) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$

   (c) यदि $\sin A=\frac{8}{17}$ और $\sin B=\frac{5}{13}$ हो, तो $\sin(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. (a) $\cos\frac{5\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए।

   (b) सिद्ध कीजिए :

   (i) $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ (ii) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

   (iii) $\cos(n+1)A\cos(n-1)A+\sin(n+1)A\sin(n-1)A=\cos 2A$

   (iv) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right)=\cos(A+B)$

उपप्रमेय 4 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

उपपत्ति : $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$

अंश और हर को $\cos A\cos B$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}} \text{ या } \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \qquad \text{......(III)}$$

उपप्रमेय 5: $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

उपपत्ति : (III) में B को (–B) प्रतिस्थापित करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होगा।

उपप्रमेय 6: $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

उपपत्ति : $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

अंश और हर को $\sin A\sin B$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है : ......(IV)

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

उपप्रमेय 7: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

उपपत्ति : $$\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan A}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan A}=\frac{1+\tan A}{1-\tan A} \quad \text{क्योंकि } \tan\frac{\pi}{4}=1$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

उदाहरण 4.2. $\tan\dfrac{\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1.\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

उदाहरण 4.3. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए : (a) $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{36}+\sin\frac{7\pi}{36}}{\cos\frac{7\pi}{36}-\sin\frac{7\pi}{36}}=\tan\dfrac{4\pi}{9}$

(b) $\tan 7A - \tan 4A - \tan 3A = \tan 7A \tan 4A \cdot \tan 3A$

(c) $\tan \frac{7\pi}{18} = \tan \frac{\pi}{9} + 2 \tan \frac{5\pi}{18}$

हल : (a) अंश व हर दोनों को $\cos \frac{7\pi}{36}$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\cos \frac{7\pi}{36} + \sin \frac{7\pi}{36}}{\cos \frac{7\pi}{36} - \sin \frac{7\pi}{36}} = \frac{1 + \tan \frac{7\pi}{36}}{1 - \tan \frac{7\pi}{36}} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{7\pi}{36}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{7\pi}{36}}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{36}\right) = \tan \frac{16\pi}{36} = \tan \frac{4\pi}{9} = \text{दायाँ पक्ष}$$

(b) $\tan 7A = \tan(4A + 3A) = \dfrac{\tan 4A + \tan 3A}{1 - \tan 4A \tan 3A}$

या $\quad \tan 7A - \tan 7A \tan 4A \tan 3A = \tan 4A + \tan 3A$

या $\quad \tan 7A - \tan 4A - \tan 3A = \tan 7A \tan 4A \tan 3A$

(c) $$\tan \frac{7\pi}{18} = \tan\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{18}\right) = \frac{\tan \frac{5\pi}{18} + \tan \frac{2\pi}{18}}{1 - \tan \frac{5\pi}{18} \cdot \tan \frac{2\pi}{18}}$$

$$\tan \frac{7\pi}{18} - \tan \frac{7\pi}{18} \tan \frac{5\pi}{18} \tan \frac{2\pi}{18} = \tan \frac{5\pi}{18} + \tan \frac{2\pi}{18} \qquad .....(1)$$

$$\tan \frac{7\pi}{18} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) = \cot \frac{\pi}{9} = \cot \frac{2\pi}{18}$$

$\therefore$ (1) को लिखा जा सकता है :

$$\tan \frac{7\pi}{18} - \cot \frac{2\pi}{18} \tan \frac{5\pi}{18} \tan \frac{2\pi}{18} = \tan \frac{5\pi}{18} + \tan \frac{\pi}{9}$$

$\therefore \quad \tan \frac{7\pi}{18} = \tan \frac{\pi}{9} + 2 \tan \frac{5\pi}{18}$

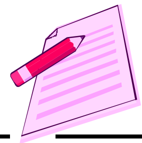
देखें आपने कितना सीखा 4.2

1. रिक्त स्थान भरिए :

   (i) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = ...$ (ii) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = ...$

2. (a) सिद्ध कीजिए : (i) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 1.$

   (ii) $\cot(A - B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$ (iii) $\tan \frac{\pi}{12} + \tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{12} \cdot \tan \frac{\pi}{6} = 1$



टिप्पणी

(b) यदि $\tan A = \frac{a}{b}$; $\tan B = \frac{c}{d}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan(A+B) = \frac{ad+bc}{bd-ac}$.

(c) $\cos\frac{11\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए : (i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+A\right) = -1$

(ii) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ (iii) $\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

4.2 गुणन का योग में रूपांतरण करना और उनका विलोम

4.2.1 गुणन का योग व अन्तर में रूपांतरण

हम जानते हैं :

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

प्रथम दो सूत्रों का योग व अन्तर करने पर हमें क्रमशः प्राप्त होता है :

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \quad .....(1)$$

और $$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \quad .....(2)$$

इसी प्रकार, दूसरे दो सूत्रों का योग व अन्तर करने पर हमें क्रमशः प्राप्त होता है :

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \quad ....(3)$$

और $$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B) \quad ....(4)$$

हम इन्हें इस प्रकार भी कह सकते हैं :

2 sin A cos B = sin (योग) + sin (अन्तर)

2 cos A sin B = sin (योग) – sin (अन्तर)

2 cos A cos B = cos (योग) + cos (अन्तर)

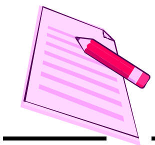
2 sin A sin B = cos (अन्तर) – cos (योग)

4.2.2 योग व अन्तर का गुणन में रूपातंरण

उपरोक्त परिणामों में $A+B=C$ और $A-B=D$ रखिए।

तब $A = \frac{C+D}{2}$ और $B = \frac{C-D}{2}$ तथा (1), (2), (3) तथा (4) बन जाते हैं :

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$



$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos D - \cos C = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

4.2.3 योग व अन्तर सूत्रों के कुछ और अनुप्रयोग

हमें सिद्ध करेंगे कि (i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$ या $\cos^2 B - \sin^2 A$

उपपत्ति : (i) $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$$= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$$

$$= \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B$$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$$= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)(\cos A\cos B + \sin A\sin B)$$

$$= \cos^2 A\cos^2 B - \sin^2 A\sin^2 B$$

$$= \cos^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\cos^2 A)\sin^2 B = \cos^2 A - \sin^2 B$$

$$= (1-\sin^2 A) - (1-\cos^2 B) = \cos^2 B - \sin^2 A$$

उदाहरण 4.4. निम्नलिखित गुणनों को योग व अन्तर के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $2\sin 3\theta\cos 2\theta$ (ii) $\cos 6\theta\cos\theta$ (iii) $\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

हल : (i) $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin(3\theta+2\theta) + \sin(3\theta-2\theta) = \sin 5\theta + \sin\theta$

(ii) $$\cos 6\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(2\cos 6\theta\cos\theta) = \frac{1}{2}[\cos(6\theta+\theta) + \cos(6\theta-\theta)]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 7\theta + \cos 5\theta)$$

(iii) $$\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi-\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{5\pi+\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right]$$

उदाहरण 4.5. निम्नलिखित योग को गुणन के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}$ (ii) $\sin\frac{5\pi}{36} + \cos\frac{7\pi}{36}$

हल: (i) $\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=2\cos\frac{5\pi+7\pi}{9\times 2}\cos\frac{5\pi-7\pi}{9\times 2}$

$$=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} \qquad \left[\because \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)=\cos\frac{\pi}{9}\right]$$

$$=2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{9}=-2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$=-\cos\frac{\pi}{9} \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right]$$

(ii) $\sin\frac{5\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{13\pi}{36}\right)+\cos\frac{7\pi}{36}=\cos\frac{13\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36}$

$$=2\cos\frac{13\pi+7\pi}{36\times 2}\cos\frac{13\pi-7\pi}{36\times 2}=2\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{12}$$

उदाहरण 4.6. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\cos 7A-\cos 9A}{\sin 9A-\sin 7A}=\tan 8A$

हल : बायाँ पक्ष $=\frac{2\sin\frac{7A+9A}{2}\sin\frac{9A-7A}{2}}{2\cos\frac{9A+7A}{2}\sin\frac{9A-7A}{2}}=\frac{\sin 8A\sin A}{\cos 8A\sin A}=\frac{\sin 8A}{\cos 8A}$

$=\tan 8A=$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 4.7. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

(i) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)=\sin(A+B)\cos(A-B)$

(ii) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A$

हल : (i) सूत्र $\cos^2 A-\sin^2 B=\cos(A+B)\cos(A-B)$ का उपयोग करने पर

बायाँ पक्ष $=\cos\left[\frac{\pi}{4}-A+\frac{\pi}{4}-B\right]\cos\left[\frac{\pi}{4}-A-\frac{\pi}{4}+B\right]$

$=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(A+B)\right]\cos\left[-(A-B)\right]=\sin(A+B)\cos(A-B)=$ दायां पक्ष

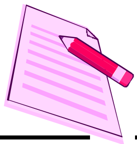
(ii) सूत्र $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B)$ का उपयोग करने पर

बायाँ पक्ष $=\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\sin A$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A=$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 4.8. सिद्ध कीजिए कि $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$

मॉड्यूल - I
समुच्चय, संबंध एवं फलन



टिप्पणी

हल : बायाँ पक्ष $= \cos\frac{\pi}{3}\left[\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[2\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9} \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9} + \frac{1}{8}\left[2\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9} + \frac{1}{8}\left[\cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9} + \frac{1}{8}\cos\frac{5\pi}{9} + \frac{1}{16} \qquad .....(1)$$

अब $$\cos\frac{5\pi}{9} = \cos\left[\pi - \frac{4\pi}{9}\right] = -\cos\frac{4\pi}{9} \qquad .....(2)$$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है : बायाँ पक्ष $= \frac{1}{16} =$ दायाँ पक्ष

देखें आपने कितना सीखा 4.3

1. निम्नलिखित को योग व अन्तर के रूप में व्यक्त कीजिए :

   (a) $2\cos 3\theta \sin 2\theta$ (b) $2\sin 4\theta \sin 2\theta$

   (c) $2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$ (d) $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$

2. निम्नलिखित में प्रत्येक को गुणन के रूप में व्यक्त कीजिए :

   (a) $\sin 6\theta + \sin 4\theta$ (b) $\sin 7\theta - \sin 3\theta$

   (c) $\cos 2\theta - \cos 4\theta$ (d) $\cos 7\theta + \cos 5\theta$

3. सिद्ध कीजिए :

   (a) $\sin\frac{5\pi}{18} + \cos\frac{4\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{9}$ (b) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{7\pi}{18}}{\sin\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9}} = 1$

   (c) $\sin\frac{5\pi}{18} - \sin\frac{7\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{18} = 0$ (d) $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = 0$

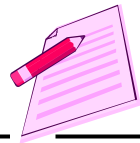
4. सिद्ध कीजिए :

   (a) $\sin^2(n+1)\theta - \sin^2 n\theta = \sin(2n+1)\theta \cdot \sin\theta$

   (b) $\cos\beta\cos(2\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2(\alpha - \beta)$

   (c) $\cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

5. सिद्ध कीजिए कि $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$, θ से स्वतंत्र है।



6. सिद्ध कीजिए :

(a) $$\frac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta} = \tan 4\theta$$

(b) $$\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18} = \frac{1}{16}$$

(c) $$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

4.3 कोणों के गुणज के त्रिकोणमितीय फलन

(a) $\sin 2A$ को $\sin A$, $\cos A$ और $\tan A$ के रुप में व्यक्त करना

हम जानते हैं कि : $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$B = A$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $\sin 2A = \sin A\cos A + \cos A\sin A = 2\sin A\cos A$

इसको इस प्रकार से भी लिखा जा सकता है :

$$\sin 2A = \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A + \sin^2 A} \qquad (\because 1 = \cos^2 A + \sin^2 A)$$

अंश और हर को $\cos^2 A$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\sin 2A = \frac{2\left(\dfrac{\sin A\cos A}{\cos^2 A}\right)}{\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

(b) $\cos 2A$ को $\sin A$, $\cos A$ और $\tan A$ के रुप में व्यक्त करना

हम जानते हैं कि : $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$B = A$ रखने पर $\cos 2A = \cos A\cos A - \sin A\sin A$

या $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

और $\cos 2A = \cos^2 A - (1-\cos^2 A) = \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$

अर्थात, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$

और $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$

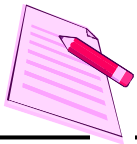
अर्थात, $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \qquad \Rightarrow \qquad \sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$

$$\therefore \quad \cos 2A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

दायें पक्ष के अंश और हर को $\cos^2 A$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

(c) $\tan 2A$ को $\tan A$ के रुप में व्यक्त करना



$$\tan 2A = \tan(A+A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

इस प्रकार हमने निम्नलिखित सूत्रों का व्युत्पन्न किया है :

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}, \quad \sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$$

उदाहरण 4.9. सिद्ध कीजिए : $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$

हल : $$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

उदाहरण 4.10. सिद्ध कीजिए : $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$

हल : $$\cot A - \tan A = \frac{1}{\tan A} - \tan A = \frac{1-\tan^2 A}{\tan A} = \frac{2(1-\tan^2 A)}{2\tan A}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\right)} = \frac{2}{\tan 2A} = 2\cot 2A$$

उदाहरण: 4.11. मान ज्ञात कीजिए : $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

हल : $$\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} + \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} = 1$$

उदाहरण 4.12. सिद्ध कीजिए : $\frac{\cos A}{1-\sin A} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$

हल : दायाँ पक्ष $$= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{A}{2}} = \frac{1+\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)}{\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)^2}$$

[अंश और हर को $\left(\frac{\cos A}{2} - \frac{\sin A}{2}\right)$ से गुणा करने पर]

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2} - 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}} = \frac{\cos A}{1 - \sin A} = \text{बायाँ पक्ष}$$

देखें आपने कितना सीखा 4.4

1. यदि $A = \frac{\pi}{3}$ तो सत्यापित कीजिए :

   (a) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

   (b) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

2. $\sin 2A$ का मान ज्ञात कीजिए जब $0 < A < \frac{\pi}{2}$ हो :

   (a) $\cos A = \frac{3}{5}$ (b) $\sin A = \frac{12}{13}$ (c) $\tan A = \frac{16}{63}$

3. $\cos 2A$ का मान ज्ञात कीजिए यदि :

   (a) $\cos A = \frac{15}{17}$ (b) $\sin A = \frac{4}{5}$ (c) $\tan A = \frac{5}{12}$

4. $\tan 2A$ का मान ज्ञात कीजिए यदि :

   (a) $\tan A = \frac{3}{4}$ (b) $\tan A = \frac{a}{b}$

5. $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

6. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

   (a) $\frac{1 + \sin 2A}{1 - \sin 2A} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + A\right)$ (b) $\frac{\cot^2 A + 1}{\cos^2 A - 1} = \sec 2A$

7. सिद्ध कीजिए कि :

   (a) $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cos A$ (b) $\tan A + \cot A = 2\,\text{cosec}\,2A$

8. सिद्ध कीजिए कि : (a) $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)$

   (b) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2}$

4.3.1 3A के त्रिकोणमितीय फलन A के रूप में

(a) **sin 3A, sin A के रूप में**

सूत्र $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ में $B = 2A$ रखने पर

हमें प्राप्त होता है : $\sin(A+2A) = \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A$

$$= \sin A\left(1 - 2\sin^2 A\right) + \left(\cos A \times 2\sin A \cos A\right)$$

$$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A\left(1 - \sin^2 A\right)$$

$$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A - 2\sin^3 A$$

$\therefore \quad \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ ....(1)

(b) **cos 3A, cos A के रूप में**

सूत्र $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ के रुप में $B = 2A$ रखने पर

हमें प्राप्त होता है : $\cos(A+2A) = \cos A \cos 2A - \sin A \sin 2A$

$$= \cos A\left(2\cos^2 A - 1\right) - (\sin A) \times 2\sin A \cos A$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A\left(1 - \cos^2 A\right)$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$$

$\therefore \quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ ....(2)

(c) **tan 3A, tan A के रूप में**

सूत्र $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ में $B = 2A$ रखने पर,

हमें प्राप्त होता है : $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

$$\tan(A+2A) = \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A} = \frac{\tan A + \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}{1 - \tan A \times \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan A - \tan^3 A + 2\tan A}{1-\tan^2 A}}{\dfrac{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

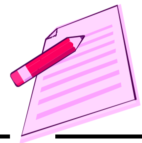
(d) $\sin^3 A$ और $\cos^3 A$ के लिए सूत्र

$\because \quad \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\therefore \quad 4\sin^3 A = 3\sin A - \sin 3A$ या $\sin^3 A = \dfrac{3\sin A - \sin 3A}{4}$

इसी प्रकार, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\therefore \quad 3\cos A + \cos 3A = 4\cos^3 A$ या $\cos^3 A = \dfrac{3\cos A + \cos 3A}{4}$



टिप्पणी

उदाहरण 4.13. सिद्ध कीजिए : $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$

हल : $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\sin\alpha\left[\cos 2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}\right]$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\left[1-2\sin^2\alpha-\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{3}\right)\right]=2.\frac{1}{2}\sin\alpha\left[\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\alpha\right]$$

$$=\sin\alpha\left[\frac{3}{4}-\sin^2\alpha\right]=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

उदाहरण 4.14. सिद्ध कीजिए : $\cos^3 A\sin 3A+\sin^3 A\cos 3A=\frac{3}{4}\sin 4A$

हल : $\cos^3 A\sin 3A+\sin^3 A\cos 3A$

$$=\cos^3 A\left(3\sin A-4\sin^3 A\right)+\sin^3 A\left(4\cos^3 A-3\cos A\right)$$

$$=3\sin A\cos^3 A-4\sin^3 A\cos^3 A+4\sin^3 A\cos^3 A-3\sin^3 A\cos A$$

$$=3\sin A\cos^3 A-3\sin^3 A\cos A$$

$$=3\sin A\cos A\left(\cos^2 A-\sin^2 A\right)=\left(3\sin A\cos A\right)\cos 2A$$

$$=\frac{3\sin 2A}{2}\times\cos 2A=\frac{3}{2}.\frac{\sin 4A}{2}=\frac{3}{4}\sin 4A.$$

उदाहरण 4.15. सिद्ध कीजिए : $\cos^3\frac{\pi}{9}+\sin^3\frac{\pi}{18}=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{18}\right)$

हल : बायाँ पक्ष $=\frac{1}{4}\left[3\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}\right]+\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{18}\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{18}\right]=\text{दायाँ पक्ष}$$

देखें आपने कितना सीखा 4.5

1. यदि $A=\frac{\pi}{3}$ हो, तो सत्यापित कीजिए :

   (a) $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$ (b) $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$

   (c) $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

2. $\sin 3A$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $\sin A=\frac{2}{3}$ (b) $\sin A=\frac{p}{q}$, हो।

3. $\cos 3A$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $\cos A=-\frac{1}{3}$ (b) $\cos A=\frac{c}{d}$ हो।

4. सिद्ध कीजिए : $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha.$

5. (a) सिद्ध कीजिए : $\sin^3\frac{2\pi}{9}-\sin^3\frac{\pi}{9}=\frac{3}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\right)$

   (b) सिद्ध कीजिए : $\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}$ किसी भी 'A' के त्रिकोणमितीय अनुपात से स्वतंत्र है।

6. (a) सिद्ध कीजिए : $\cot 3A=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}$

   (b) सिद्ध कीजिए : $\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A=8\cos A\cos^3 3A$

4.4 अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय फलन

कोण $\frac{A}{2},\frac{A}{3},\frac{A}{4}$ आदि कोण A के अपवर्तक कोण कहलाते हैं।

यह सिद्ध किया जा चुका है कि

$$\sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2},\ \cos^2 A=\frac{1+\cos 2A}{2},\ \tan^2 A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$$

A को $\frac{A}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर हमें आसानी से अपवर्तक कोण $\frac{A}{2}$ के निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होते हैं:

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\ \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \text{ और } \tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

हम धनात्मक या ऋणात्मक चिन्ह में से कोई सा भी चुन सकते हैं, जो इस बात पर निर्भर करता है कि $\frac{A}{2}$ के मान के लिए फलन का संगत मान धनात्मक है या ऋणात्मक।

यह आपको निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगा :

उदाहरण 4.16. $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ और $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : हम सूत्र $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ का उपयोग करेंगे और '–' चिन्ह लेंगे क्योंकि $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ ऋणात्मक होता है।

$$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

इसी प्रकार $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

उदाहरण 4.17. यदि $\cos A = \frac{7}{25}$ और $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ हो, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin\frac{A}{2}$ (ii) $\cos\frac{A}{2}$ (iii) $\tan\frac{A}{2}$

हल : A चौथे चतुर्थांश में आता है अर्थात् $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi \Rightarrow 3\frac{\pi}{4} < \frac{A}{2} < \pi$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} > 0,\ \cos\frac{A}{2} < 0,\ \tan\frac{A}{2} < 0$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{32}{50}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

तथा
$$\tan\frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{1+\frac{7}{25}}} = -\sqrt{\frac{18}{32}} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

देखें आपने कितना सीखा 4.6

1. यदि $A = \frac{\pi}{3}$ तो सत्यापित कीजिए :

   (a) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ (b) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ (c) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

2. $\sin\frac{\pi}{12}$ और $\sin\frac{\pi}{24}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\sin\frac{\pi}{8}$ (b) $\cos\frac{\pi}{8}$ (c) $\tan\frac{\pi}{8}$.

4.5 त्रिकोणमितीय समीकरण

आप बीजगणित में समीकरण जैसे साधारण रैखिक समीकरण, द्विघात समीकरण आदि से परिचित है। आपने उन्हें हल करना भी सीखा है।

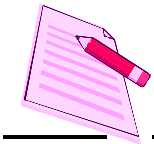
इस प्रकार (i) $x - 3 = 0$ का केवल एक हल है।

(ii) $x^2 - 9 = 0$ से x के दो मान मिलते हैं।

आपने देखा होगा कि x के मान समीकरण की घात पर निर्भर करते हैं। अब यदि x और y के स्थान पर त्रिकोणमितीय अनुपात हों तो क्या होगा, हम इस बात पर विचार करेंगे।

इस प्रकार समीकरण $\sin\theta - 1 = 0$ से प्राप्त होगा

$$\sin\theta = 1 \text{ तथा } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$$



स्पष्टत: सरल समीकरण के सीमित मान हों, यह बात त्रिकोणमितीय समीकरण में आवश्यक नहीं कि सत्य हो।

अब हम इस प्रकार के समीकरणों को हल करने की विधि सीखेंगे।

4.5.1 समीकरण $\sin\theta = \sin\alpha$ का व्यापक हल ज्ञात करना

दिया है कि $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \sin\theta - \sin\alpha = 0$

या $$2\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$$

$\therefore$ या तो $\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0$ अथवा $\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{\theta+\alpha}{2} = (2p+1)\frac{\pi}{2}$ अथवा $\frac{\theta-\alpha}{2} = q\pi,\ p, q \in z$ (पूर्णांको का समुच्चय)

$\Rightarrow \quad \theta = (2p+1)\pi - \alpha$ अथवा $\theta = 2q\pi + \alpha$ ....(1)

(1) से हमें समीकरण $\sin\theta = \sin\alpha$ का व्यापक हल प्राप्त होता है

$$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in z$$

4.5.2 समीकरण $\cos\theta = \cos\alpha$ का व्यापक हल ज्ञात करना

दिया है कि $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \cos\theta - \cos\alpha = 0$

$$\Rightarrow \quad -2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ या तो $\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ अथवा $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{\theta+\alpha}{2} = p\pi$ अथवा $\frac{\theta-\alpha}{2} = q\pi,\ p, q \in z$

$\Rightarrow \quad \theta = 2p\pi - \alpha$ अथवा $\theta = 2p\pi + \alpha$ ....(1)

(1) से हमें समीकरण $\cos\theta = \cos\alpha$ का व्यापक हल प्राप्त होता है

$$\theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in z$$

4.5.3 समीकरण $\tan\theta = \tan\alpha$ का व्यापक हल ज्ञात करना

दिया गया है कि $\tan\theta = \tan\alpha$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$$

$\Rightarrow \quad \sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta = 0 \Rightarrow \sin(\theta-\alpha) = 0$

$\Rightarrow \quad \theta - \alpha = n\pi,\ n \in z \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha \quad n \in z$

इसी प्रकार $\quad \text{cosec}\ \theta = \text{cosec}\,\alpha$ का व्यापक हल है :

$$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$$

और $\quad \sec\theta = \sec\alpha$ के लिए व्यापक हल है : $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

और $\quad \cot\theta = \cot\alpha$ के लिए व्यापक हल है : $\theta = n\pi + \alpha$

उदाहरण 4.18. निम्नलिखित समीकरणों में प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

(a) (i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

(c) $\cot\theta = -\sqrt{3}$ (d) $4\sin^2\theta = 1$

हल : (a) (i) $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ $\quad \therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6},\ n \in z$

(ii) $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3},\ n \in z$

(b) (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ $\quad \therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in z$

(ii) $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$ $\quad \therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in z$

(c) $\cot\theta = -\sqrt{3}$

$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \quad \theta = n\pi + \frac{5\pi}{6},\ n \in z$

(d) $4\sin^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = \sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in z$

उदाहरण 4.19. निम्नलिखित में प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

(a) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0$ (b) $\cos 4x = \cos 2x$

(c) $\cos 3x = \sin 2x$ (d) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

हल : (a) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0 \Rightarrow 2\left(1 - \sin^2\theta\right) + 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0 \Rightarrow (2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = -\frac{1}{2}$ या $\sin\theta = 2$

क्योंकि $\sin\theta = 2$ संभव नहीं है,

$\therefore \quad \sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6}$

$$\therefore \qquad \theta = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{7\pi}{6}, \; n \in z$$

(b) $\cos 4x = \cos 2x$ अर्थात $\cos 4x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \quad -2\sin 3x \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad \sin 3x = 0$ या $\sin x = 0$

$\Rightarrow \quad 3x = n\pi$ या $x = n\pi$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{n\pi}{3}$ या $x = n\pi, \quad n \in z$

(c) $\cos 3x = \sin 2x \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow \quad 3x = 2n\pi \pm \left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right), \quad n \in z$

केवल + चिन्ह लेने पर, हमें प्राप्त होगा $3x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} - 2x$

$\Rightarrow \quad 5x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2n\pi}{5} + \dfrac{\pi}{10}$

अब '–' चिन्ह लेने पर, हमें प्राप्त होता है : $3x = 2n\pi - \dfrac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x = 2n\pi - \dfrac{\pi}{2}, \; n \in z$

(d) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$ या $(\sin 6x + \sin 2x) + \sin 4x = 0$

या $2\sin 4x \cos 2x + \sin 4x = 0$ या $\sin 4x\,[2\cos 2x + 1] = 0$

$\therefore \quad \sin 4x = 0$ या $\cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad 4x = n\pi$ या $2x = 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}, \; n \in z$

$x = \dfrac{n\pi}{4}$ या $x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}, \quad n \in z$

देखें आपने कितना सीखा 4.7

1. निम्न में प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$ (iii) $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ (ii) $\sec\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sec\theta = -\sqrt{2}$

3. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\tan\theta = -1$ (ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$ (iii) $\cot\theta = -1$

4. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}$ (ii) $\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}$ (iii) $\tan 3\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (iv) $\cos 3\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(v) $\sin^2\theta = \dfrac{3}{4}$ (vi) $\sin^2 2\theta = \dfrac{1}{4}$ (vii) $4\cos^2\theta = 1$ (viii) $\cos^2 2\theta = \dfrac{3}{4}$

5. निम्नलिखित में प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

(i) $2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$ (ii) $4\cos^2\theta - 4\sin\theta = 1$

(iii) $\cot\theta + \tan\theta = 2\,\text{cosec}\,\theta$

आइए दोहराएँ

- $\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A \sin B$,

  $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

  $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$, $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

  $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$, $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

- $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

  $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

  $2\cos A \cos B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

  $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

- $\sin C + \sin D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$

  $\sin C - \sin D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$

  $\cos C + \cos D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$

  $\cos C - \cos D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2}$

- $\sin(A+B)\cdot\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

  $\cos(A+B)\cdot\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

- $\sin 2A = 2\sin A \cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
- $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
- $\sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}, \quad \cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}, \quad \tan^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$
- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A, \quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

  $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
- $\sin^3 A = \dfrac{3\sin A - \sin 3A}{4}, \quad \cos^3 A = \dfrac{3\cos A + \cos 3A}{4}$
- $\sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}, \quad \cos\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$

  $\tan\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$
- $\sin\theta = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi + (-1)^n\alpha, \quad n \in z$
- $\cos\theta = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \theta = 2n\pi \pm \alpha, \quad n \in z$
- $\tan\theta = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi + \alpha, \quad n \in z$

सहायक वेबसाइट

- *http://mathworld.wolfram.com/ Trigonometric_functions.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_functions*

आइए अभ्यास करें

1. सिद्ध कीजिए : $\tan(A+B)\times\tan(A-B) = \dfrac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 B - \sin^2 A}$

2. सिद्ध कीजिए : $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$

3. यदि $A + B = \dfrac{\pi}{4}$ हो, तो

   सिद्ध कीजिए : $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ और $(\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2$

4. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

   (i) $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} + \dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} = 0$

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{10}-A\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}+A\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}-A\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}+A\right)=\cos 2A$

(iii) $\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{8}$ (iv) $\cos\frac{13\pi}{45}+\cos\frac{17\pi}{45}+\cos\frac{43\pi}{45}=0$

(v) $\tan\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\cot\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sin 2A-\sin\frac{\pi}{3}}$

(vi) $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$ (vii) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\tan 2\theta+\sec 2\theta$

(viii) $\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

(ix) $\cos^2 A+\cos^2\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$

(x) $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}$ (xi) $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{7\pi}{30}\cos\frac{11\pi}{30}\cos\frac{13\pi}{30}=\frac{11}{16}$

(xii) $\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{13\pi}{10}=-\frac{1}{2}$

5. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{2}$

6. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\cos\theta=\frac{1}{2}$ (b) $\sec\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sec\theta=-2$

7. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\tan\theta=1$ (b) $\tan\theta=-1$ (c) $\cot\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

8. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$ (b) $4\cos^2\theta=1$ (c) $2\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

9. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\cos p\theta=\cos q\theta$ (b) $\sin 9\theta=\sin\theta$ (c) $\tan 5\theta=\cot\theta$

10. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin m\theta+\sin n\theta=0$ (b) $\tan m\theta+\cot n\theta=0$

(c) $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$ (d) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta=0$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 4.1

1. (a) (i) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{21}{221}$

2. (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

देखें आपने कितना सीखा 4.2

1. (i) $\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{2}$ (ii) $-\frac{1}{4}$ 2. (c) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$

देखें आपने कितना सीखा 4.3

1. (a) $\sin 5\theta - \sin\theta$; (b) $\cos 2\theta - \cos 6\theta$

   (c) $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}$ (d) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6}$

2. (a) $2\sin 5\theta\cos\theta$ (b) $2\cos 5\theta \cdot \sin 2\theta$

   (c) $2\sin 3\theta \cdot \sin\theta$ (d) $2\cos 6\theta \cdot \cos\theta$

देखें आपने कितना सीखा 4.4

2. (a) $\frac{24}{25}$ (b) $\frac{120}{169}$ (c) $\frac{2016}{4225}$

3. (a) $\frac{161}{289}$ (b) $\frac{-7}{25}$ (c) $\frac{119}{169}$

4. (a) $\frac{24}{7}$ (b) $\frac{2ab}{b^2 - a^2}$ 5. 1

देखें आपने कितना सीखा 4.5

2. (a) $\frac{22}{27}$ (b) $\frac{(3pq^2 - 4p^3)}{q^3}$ 3. (a) $\frac{23}{27}$ (b) $\frac{4c^3 - 3cd^2}{d^3}$

देखें आपने कितना सीखा 4.6

2. (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}}{2\sqrt{2}}$

3. (a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (c) $\sqrt{2}-1$

देखें आपने कितना सीखा 4.7

1. (i) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, n \in z$ (ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, n \in z$

   (iii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, n \in z$ (iv) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{4}, n \in z$

2. (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in z$ (ii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in z$

   (iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in z$ (iv) $\theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}, n \in z$

3. (i) $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}, n \in z$ (ii) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in z$

   (iii) $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}, n \in z$

4. (i) $\theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}, n \in z$ (ii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in z$

   (iii) $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, n \in z$ (iv) $\theta = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18}, n \in z$

   (v) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$ (vi) $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, n \in z$

   (vii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$ (viii) $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, n \in z$

5. (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in z$ (ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in z$

   (iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$

आइये अभ्यास करें

5. (a) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, n \in z$ (b) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, n \in z$

   (c) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{4}, n \in z$ (d) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, n \in z$

6. (a) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$ (b) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in z$

   (c) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in z$ (d) $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in z$

7. (a) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in z$ (b) $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}, n \in z$

   (c) $\theta = n\pi + \frac{2\pi}{3}, n \in z$

मॉड्यूल - I

समुच्चय, संबंध एवं फलन

टिप्पणी

8. (a) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in z$ (b) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$

(c) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in z$

9. (a) $\theta = \frac{2n\pi}{p \mp q}, n \in z$ (b) $\theta = \frac{n\pi}{4}$ or $(2n+1)\frac{\pi}{10}, n \in z$

(c) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{12}, n \in z$

10. (a) $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{m-n}$ or $\frac{2k\pi}{m+n}, k \in I$ (b) $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2(m-n)}, k \in z$

(c) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ or $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in z$

(d) $\theta = \frac{2n\pi}{5}$ or $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in I$ or $\theta = (2n-1)\pi, n \in z$