311hi06

6

अनुक्रम तथा श्रेणियां

उत्तरोत्तर संख्याएँ जिसमें से एक संख्या पहले नियुक्त होती है, उसके बाद दूसरी, उसके बाद तीसरी और इस प्रकार बढ़ता हुआ संख्या क्रम एक अनुक्रम कहलाता है। अनुक्रमों के व्यापक उपयोग हैं। इस पाठ में हम विशेष प्रकार के अनुक्रमों की चर्चा करेंगे, जिन्हें समान्तर अनुक्रम, गुणोत्तर अनुक्रम कहते हैं और दो दी हुई संख्याओं के मध्य समान्तर माध्य (A.M), गुणोत्तर माध्य (G.M) ज्ञात करेंगे। हम समान्तर माध्य और गुणोत्तर माध्य में सम्बन्ध भी स्थापित करेंगे।

आइए निम्न समस्याओं पर विचार करें :

(a) एक आदमी नवजात खरगोशों का एक जोड़ा एक दरबे में रखता है और निश्चित अवधि के पश्चात् कितने खरगोश होंगे यह जानना चाहता है। एक खरगोश का जोड़ा अपने जन्म के दो महीनों के पश्चात बच्चे पैदा करना प्रारम्भ करेगा, और उसके बाद प्रत्येक महीने में एक नया जोड़ा खरगोशों का दिखाई पड़ेगा। प्रारंभ में खरगोशों के उसी दरबे में केवल एक जोड़ा खरगोशों का होगा, दूसरे महीने में वही जोड़ा होगा, तीसरे महीने में उसके पास उसी दरबे में खरगोशों के तीन जोड़े होंगे। इस प्रकार खरगोशों के जोड़ों की संख्या क्रमागत महीनों में 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... होगी।

(b) आवर्ती दशमलव $0.\bar{3}$ को योग के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$0.\bar{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots$$

(c) एक व्यक्ति पहले दिन 10 रुपये कमाता है, दूसरे दिन 30 रुपये, तीसरे दिन 50 रुपये इत्यादि। तो व्यक्ति की दिन प्रतिदिन की कमाई (रू. में) इस प्रकार लिख सकते हैं

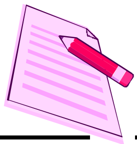
10, 30, 50, 70, 90, $\cdots$

हम किसी विशेष महीने के 10 वें दिन की उसकी कमाई पूछ सकते हैं।

पुनः निम्नलिखित अनुक्रमों पर विचार करें :

(1) $2, 4, 8, 16, \cdots$ (2) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots$ (3) $0.01, 0.0001, 0.000001, \cdots$

इन तीन अनुक्रमों में पहले पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद एक निश्चित अनुक्रम में हैं, लेकिन पहले दिये तीन प्रश्नों से क्रम में अलग हैं। इस पाठ में हम उन अनुक्रमों पर चर्चा करेंगे जिन श्रेणियों का एक निश्चित क्रम है।



उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- अनुक्रम (श्रेणी) की अवधारणा का वर्णन करना;
- समान्तर श्रेणी को परिभाषित करना तथा उदाहरणों का प्रमाण (उल्लेख) देना;
- समान्तर श्रेणी का व्यापक पद तथा सार्व अन्तर ज्ञात करना;
- a, d, n तथा t_n में से कोई तीन पद (राशि) दी हो, तब समान्तर श्रेणी की चौथी राशि प्राप्त करना;
- समान्तर श्रेणी के दो पद दिए गये हों तब सार्वअन्तर या कोई अन्य पद ज्ञात करना;
- A.P. के प्रथम n पदों का योग का सूत्र व्युत्पन्न करना;
- S, n, a तथा d में से कोई तीन रशियाँ दी हुई हों तो A.P. की चौथी राशि की गणना करना;
- दो संख्याओं के मध्य समान्तर माध्य अन्तर्निविष्ट करना रखना;
- A.P. की अवधारणा का उपयोग करके दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करना;
- दिखाना कि G.P. एक अनुक्रम है जो एक निश्चित शून्येतर संख्या (एक के अतिरिक्त) के गुणन से प्राप्त होती है
- श्रेणियों के समुच्चय से G.P. पहचानना
- G.P. का व्यापक पद और सार्वअनुपात ज्ञात करना
- t_n, a, r तथा n में से कोई तीन राशियाँ दी हों तो, G.P. की चौथी राशि की गणना करना
- G.P. के सार्व अनुपात तथा किसी अन्य पद की गणना करना जब इसके कोई दो पद दिए गये हैं;
- अनुक्रम लिखना, जब व्यापक पद दिया हो;
- G.P. के प्रथम n पदों का योग का सूत्र व्युत्पन्न करना;
- यदि a, r, n तथा S में से कोई तीन राशियाँ दी हो, तो G.P. की चौथी राशि की गणना करना
- G.P. के अनन्त पदों के योग (S_∞) का सूत्र व्युत्पन्न करना, जब $|r| < 1$;
- तीसरी राशि की गणना करना, जब S_∞, a तथा r में से कोई दो राशियां दी गई हों;
- G.P. का उपयोग करके आवर्ती दशमलवों को भिन्न में परिवर्तित करना
- दो संख्याओं के मध्य G.M. अन्तर्निविष्ट करना
- समान्तर माध्य (A.M.) तथा गुणोत्तर माध्य (G.M.) के मध्य सम्बन्ध स्थापित करना

पूर्व ज्ञान

- घातांकों के नियम
- दो अज्ञात राशियों के युगपत समीकरण
- द्विघात समीकरण

6.1 अनुक्रम

अनुक्रम संख्याओं का संग्रह है जो कुछ निर्दिष्ट नियम का पालन करते हुए एक निश्चित क्रम में होते हैं। जहाँ संग्रह की एक निश्चित संख्या a_n संगत धनात्मक पूर्णांक n से सम्बन्धित हो सकती है।

अनुक्रम के लिए विभिन्न संकेत प्रयोग में लाए जाते हैं :

1. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ 2. a_n , $n = 1, 2, 3, ...$ 3. $\{a_n\}$

आइए निम्न अनुक्रमों पर विचार करें

1. $1, 2, 4, 8, 16, 32, ...$ 2. $1, 4, 9, 16, 25, ...$

3. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ 4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$

उपरोक्त उदाहरणों में, अनुक्रम के n वें पद के व्यंजक नीचे दिए गए है :

(1) $a_n = 2^{n-1}$ (2) $a_n = n^2$ (3) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (4) $a_n = \frac{1}{n}$ सभी धनात्मक पूर्णांक n के लिए।

भूमिका में पहले प्रश्न (समस्या) के लिए पदों को निम्न सम्बन्ध से प्राप्त कर सकते हैं।

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{n} \geq 3$$

परिमित अनुक्रम में पदों की संख्या परिमित होती है। अपरिमित अनुक्रम में पदों की संख्या अपरिमित होती है।

6.2 समान्तर श्रेणी

आइए संख्याओं के अनुक्रम के निम्न उदाहरणों पर विचार करें :

(1) $2, 4, 6, 8, \cdots$ (2) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$

(3) $10, 8, 6, 4, \cdots$ (4) $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \cdots$

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त संख्याओं के चार अनुक्रमों के पहले पद क्रमशः 2, 1, 10, और $-\frac{1}{2}$ हैं। पहले पद का इस पाठ में बड़ा महत्व है। अनुक्रम के प्रत्येक उत्तरोत्तर पद का पहले पद से निश्चित सम्बन्ध होता है। पदों का पहले पद से क्या सम्बन्ध है। उदाहरण (1) में

पहला पद $= 2$, दूसरा पद $= 4 = 2 + 1 \times 2$

तीसरा पद $= 6 = 2 + 2 \times 2$ चौथा पद $= 8 = 2 + 3 \times 2$ और इसी प्रकार

उपरोक्त अनुक्रम के प्रत्येक पद में 2 जोड़ने पर उत्तरोत्तर पद प्राप्त होते हैं, अर्थात् किन्ही दो क्रमागत पदों का अन्तर समान है।

इस गुण से सम्बन्धित संख्याओं का अनुक्रम, जिसमें दो क्रमागत पदों का अन्तर एक शून्येतर समान संख्या है, समान्तर श्रेणी कहलाती है जिसे सरल रूप से A. P. लिखते हैं।

दो क्रमागत पदों का अन्तर A.P. का सार्व अन्तर कहलाता है इस को d से प्रदर्शित करते हैं।

आम तौर पर A.P. जिसका प्रथम पद a, सार्वअन्तर d है, को $a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots$ भी लिख सकते हैं।

हम t_n का प्रयोग श्रेणी के n वें पद को दर्शाने में करते हैं।

6.2.1 समान्तर श्रेणी का व्यापक पद

आइए A.P. $a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots$ पर विचार करें।

यहाँ पहला पद $= a$, दूसरा पद $= a+d = a+(2-1)\,d$, तीसरा पद $= a+2d = a+(3-1)\,d$

उपरोक्त पद्धति के अवलोकन द्वारा n वाँ पद इस प्रकार लिख सकते हैं : $t_n = a+(n-1)\,d$

इसलिये यदि A.P. का प्रथम पद और सार्व अन्तर ज्ञात हैं तो श्रेणी का कोई भी पद उपरोक्त सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है।

कभी–कभी A.P. के n वें पद को n के पदों के रूप में प्रकट करते हैं उदाहरणार्थ $t_n = 2n-1$

उस स्थिति में व्यंजक में $n = 1, 2, 3, \cdots$ रखकर श्रेणी प्राप्त होगी। इस स्थिति में A.P. के पद 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$ होंगे।

टिप्पणी :

(i) यदि A.P. के प्रत्येक पद में एक शून्येतर समान संख्या जोड़ी जाए, तो परिणामी अनुक्रम पुनः A.P. ही प्राप्त होता है।

(ii) यदि A.P. के प्रत्येक पद को एक शून्येतर समान संख्या से गुणा किया जाए तो परिणामी अनुक्रम पुनः A.P. ही प्राप्त होता है।

उदाहरण 6.1. A.P. 2, 4, 6, ... का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ प्रथम पद $(a) = 2$ और सार्वअन्तर $d = 4-2 = 2$

सूत्र $t_n = a+(n-1)\,d$, का प्रयोग करके, हमें प्राप्त होता है

$$t_{10} = 2+(10-1)\,2 = 2+18 = 20$$

अतः दी गई A.P. का 10वाँ पद $= 20$

उदाहरण 6.2. किसी A.P. का 10वाँ पद – 15 और 31वाँ पद –57 है, 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि A.P. का प्रथम पद a तथा सार्वन्तर d है।

तब सूत्र $t_n = \mathrm{a} + (n - 1)\, d$, से

$$t_{10} = a + (10 - 1)\, d = a + 9d$$
$$t_{31} = a + (31 - 1)\, d = a + 30\, d$$

हमें प्राप्त हुआ

$$a + 9d = -15 \qquad ...(1)$$
$$a + 30d = -57 \qquad ...(2)$$

a और b के मान ज्ञात करने के लिये समीकरण (1) और (2) को हल कर लीजिये।

(2) में से (1) घटाने पर,

$$21d = -57 + 15 = -42$$

$$\therefore \qquad d = \frac{-42}{21} = -2$$

पुनः (1) से, $a = -15 - 9d = -15 - 9\,(-2) = -15 + 18 = 3$

अब $t_{15} = a + (15 - 1)d = 3 + 14\,(-2) = -25$

उदाहरण 6.3. A.P. 5, 11, 17, ... का कौन सा पद 119 है?

हल : यहाँ $a = 5$, $d = 11 - 5 = 6$, $t_n = 119$

हम जानते हैं कि

$$t_n = a + (n - 1)\, d$$

$$\Rightarrow \qquad 119 = 5 + (n - 1) \times 6$$

$$\Rightarrow \qquad (n - 1) = \frac{119 - 5}{6} = 19$$

$$\therefore \qquad n = 20$$

अतः A.P. का 20वाँ पद 119 है।

उदाहरण 6.4. क्या 600, A.P. 2, 9, 16, ... का कोई पद है?

हल : यहाँ $a = 2$, और $d = 9 - 2 = 7$.

मान लीजिए 600 A.P. का nवाँ पद है। हमें प्राप्त हुआ $t_n = 2 + (n - 1)\, 7$

प्रश्नानुसार $2 + (n - 1)\, 7 = 600$

$\therefore \quad (n - 1)\, 7 = 598$

या $\quad n = \dfrac{598}{7} + 1 \qquad \therefore \; n = 86\dfrac{3}{7}$

क्योंकि n एक भिन्न है। इसलिए यह श्रेणी का सदस्य नहीं हो सकता। अतः 600 दी हुई श्रेणी, A.P. का पद नहीं है।

उदाहरण 6.5. यदि $a + b + c \neq 0$ और $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ A.P. में है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ भी A.P. में होंगे।

हल : क्योंकि $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ A.P. में हैं, अतः

$$\frac{b}{c+a} - \frac{a}{b+c} = \frac{c}{a+b} - \frac{b}{c+a}$$

या $$\left(\frac{b}{c+a}+1\right) - \left(\frac{a}{b+c}+1\right) = \left(\frac{c}{a+b}+1\right) - \left(\frac{b}{c+a}+1\right)$$

या $$\frac{a+b+c}{c+a} - \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a+b+c}{a+b} - \frac{a+b+c}{c+a}$$

या $$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \quad (\text{क्योंकि } a + b + c \neq 0)$$

या $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P. में हैं।

देखें आपने कितना सीखा 6.1

1. निम्नलिखित A.P. का nवाँ पद ज्ञात कीजिए।
   (a) $1, 3, 5, 7, \cdots$ (b) $3, 5, 7, 9, \cdots$
2. यदि $t_n = 2n + 1$ हो, तो A.P. ज्ञात कीजिए।
3. A.P. $2\frac{1}{2}, 4, 5\frac{1}{2}, \ldots..$ का कौन सा पद 31 है। 10वाँ पद भी ज्ञात कीजिए।
4. क्या -292 A.P. $7, 4, 1, -2, \ldots$का कोई पद है?
5. A.P. का mवाँ पद n तथा nवाँ पद m है। दिखाइये कि इसका $(m + n)$ वाँ पद शून्य होगा।
6. तीन संख्याएँ A.P. में हैं प्रथम और अन्तिम संख्या का अन्तर 8 है और इन दोनों का गुणनफल 20 है संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
7. एक अनुक्रम का nवाँ पद $na + b$ है। सिद्ध कीजिये कि यह एक A.P. है जिसका सार्वअन्तर a है।

6.3 समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग ज्ञात करना

मान लीजिए A.P. का प्रथम पद a, सार्वअन्तर d है। माना l अन्तिम पद को व्यक्त करता है।

$$l = t_n = a + (n-1)d \qquad \ldots \text{(i)}$$

माना S_n, A.P. के प्रथम n पदों के योग को व्यक्त करता है। तो

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (l - 2d) + (l - d) + l \qquad \ldots \text{(ii)}$$

उपर्युक्त समीकरण (R.H.S.) के दायें पक्ष को उलटने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a \qquad \ldots \text{(iii)}$$

(ii) और (iii) को ऊर्ध्वाधर जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है।

$$2S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \ldots n \text{ पदों तक} = n\,(a + l) \text{ अर्थात् } S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

साथ ही $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$ [(i) से]

यह स्पष्ट है कि $t_n = S_n - S_{n-1}$

उदाहरण 6.6. $2 + 4 + 6 + \ldots$ का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 2,\ d = 4 - 2 = 2$

सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$, का प्रयोग करके हमें प्राप्त है

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1)\,2] = \frac{n}{2}[2 + 2n] = \frac{2n\,(n+1)}{2} = n\,(n+1)$$

उदाहरण 6.7. किसी A.P. का 35वाँ पद 69 है। A.P. इस के 69 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : माना A.P. का प्रथम पद a और सार्वअन्तर d है

हमें प्राप्त होता है $t_{35} = a + (35 - 1)\,d = a + 34\,d.\ \therefore\ a + 34\,d = 69$ ... (i)

सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$ से हमें प्राप्त होता है

$$S_{69} = \frac{69}{2}[2a + (69-1)\,d] = 69\,(a + 34d) \qquad \text{[(i) का प्रयोग करके]}$$

$$= 69 \times 69 = 4761$$

उदाहरण 6.8. किसी A.P. का प्रथम पद 10 और अन्तिम पद 50 है। यदि सभी पदों का योग 480 है तो सार्वअन्तर और पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त होता है $a = 10,\ l = t_n = 50,\ S_n = 480.$

a, t_n और S_n के मानों को सूत्र $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right]$ और $t_n = a + (n - 1)\,d$, में रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$480 = \frac{n}{2}\left[20 + (n-1)\,d\right] \qquad \cdots \text{(i)}$$

$$50 = 10 + (n - 1)\,d \qquad \cdots \text{(ii)}$$

समीकरण. (ii) से प्राप्त होता है: $(n - 1)\,d = 50 - 10 = 40$ ... (iii)

समीकरण. (i) से हमें प्राप्त होता है

$$480=\frac{n}{2}(20+40) \text{ या } 60n = 2\times 480 \therefore\ n=\frac{2\times 480}{60}=16$$

(iii) से, $d=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$ (क्योंकि $n-1=16-1=15$)

उदाहरण 6.9. मान लीजिए कि किसी A.P. का nवाँ पद और n पदों का योगफल क्रमशः p और q है। सिद्ध कीजिए कि इसका प्रथम पद $\left(\frac{2q-pn}{n}\right)$ है।

हल : इस स्थिति में $t_n=p$ और $S_n=q$

माना A.P. का प्रथम पद a है अब $S_n=\frac{n}{2}(a+t_n)$

या $\frac{n}{2}(a+p)=q$ या $a+p=\frac{2q}{n}$ या $a=\frac{2q}{n}-p \therefore\ a=\frac{2q-pn}{n}$

देखें आपने कितना सीखा 6.2

1. निम्न A.P. का योग ज्ञात कीजिए :

   (a) 8, 11, 14, 17,$\cdots$ 15 पदों तक (b) 8, 3, –2, –7, –12,$\cdots n$ पदों तक

2. A.P. 27, 23, 19, 15, ... के कितने पदों का योग 95 है?

3. एक व्यक्ति अपने मित्र से 1740 रुपये ब्याज मुक्त ऋण लेना चाहता है। भुगतान मासिक किस्तों में करने का वादा करता है। पहले मास में वह 200 रुपये देता है और अगले प्रत्येक मास की किस्तों में 10-10 रुपये कम करता जाता है। कितने महीने में वह पूरा भुगतान कर देगा?

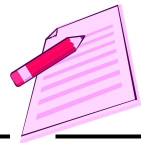
4. श्रेणी 3, 6, 9, 12, $\cdots$ में कम–से–कम कितने पद लिए जाएँ कि उनका योग 2000 से कम न हो?

5. बच्चों की आलू दौड़ में, n आलू एक–एक मीटर की दूरी पर, एक रेखा में रखे जाते हैं। एक प्रतियोगी निकटतम आलू से 5 मीटर दूर उसी रेखा में एक बिन्दु से प्रारम्भ करता है। यदि वह एक समय में जाकर एक ही आलू उठाये तथा उसे लाकर प्रारम्भिक बिन्दु पर रखे तो इस प्रकार सब आलुओं को प्रारम्भिक बिन्दु पर इकट्ठा करने में कुल चली दूरी के लिए एक व्यंजक ज्ञात कीजिए। यदि कुल चली हुई दूरी 162 मीटर हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि अनुक्रम के प्रथम n पदों का योग an^2+bn हो, तो सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम A.P. में हैं। इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

6.4 समान्तर माध्य (A.M.)

जब तीन संख्याएँ a, A और b A.P. में हों, तब A, a तथा b का समान्तर माध्य कहलाता है। हम प्राप्त करते हैं, $A-a=b-A$ या $A=\frac{a+b}{2}$



इस प्रकार दो संख्याओं का अभीष्ट A.M. $\frac{a+b}{2}$ है।

निम्न A.P. पर विचार करें: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33.

यहाँ प्रथम पद 3 और अन्तिम पद 33 के मध्य 5 पद हैं। ये पद 3 और 33 के मध्य A.M. कहलाते हैं। एक अन्य A.P. 3, 13, 23, 33, पर विचार कीजिए। इस स्थिति में 3 और 33 के मध्य दो A.M.13 और 23 हैं।

सामान्यतया, दो संख्याओं a तथा b के मध्य कितने ही A.M. अन्तर्निविष्ट किये जा सकते हैं। माना $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, a तथा b के बीच n समांतर माध्य हैं।

$a, A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n, b$ एक समांतर श्रेढ़ी है

माना इस A.P. का सार्वअन्तर d है। स्पष्टतया इसमें $(n + 2)$ पद हैं।

$\therefore \quad b = (n + 2)$वाँ पद $= a + (n + 1)\,d$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

अब $\quad A_1 = a + d \Rightarrow A_1 = \left(a + \frac{b-a}{n+1}\right) \qquad \ldots$(i)

$$A_2 = a + 2d \Rightarrow A_2 = \left(a + \frac{2(b-a)}{n+1}\right) \qquad \ldots\text{(ii)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = a + nd \Rightarrow A_n \left(a + \frac{n(b-a)}{n+1}\right) \qquad \ldots (n)$$

ये a तथा b के मध्य अभीष्ट n समांतर माध्य हैं।

(i), (ii), ..., (n) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = na + \cdots + \frac{b-a}{n+1}[1+2+\ldots n]$$

$$= na + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = na + \frac{n(b-a)}{2} = \frac{n(a+b)}{2}$$

$= n$ [a तथा b के मध्य एक समांतर माध्य]

उदाहरण 6.10. 8 और 26 के मध्य 5 समांतर माध्य अन्तर्निविष्ट कीजिये।

माना : माना 8 और 26 के मध्य 5 समांतर माध्य A_1, A_2, A_3, A_4 तथा A_5 हैं।

इसलिए 8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 26 समांतर श्रेणी में हैं। साथ ही $a = 8, b = 26, n = 7$

हम प्राप्त करते हैं $26 = 8 + (7 - 1)\,d \;\; \therefore\; d = 3$

$\therefore \quad A_1 = a + d = 8 + 3 = 11,\ A_2 = a + 2d = 8 + 2 \times 3 = 14$

$\quad A_3 = a + 3d = 17,\ A_4 = a + 4d = 20$

$\quad A_5 = a + 5d = 23$

अतः 8 और 26 के मध्य 5 समांतर माध्य 11, 14, 17, 20 और 23 हैं।

उदाहरण 6.11. 20 और 80 के मध्य n समांतर माध्य इस प्रकार हैं कि पहले समांतर माध्य और अन्तिम समांतर माध्य का अनुपात 1 : 3 है। n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ A.P. का $(n+2)$वाँ पद 80 है, प्रथम पद 20 है। माना सार्वअन्तर d है।

$\therefore \quad 80 = 20 + (n+2-1)\,d$

या $\quad 80 - 20 = (n+1)\,d$ या $d = \dfrac{60}{n+1}$

प्रथम A.M. $= 20 + \dfrac{60}{n+1} = \dfrac{20n + 20 + 60}{n+1} = \dfrac{20n+80}{n+1}$

अन्तिम A.M. $= 20 + n \times \dfrac{60}{n+1} = \dfrac{80n+20}{n+1}$

हम प्राप्त करते हैं, $\dfrac{20n+80}{n+1} : \dfrac{80n+20}{n+1} = 1 : 3$

या $\quad \dfrac{n+4}{4n+1} = \dfrac{1}{3}$ या $4n + 1 = 3n + 12$ या $n = 11$

$\therefore$ 20 और 80 के मध्य 11 A.M. हैं।

देखें आपने कितना सीखा 6.3

1. सिद्ध कीजिये कि यदि समांतर श्रेणी के पदों की संख्या विषम है तो मध्य पद पहले तथा अन्तिम पद का समांतर माध्य होगा।
2. 7 और 85 के मध्य m समांतर माध्य इस प्रकार लिये गये हैं कि $(m-3)$वें तथा m वें माध्यों का अनुपात 11 : 24 है। m का मान ज्ञात कीजिये।
3. सिद्ध कीजिये कि दो संख्याओं के मध्य n समांतर माध्यों का योग, उनके बीच अकेले समांतर माध्य का n गुना है।
4. यदि A.P. के pवें तथा qवें पदों का A.M., rवें तथा sवें पदों के A.M. के समान है तो दिखाइये कि $p + q = r + s$.

6.5 गुणोत्तर श्रेणी

आइए निम्नलिखित अनुक्रम पर विचार करें :

(1) $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ (2) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ (3) $1, -3, 9, -27, \cdots$ (4) $x, x^2, x^3, x^4, \cdots$

यदि हम उपर्युक्त सभी अनुक्रमों में पदों के प्रारूप को देखें तो पता चलता है कि प्रत्येक पद अपने से पहले पद के साथ एक विशेष नियम के द्वारा सम्बन्धित है।

जैसे उदाहरण (1) में, प्रथम पद 1 है, दूसरा पद पहले पद का दुगुना है। तीसरा पद पहले पद का 2^2 गुना है।

पुनः उदाहरण (2) में प्रथम पद 3 है, दूसरा पद पहले पद का $\frac{1}{3}$ गुना है। तीसरा पद पहले पद का $\frac{1}{3^2}$ गुना है।

इस प्रकार के अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेणी कहते हैं। संख्याओं का ऐसा अनुक्रम जिसमें किन्हीं दो क्रमागत पदों का अनुपात एक समान शून्येतर संख्या हो गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है या संक्षिप्त में उसे G. P. कहते हैं। इसका अनुपात सार्वअनुपात कहलाता है।

इस प्रकार $\frac{\text{दुसरा पद}}{\text{पहला पद}} = \frac{\text{तीसरा पद}}{\text{दुसरा पद}} =$ ..... गुणोत्तर श्रेणी का सार्वअनुपात कहलाता है।

उदाहरण (1) से (4) तक गुणोत्तर श्रेणी हैं जिनके प्रथम पद क्रमशः 1, 3, 1, x तथा सार्वअनुपात $2, \frac{1}{3}, -3$ तथा x हैं।

किसी गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक रूप जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r हो $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots$ है।

6.5.1 व्यापक पद

आइए, एक गुणोत्तर श्रेणी जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है, पर विचार करें। इस के पद हैं :

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

इस स्थिति में $t_1 = a = ar^{1-1}$, $t_2 = ar = ar^{2-1}$, $t_3 = ar^2 = ar^{3-1}$, $t_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

$\ldots \quad \ldots$

व्यापकीयकरण करने पर, हमें nवें पद का निम्न मान प्राप्त होता है

$$t_n = ar^{n-1} \qquad \ldots (A)$$

6.5.2 गुणोत्तर श्रेणी के कुछ (विशेष) गुण धर्म

(i) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के सभी पदों को किसी शून्येतर संख्या से गुणा किया जाए तो प्राप्त श्रेणी भी गुणोत्तर श्रेणी ही होगी। प्राप्त G.P. का सार्वअनुपात भी वही होगा जो मूल श्रेणी का है।

यदि $a, b, c, d, \ldots$ एक G.P. है, तो $ak, bk, ck, dk \ldots$ भी G.P. में हैं। $(k \neq 0)$

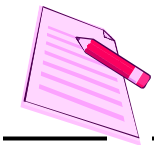
(ii) किसी G.P. के सभी पदों की घात बराबर बढ़ा दी जाए तो परिणामी श्रेणी भी G.P. में ही होगी।

माना $a, b, c, d \ldots$ G.P. में है तो $a^k, b^k, c^k, d^k, \ldots$ भी एक G.P. में है। $(k \neq 0)$

परिणामी G.P. का सार्वअनुपात मूल सार्वअनुपात की वही घात बढ़ाकर प्राप्त होगा जो श्रेणी के पदों की घात बढ़ाई है।

उदाहरण 6.12. G.P. 4, 8, 16, ... का 6वाँ पद ज्ञात कीजिए

हल : इस स्थिति में प्रथम पद $(a) = 4$ सार्वअनुपात $(r) = 8 \div 4 = 2$



सूत्र $t_n = ar^{n-1}$, द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$$t_6 = 4 \times 2^{6-1} = 4 \times 32 = 128$$

G.P. का 6वाँ पद 128 है।

उदाहरण 6.13. एक G.P. के चौथे तथा नौवें पद के मान क्रमशः 8 और 256 हैं गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

हल : G.P. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है, तब

$$t_4 = ar^{4-1} = ar^3,\ t_9 = ar^{9-1} = ar^8$$

प्रश्नानुसार, $ar^8 = 256$ $\cdots$ (1)

या $ar^3 = 8$ $\cdots$ (2)

$\therefore$ $\dfrac{ar^8}{ar^3} = \dfrac{256}{8}$ या $r^5 = 32 = 2^5 \therefore r = 2$

पुनः (2) से $a \times 2^3 = 8 \therefore a = \dfrac{8}{8} = 1$

इसलिए, G.P. है :

1, 2, 4, 8, 16, ...

उदाहरण 6.14. G.P. 5, –10, 20, – 40, ... का कौन सा पद 320 होगा?

हल : इस स्थिति में, $a = 5$; $r = \dfrac{-10}{5} = -2$. माना G.P. का nवाँ पद 320 है

सूत्र $t_n = ar^{n-1}$, द्वारा, हम प्राप्त करते हैं $t_n = 5.(-2)^{n-1}$

$\therefore$ $5.(-2)^{n-1} = 320$ (दिया है)

$\therefore$ $(-2)^{n-1} = 64 = (-2)^6 \therefore n - 1 = 6 \therefore n = 7$

इसलिए, 320 G.P. का 7वाँ पद है।

उदाहरण 6.15. यदि $a, b, c,$ और d G.P. में हैं, तो दिखाइये कि $(a + b)^2$, $(b + c)^2$ और $(c + d)^2$ भी G.P. में हैं।

हल : क्योंकि a, b, c और d G.P. में हैं, $\therefore \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c}$

$\therefore$ $b^2 = ac,\ c^2 = bd,\ ad = bc$ ...(1)

अब $(a + b)^2 (c + d)^2 = \left[(a+b)(c+d)\right]^2 = (ac + bc + ad + bd)^2$

$= (b^2 + c^2 + 2bc)^2$ ...[(1) का प्रयोग करके] $= \left[(b+c)^2\right]^2$

$\therefore$ $\dfrac{(c+d)^2}{(b+c)^2} = \dfrac{(b+c)^2}{(a+b)^2}$

इस प्रकार $(a + b)^2$, $(b + c)^2$, $(c + d)^2$ भी G.P. में हैं।

देखें आपने कितना सीखा 6.4

1. एक गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद और सार्वअनुपात क्रमशः 3 और $-\frac{1}{2}$ हैं। इसके प्रथम पाँच पद लिखिए।
2. गुणोत्तर श्रेणी 1, 2, 4, 8, 16, ... का कौन सा पद 1024 है? क्या 520 इस श्रेणी का कोई पद है?
3. तीन संख्याएँ एक गुणोत्तर श्रेणी में हैं। उनका योग 43 है तथा गुानफल 216 है। उन संख्याओं को क्रमानुसार ज्ञात कीजिये।
4. n के प्रत्येक मान के लिए किसी गुणोत्तर श्रेणी का 'n' वाँ पद 2×3^n है। तो गुणोत्तर श्रेणी का (*a*) प्रथम पद ज्ञात कीजिये (*b*) सार्वअनुपात ज्ञात कीजिये।

6.6 एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम *n* पदों का योग

माना G.P. का प्रथम पद a तथा सार्वनुपात r है। माना S_n G.P. के प्रथम 'n' पदों का योग निरूपित करता है।

इस प्रकार $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ ... (1)

(1) को r द्वारा गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$r\,S_n = ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \qquad \ldots (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow S_n - rS_n = a - ar^n$$

या $\quad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \ldots.(A)$$

$$= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad \ldots.(B)$$

(A) और (B) में कोई–न–कोई (दोनों में से एक) प्रथम n पदों का योग देता है। इस सूत्र को सुविधाजनक (उपयुक्त) प्रयोग करते हैं (A) जब $|r| < 1$ और (B) जब $|r| > 1$।

उदाहरण 6.16. G.P. 1, 3, 9, 27, ... का 10 पदों तक योग ज्ञात कीजिये।

हल : यहाँ प्रथम पद $(a) = 1$ तथा सार्वअनुपात $(r) = \frac{3}{1} = 3$

अब सूत्र $S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$, का उपयोग करने पर ($\because r > 1$) हमें प्राप्त होता है :

$$S_{10} = \frac{1.(3^{10}-1)}{3-1} = \frac{3^{10}-1}{2}$$

उदाहरण 6.17. G.P. $\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3},\ , \ldots, 81$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = \frac{1}{\sqrt{3}}; r = \sqrt{3}$ और $t_n = l = 81$

अब $t_n = 81 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^{n-1} = (\sqrt{3})^{n-2}$ $\therefore$ $(\sqrt{3})^{n-2} = 3^4 = (\sqrt{3})^8$ $\therefore n-2=8$

या $n = 10$

$$\therefore \quad S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}^{10}-1\right]}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{10}-1}{3-\sqrt{3}}$$

उदाहरण 6.18. G.P. 0.6, 0.06, 0.006, 0.0006, $\cdots$ का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 0.6 = \frac{6}{10}$ तथा $r = \frac{0.06}{0.6} = \frac{1}{10}$

सूत्र $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है [$\because r<1$]

$$S_n = \frac{\frac{6}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{6}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

अभीष्ट योग $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ है।

उदाहरण 6.19. G.P. 64, 32, 16, $\cdots$ के कितने पदों का योग $127\frac{1}{2}$ होगा?

हल : यहाँ $a = 64, r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$ (<1) और $S_n = 127\frac{1}{2} = \frac{255}{2}$.

सूत्र $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$S_n = \frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{255}{2} \qquad \text{... (दिया है)}$$

या $128\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{255}{2}$ या $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{255}{256}$

या $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{255}{256} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$ $\therefore n = 8$

इसलिए पदों की अभीष्ट संख्या 8 है।

उदाहरण 6.20. निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

2, 22, 222, ..., n पदों तक

हल : माना S योग को दर्शाता है। तब

$S = 2 + 22 + 222 + \cdots\ n$ पदों तक

$= 2\,(1 + 11 + 111 + \cdots\ n$ पदों तक$) = \dfrac{2}{9}\ (9 + 99 + 999 + \cdots\ n$ पदों तक$)$

$$= \frac{2}{9}\left\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ \ldots n\ \ \ \ \right)\right\}$$

$$= \frac{2}{9}\left\{\left(10+10^2+10^3+\ldots n\ \ \ \ \right)-\left(1+1+1+\ \ldots n\ \ \ \ \right)\right\}$$

$$= \frac{2}{9}\left\{\frac{(10^n-1)}{10-1}-n\right\} \qquad [\because 10+10^2+10^3+\cdots \text{ एक G.P. है जिसमें } r = 10>1]$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{10^n-1-9n}{9}\right] = \frac{2}{81}\left(10^n-1-9n\right)$$

उदाहरण 6. 21. श्रेणी 0.7, 0.77, 0.777, $\cdots$ का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

हल : माना S योग को दर्शाता है। तब

$S = 0.7 + 0.77 + 0.777 + \cdots\ n$ पदों तक

$= 7(0.1 + 0.11 + 0.111 + \cdots\ n$ पदों तक$) = \dfrac{7}{9}\ (0.9 + 0.99 + 0.999 + \cdots\ n$ पदों तक$)$

$= \dfrac{7}{9}\ \{(1–0.1) + (1–0.01) + (1 – 0.001) + \cdots\ n$ पदों तक$\}$

$= \dfrac{7}{9}\ \{(1 + 1 + 1 + \ldots\ n$ पदों तक$) – (0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots\ n$ पदों तक$)\}$

$$= \frac{7}{9}\left\{n-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots n\ \ \ \ \right)\right\} = \frac{7}{9}\left\{n-\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}\right\}$$

(क्योंकि r < 1)

$$= \frac{7}{9}\left\{n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\} = \frac{7}{9}\left[\frac{9n-1+10^{-n}}{9}\right] = \frac{7}{81}\left[9n-1+10^{-n}\right]$$

देखें आपने कितना सीखा 6.5

1. निम्न गुणोत्तर श्रेणियों का योग ज्ञात कीजिए :

   (a) 6, 12, 24, ... 10 पदों तक (b) $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16} -$ ... 20 पदों तक

2. G.P. 8, 16, 32, 64, $\cdots$ के कितने पदों का योग 8184 होगा?

3. सिद्ध कीजिये कि G.P. $a+b+\ldots+l$ का योग $\dfrac{bl-a^2}{b-a}$ है।

4. निम्नलिखित अनुक्रमों का योग n पदों तक ज्ञात कीजिए :

   (a) 8, 88, 888, ... (b) 0.2, 0.22, 0.222, ...

6.7 अनन्त गुणोत्तर श्रेणी

अभी तक हमने G.P. के परिमित पदों का योग करना सीखा है। अब हम G.P. के अनन्त पदों का योग ज्ञात करेंगे, जैसे $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

इसे हम इस तरह से करते हैं : यहाँ पर $a=1,\ r=\frac{1}{2}$.

G.P. nवाँ पद $t_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ है और n पदों का योग अर्थात् $S_n=\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$

अतः n का मान कितना भी बड़ा हो n पदों का योग कभी भी 2 से अधिक नहीं होगा।

अतः, यदि हम अनन्त पदों का योग करें, तो भी हम उत्तर 2 से अधिक प्राप्त नहीं करेंगे।

यह भी ध्यान दें कि असांत दशमलव भिन्न $0.\bar{3}$ वास्तव में $0.3+0.03+0.003+0.0003+\ldots$ है।

अर्थात् उपर्युक्त अनन्त अनुक्रम का योग वास्तव में $\frac{1}{3}$ है।

दूसरे शब्दों में यह देखा गया है कि हम G.P. 1, 2, 4, 8, 16, ... के अनन्त पदों का योग करें तो हम एक परिमित संख्या प्राप्त करेंगे।

अतः कभी–कभी हम G.P. के अनन्त पदों का योग ज्ञात कर सकते हैं और कभी–कभी नहीं भी। अब हम इस समस्या पर विचार करेंगे।

6.7.1 गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योग

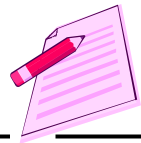
आइए अनन्त पद तथा सार्वअनुपात r वाले एक G.P. पर विचार करें :

स्थिति 1 : माना कि $|r|>1$

तब G.P. के n पदों के योग की अभिव्यक्ति की जाती है :

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a\,r^n}{r-1}-\frac{a}{r-1} \qquad \ldots (A)$$

अब, जैसे n का मान बढ़ता है तो r^n का मान भी बढ़ता है। इस प्रकार यदि n अनन्त बड़ा हो तथा $|r|>1$ तब अनन्त पदों का योग भी अनन्त बड़ा ही होगा, जिसका गणित में अधिक महत्त्व नहीं है। अब हम अन्य सम्भावना पर विचार करेंगे।



स्थिति 2 : माना $|r| < 1$

सूत्र (A) निम्न प्रकार लिखा जा सकता है। $S = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r} - \dfrac{ar^n}{1-r}$

अब यदि n का मान बढ़ता है तो r^n का मान छोटा होता जाता है, अर्थात् यदि $n \to \infty$, $r^n \to 0$ तब उपरोक्त सूत्र बन जाएगा : $S = \dfrac{a}{1-r}$

अतः एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है के योग का सूत्र

$$S = \frac{a}{1-r}, \text{ जब } |r| < 1 \text{ है} \qquad \ldots(\text{i})$$

उदाहरण 6.22. अनन्त G.P. $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{9}, \dfrac{4}{27}, -\dfrac{8}{81}, \cdots$ का योग ज्ञात कीजिए :

हल : यहाँ अनन्त G.P. का प्रथम पद $a = \dfrac{1}{3}$, और $r = \dfrac{-\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = -\dfrac{2}{3}$. यहाँ $|r| = \left|-\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3} < 1$

$\therefore$ अनन्त पदों के योग का सूत्र $S = \dfrac{a}{1-r}$ का उपयोग करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

अतः दी गई अनन्त G.P. का योग $\dfrac{1}{5}$ है।

उदाहरण 6.23. असांत दशमलव $0.\bar{3}$ को अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के रूप में लिखिये तथा उसका मान परिमेय के संख्या रूप में ज्ञात कीजिए।

हल : $0.\bar{3} = 0.3333333\ldots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \dfrac{3}{10^3} + \dfrac{3}{10^4} + \ \ldots$

उपर्युक्त श्रेणी एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी है। जिसका प्रथम पद $a = \dfrac{3}{10}$ और $r = \dfrac{\frac{3}{10^2}}{\frac{3}{10}} = \dfrac{1}{10} < 1$

अतः सूत्र $S = \dfrac{a}{1-r}$, का उपयोग करने पर हम प्राप्त करते हैं : $0.\bar{3} = \dfrac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

इस प्रकार, असांत दशमलव भिन्न $0.\bar{3} = \dfrac{1}{3}$.

उदाहरण 6.24. एक सरल लोलक द्वारा क्रमागत सेकण्डों में तय की गई दूरी 16, 12, 9, ... है। विराम अवस्था में आने तक यह कितनी दूरी तय करेगी।

हल : सरल लोलक द्वारा क्रमागत सेकण्डों में तय की गई दूरी 16, 12, 9, ... एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी है जिसका प्रथम पद $a = 16$ और r $= \frac{12}{16} = \frac{3}{4} < 1$.

सूत्र $S = \frac{a}{1-r}$ का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$S = \frac{16}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 64$$

अतः सरल लोलक द्वारा तय की गई दूरी 64 सेमी है।

उदाहरण 6.25. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग 3 है तथा इसके प्रथम दो पदों का योग $\frac{8}{3}$ है। प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

हल : इस समस्या में $S = 3$ । माना दी हुई अनन्त G.P. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है।

तब प्रश्नानुसार $a + ar = \frac{8}{3}$ या $3a(1+r) = 8$ ... (1)

$S = \frac{a}{1-r}$, से हम प्राप्त करते हैं $3 = \frac{a}{1-r}$ या $a = 3(1-r)$ ... (2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त हुआ

$$3.3\ (1-r)\ (1+r) = 8 \text{ या } 1 - r^2 = \frac{8}{9} \text{ या } r^2 = \frac{1}{9} \text{ या } r = \pm\frac{1}{3}$$

(2) से $r = \pm\frac{1}{3}$ के अनुसार $a = 3\left(1 \mp \frac{1}{3}\right) = 2$ या 4

देखें आपने कितना सीखा 6.6

(1) निम्नलिखित अनन्त गुणोत्तर श्रेणियों का योग ज्ञात कीजिए :

(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \infty$ (b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \cdots \infty$

2. निम्नलिखित असांत दशमलव भिन्नों को अनन्त G.P. के रूप में लिखिये तथा उनका मान परिमेय संख्या के रूप में ज्ञात कीजिए :

(a) $0.\overline{7}$ (b) $0.3\overline{15}$

3. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग 15 है तथा उस श्रेणी के पदों के वर्गों का योग 45 है, G.P. ज्ञात कीजिए।

4. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग $\frac{1}{3}$ है तथा इसका प्रथम पद $\frac{1}{4}$ है। गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

6.8 गुणोत्तर माध्य (G.M.)

यदि a, G, b G.P. में हैं, तब G, a तथा b का गुणोत्तर माध्य कहलाता है।

यदि तीन संख्याएँ G.P. में हैं, तब मध्य पद अन्य दो पदों का गुणोत्तर माध्य कहलाता है।

यदि $a, G_1, G_2, \ldots, G_n, b$ G.P. में हैं,

तब $G_1, G_2, \ldots, G_n$ संख्याओं a तथा b के मध्य n गुणोत्तर माध्य कहलाते हैं। n पदों का गुणोत्तर माध्य उनके गुणनफल के वर्गमूल की nवीं घात से परिभाषित होता है।

इस प्रकार यदि $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n पद हैं, तब उनका G.M. $= (a_1, a_2, \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$

माना a तथा b का गुणोत्तर माध्य G है, तब a, G, b गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \text{ या } G^2 = ab \text{ या } G = \sqrt{ab}$$

$$\therefore \quad \text{गुणोत्तर माध्य} = \sqrt{\text{चरम पदों का गुणनफल}}$$

यदि कोई दो धन संख्याएँ a तथा b दिए गये हों तो इनके मध्य कितने ही गुणोत्तर माध्य अन्तर्निविष्ट कर सकते हैं। माना a तथा b के मध्य n गुणोत्तर माध्य $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ हैं।

तब $a_1\ a_1, a_3, \ldots\ldots. a_n, b$ एक G.P. है।

इस प्रकार b श्रेणी का $(n + 2)$वाँ पद है।

$$b = a\, r^{n+1} \text{ या } r^{n+1} = \frac{b}{a} \text{ या } r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{अतः } a_1 = ar = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad a_2 = ar^2 = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$a_n = ar^n = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

आगे हम दिखा सकते हैं कि इन n G.M. का गुणनफल, a तथा b के मध्य एकल गुणोत्तर माध्य की n घात के बराबर होता है।

$a_1 . a_2, \ldots a_n$, का गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$a_1, a_2 \cdots a_n = a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}\cdots+\frac{n}{n+1}} = a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1+2+\cdots+n}{n+1}} = a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n(n+1)}{2(n+1)}}$$

$$= a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} = (ab)^{\frac{n}{2}} = \left(\sqrt{ab}\right)^n = G^n = (a \text{ तथा } b \text{ के मध्य एकल G.M.})^n$$

उदाहरण 6.26. $\frac{3}{2}$ और $\frac{27}{2}$ का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि यदि a तथा b के मध्य G गुणोत्तर माध्य हैं, तब $G = \sqrt{ab}$

$\therefore$ $\frac{3}{2}$ और $\frac{27}{2}$ का गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{27}{2}} = \frac{9}{2}$

उदाहरण 6.27. 1 और 256 के मध्य तीन G.M. अन्तर्निविष्ट कीजिये।

हल : माना 1 और 256 के मध्य तीन गुणोत्तर माध्यम G_1, G_2, G_3 हैं।

तब $1, G_1, G_2, G_3, 256$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

यदि r सार्व अन्तर हो, तब $t_5 = 256$

अर्थात् $ar^4 = 256 \Rightarrow 1.\ r^4 = 256$ या $r^2 = 16$ या $r = \pm 4$

जब $r = 4$, $G_1 = 1.\ 4 = 4$, $G_2 = 1.\ (4)^2 = 16$ और $G_3 = 1.\ (4)^3 = 64$

जब $r = -4$, $G_1 = -4$, $G_2 = (1)\ (-4)^2 = 16$ और $G_3 = (1)\ (-4)^3 = -64$

$\therefore$ 1 और 256 के मध्य G.M. हैं 4, 16, 64, या – 4, 16, –64.

उदाहरण 6.28. यदि 4, 36, 324 G.P. में हों, तो इस श्रेणी में दो पद और अन्तर्निविष्ट कीजिये जिससे कि यह पुनः G.P. बन जाये।

हल : 4 और 36 के मध्य G.M. $= \sqrt{4 \times 36} = \sqrt{144} = 12$

36 और 324 के मध्य GM $= \sqrt{36 \times 324} = 6 \times 18 = 108$

यदि हम 4 और 36 के मध्य 12 और 36 तथा 324 के मध्य 108 रख दे तब संख्याएँ 4, 12, 36, 108, 324 एक गुणोत्तर माध्य बनाते हैं।

$\therefore$ अन्तर्निविष्ट की गई दो नई संख्याएँ 12 और 108 हैं।

उदाहरण 6.29. n का मान ज्ञात कीजिए जिससे कि a तथ b का गुणोत्तर माध्य $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$ हो।

हल : यदि x, a तथा b का गुणोत्तर माध्य है, तब $x = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \quad \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}} \text{ या } a^{n+1} + b^{n+1} = \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^n + b^n\right)$$

$$\text{या} \quad a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\, b^{n+\frac{1}{2}} \text{ या } a^{n+1} - a^{n+\frac{1}{2}}.\, b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\, b^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+1}$$

$$\text{या} \quad a^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = b^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) \text{ या } a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\text{या} \quad \frac{a^{n+\frac{1}{2}}}{b^{n+\frac{1}{2}}} = 1 \text{ या } \left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \quad \therefore\ n + \frac{1}{2} = 0 \text{ या } n = \frac{-1}{2}$$

6.8.1 समांतर माध्य और गुणोत्तर माध्य के बीच सम्बन्ध

माना a और b दो संख्याएँ हैं।

माना a और b के मध्य A तथा G क्रमशः A.M. और G.M. हैं।

$$\therefore \quad A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$$

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0$$

$$\therefore \quad A > G$$

उदाहरण 6.30. दो संख्याओं का समांतर माध्य 34 तथा उनका गुणोत्तर माध्य 16 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना संख्याएँ a तथा b हैं।

$\because$ a और b के मध्य A.M. 34 है,

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2} = 34, \text{ या } a + b = 68 \qquad \ldots (1)$$

$\because$ a और b के मध्य गुणोत्तर माध्य 16 है,

$$\therefore \quad \sqrt{ab} = 16 \text{ या } ab = 256$$

हम जानते हैं कि $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4\,ab$ $\qquad \cdots (2)$

$$= (68)^2 - 4 \times 256 = 4624 - 1024 = 3600$$

$$\therefore \quad a - b = \sqrt{3600} = 60 \qquad \cdots (3)$$

(1) और (3) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त हुआ $2a = 128 \therefore a = 64$

(1) में से (3) घटाने पर, हमें प्राप्त हुआ $2b = 8$ या $b = 4$

$\therefore$ अभीष्ट संख्याएँ 64 और 4 हैं।

उदाहरण 6.31. दो राशियों b तथा c का समांतर माध्य a और उनके मध्य दो गुणोत्तर माध्य g_1 तथा g_2 हैं। सिद्ध कीजिये कि $g_1^3 + g_2^3 = 2\,abc$

हल : b और c के मध्य A.M. a है $\therefore \dfrac{b+c}{2} = a$, या $b + c = 2a$

पुनः g_1 और g_2, b और c के मध्य दो G.M. हैं। $\therefore$ b, g_1, g_2, c G.P. में हैं।

यदि r सार्व अनुपात है, तब $c = br^3$ या $r = \left(\dfrac{c}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$g_1 = br = b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ और } g_2 = br^2 = b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$$

मॉड्यूल - II
अनुक्रम तथा श्रेणियां

टिप्पणी

$$\therefore \quad g_1{}^3 + g_1{}^3 = b^3\left[\left(\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}\right)^2\right] = b^3 \times \frac{c}{b}\left(1+\frac{c}{b}\right) = b^2 c \times \left(\frac{b+c}{b}\right)$$

$$= bc\,(2a) = 2abc \qquad [\because\ b + c = 2a]$$

उदाहरण 6.32. G.P. के प्रथम तीन पदों का गुणनफल 1000 है। यदि हम इसके दूसरे पद में 6 तथा तीसरे पद में 7 जोड़ दें तो तब ये तीनों पद A.P. बनाते हैं। G.P. के पद ज्ञात कीजिए।

हल : माना $t_1 = \frac{a}{r}, t_2 = a$ और $t_3 = ar$ G.P. के प्रथम तीन पद हैं।

तब उनका गुणनफल $= \frac{a}{r}.\ a.\ ar = 1000$ या $a^3 = 1000$, या $a = 10$

प्रश्न द्वारा, $t_1, t_2 + 6, t_3 + 7$ A.P. में हैं। ...(1)

$\therefore \quad \frac{a}{r}, a + 6, ar + 7$ A. P. में हैं। $\Rightarrow (a + 6) - \frac{a}{r} = (ar + 7) - (a + 6)$

या $\quad 2(a+6) = \frac{a}{r} + (ar+7)$

या $\quad 2(10+6) = \frac{10}{r} + (10r+7)$ [(1) का प्रयोग करने पर]

या $\quad 32r = 10 + 10\,r^2 + 7r$

या $\quad 10r^2 - 25r + 10 = 0$

$$\therefore \quad r = \frac{25 \pm \sqrt{625-400}}{20} = \frac{25 \pm 15}{20} = 2, \frac{1}{2}$$

जब $a = 10, r = 2$ तब पद हैं $\frac{10}{2}$, $10(2)$ या 5, 10, 20

जब $a = 10,\ r = \frac{1}{2}$ तब पद हैं $10(2), 10, 10\left(\frac{1}{2}\right)$ या 20, 10, 5

देखें आपने कितना सीखा 6.7

1. 8 तथा $\frac{1}{64}$ के मध्य 8 G.M. अन्तर्निविष्ट कीजिए।

2. यदि a तथा b के मध्य n गुणोत्तर माध्यों में से a_1 प्रथम गुणोत्तर माध्य है, तो सिद्ध कीजिए कि $a_1{}^{n+1} = a^n\, b$

3. यदि a तथा b का गुणोत्तर माध्य G है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{G^2 - a^2} + \frac{1}{G^2 - b^2} = \frac{1}{G^2}$

4. यदि दो संख्याओं के मध्य A.M. तथा G.M. का अनुपात $m : n$ है तो सिद्ध कीजिये कि संख्याएँ $m+\sqrt{m^2-n^2}$: $m-\sqrt{m^2-n^2}$ के अनुपात में होंगी।

5. यदि दो संख्याओं a तथा b के मध्य A और G क्रमशः समांतर तथा गुणोत्तर माध्य हैं तो दिखाइये कि A > G.

6. एक G.P. के प्रथम तीन पदों का योग $\frac{13}{12}$ तथा उनका गुणनफल –1 है। G.P. ज्ञात कीजिए।

7. एक G.P. के प्रथम तीन पदों का गुणनफल 512 है। यदि प्रथम पद में 8 तथा दूसरे पद में 6 जोड़ दिया जाए तो संख्याएँ बनाती हैं। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

आइये दोहराएँ

- एक अनुक्रम जिसके दो क्रमागत पदों का अनुपात हमेशा नियत रहता है गुणोत्तर श्रेणी कहलाता है।
- समांतर श्रेणी $a, a+d, a+2d, \ldots$ का व्यापक पद $t_n = a + (n-1)\, d$ द्वारा प्राप्त होता है।
- A.P. $a, a+d, a+2d, \ldots$ के प्रथम n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)\,d\right] = \frac{n}{2}\,(a+l), \text{ जहाँ } l = a+(n-1)\,d.$$

- एक अनुक्रम जिसके दो क्रमागत पदों का अन्तर हमेशा नियत रहता है, समांतर श्रेणी कहलाता है।
- $t_n = S_n - S_{n-1}$
- a और b का समांतर माध्य $\frac{a+b}{2}$ है।
- G.P. $a, ar, ar^2, \ldots$ का nवाँ पद ar^{n-1} है।
- G.P. $a, ar, ar^2, \ldots$ के प्रथम n पदों का योग है,

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ for } |r|>1 \text{ के लिए} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ for } |r|<1 \text{ के लिए}$$

- G.P. $a, ar, ar^2, \ldots$ के अनन्त पदों का योग है,

$$S = \frac{a}{1-r} \text{ for } |r|<1 \text{ के लिए}$$

- दो संख्याओं a और b का गुणोत्तर माध्य $\sqrt{ab}$ है।
- दो संख्याओं a तथा b का समांतर माध्य A उनके संगत गुणोत्तर माध्य G से हमेशा बड़ा होता है, अर्थात् A > G.

सहायक वेबसाइट

- https://www.youtube.com/watch?v=7T5yHI-po_c
- https://www.youtube.com/watch?v=ElRtd1Z2FRc
- https://www.youtube.com/watch?v=zjNC0rLeKO4
- https://www.youtube.com/watch?v=0wwg3mS7lGk
- https://www.youtube.com/watch?v=0wwg3mS7lGk
- https://www.youtube.com/watch?v=GI6bvnhjUqM\

आइए अभ्यास करें

1. 100 और 200 के बीच की सभी प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए, जो 7 से विभजित हों।

2. दो समांतर श्रेणियों के प्रथम n पदों का योग $(2n - 1) : (2n + 1)$ के अनुपात में है, उनके 10वें पदों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. यदि a, b, c समांतर श्रेणी में हैं तो दिखाइये कि $b + c, c + a, a + b$ भी समांतर श्रेणी में है।

4. यदि $a_1, a_2, ..., a_n$ समांतर श्रेणी में हैं तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{1}{a_1\, a_2} + \frac{1}{a_2\, a_3} + \frac{1}{a_3\, a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}\, a_n} = \frac{n-1}{a_1\, a_n}$$

5. यदि $(b - c)^2, (c - a)^2, (a - b)^2$ समांतर श्रेणी में है, तो सिद्ध कीजिये कि

$\dfrac{1}{b-c}, \dfrac{1}{c-a}, \dfrac{1}{a-b}$, भी समांतर श्रेणी में हैं।

6. यदि एक समान्तर श्रेणी के pवें, qवें तथा rवें पद क्रमशः P, Q, R हैं, तो सिद्ध कीजिये कि

$p\,(Q - R) + q\,(R - P) + r\,(P - Q) = 0.$

7. यदि a, b, c G.P. में हैं, तो सिद्ध कीजिये कि

$$a^2\, b^2\, c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$$

8. यदि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो दिखाइये कि निम्नलिखित में प्रत्येक पद एक गुणोत्तर श्रेणी है :

(a) $(a^2 - b^2), (b^2 - c^2), (c^2 - d^2)$ (b) $\dfrac{1}{a^2+b^2}, \dfrac{1}{b^2+c^2}, \dfrac{1}{c^2-d^2}$

9. यदि x, y, z एक G.P. के pवें, qवें तथा rवें पद हैं तो सिद्ध कीजिये कि

$x^{q-r}\, y^{r-p}\, z^{p-q} = 1$

10. यदि a, b, c A.P. में हैं और x, y, z G.P. में हैं तो सिद्ध कीजिये कि
$x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} = 1$

11. यदि एक G.P. के प्रथम n पदों का योग S_n द्वारा निरूपित होता है तो सिद्ध कीजिये कि
$S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

12. यदि p, q, r A.P. में हैं तो सिद्ध कीजिए कि G.P. के pवें, qवें तथा rवें पद भी G.P. में हैं।

11. यदि $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ हो, तो n का छोटे–से–छोटा मान ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार है कि $2 - S_n < \frac{1}{100}$

14. यदि G.P. के प्रथम n पदों का योग S है तथा इसके इन पदों का गुणनफल p है और उनके व्युत्क्रमों का योग R है तो सिद्ध कीजिए कि

$$p^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 6.1

1. (a) $2n - 1$ (b) $2n + 1$

2. 3, 5, 7, 9, ... 3. 20, 16 4. नहीं 5. $m + n$ 6. 10, 6, 2, ...

देखें आपने कितना सीखा 6.2

1. (a) 435 (b) $\frac{n}{2}\left[21 - 5n^2\right]$

2. 5 3. 12

4. 37 5. $n^2 + 9n, 9$

6. $2a$

देखें आपने कितना सीखा 6. 3

2. 5

देखें आपने कितना सीखा 6. 4

1. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}$ 2. 11वाँ, नहीं

3. 36, 6, 1 या 1, 6, 36 4. (a) 6 (b) 3

देखें आपने कितना सीखा 6.5

1. (a) 6138 (b) $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)$ 2. 10.

4. (a) $\frac{80}{81}(10^n-1)-\frac{8n}{9}$ (b) $\frac{2n}{9}-\frac{2}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

देखें आपने कितना सीखा 6. 6

1. (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{13}{24}$ 2. (a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{52}{165}$

3. $5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \frac{40}{27}, \ldots \infty$ 4. $\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \frac{1}{4^4}, \ldots \infty$

देखें आपने कितना सीखा 6.7

1. $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32},$ 6. $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ या $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$

7. 4, 8, 16

आइए अभ्यास करें

1. 2107 2. 37 : 39