माध्यमिक पाठ्यक्रम

२११ - गणित

पुस्तक - १

अभ्यासक्रम सहनिर्देशक
— नीरज प्रतापसिंग

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
ए-२४-२५. इंस्टीटयूशनल एरिया, सेक्टर-६२, नोएडा-२०१ ३०९ (उ.प्र.)
Website: www.nios.ac.in, Toll Free No. 18001809393

मुद्रण : दिसंबर, 2013 (2,000 प्रतियाँ)

सचिव, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान, ए–24–25, इंस्टीट्यूशनल एरिया, सेक्टर–62, नोएडा–201309 द्वारा प्रकाशित एवं मैसर्स अरावली प्रिन्टर्स एण्ड पब्लिशर्स, (प्रा.) लि., डब्ल्यू–30, ओखला इंडस्ट्रियल एरिया, फेस–II, नई दिल्ली–110020 द्वारा मुद्रित

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयीन शिक्षण संस्था सल्लागार समिती

डॉ. सितांशु स. जेना
चेअरमन
रा.मु.शा.सं., नवीन दिल्ली

डॉ. कुलदीप अगरवाल
निर्देशक (शैक्षणिक)
रा.मु.शा.सं., नवीन दिल्ली

श्रीमती गोपा विश्वास
सह.संचालक (शैक्षणिक)
रा.मु.शा.सं., नवीन दिल्ली

अभ्यासक्रम समिती

अध्यक्ष

प्रा. मोहनलाल
चिटणीस DAV Collage संचालक मंडळ,
E १८२ न्यू राजेंद्रनगर, नवी दिल्ली ११००६०

श्री. जी. डी. धाल
प्रपाठक (निवृत्त) NCERT,
K-१७१ LIC कॉलनी, पश्चिम विहारम
नवी दिल्ली ११००८७

श्री. जे. सी. निजवान
उपप्राचार्य (निवृत्त)
सर्वोदय विद्यालय सी-ब्लॉक, सरस्वती विहार
नवी दिल्ली ११००८७

प्रा. रामअवतार
(निवृत्त) NCERT
५३३, सेक्टर ७, अर्बन इस्टेट
गुरगाव, हरयाना, १२२००१

श्री. पी. के.गर्ग
निवृत्त प्राचार्य रामजस स्कूल
१६९, पुंडरिक विहार, सरस्वती विहार,
नवी दिल्ली ११००३४

श्री. महेंद्र शंकर
अधिव्याख्याता (निवृत्त) निवड श्रेणी
NCERT डी.पी.-२०३ मौर्य एनक्लोव्ह,
पिटमगपुरा, नवी दिल्ली ११००८८

श्री. ईश्वरचंद्र
प्रपाठक (निवृत्त) NCERT
घर नं. WZ १४२७०, नांगल राया
नवी दिल्ली ११००४६

श्री. सुर्वेंदू शेखर दास
उपसंचालक (शैक्षणिक)
एन.आय.ओ.एस्. नोएडा २०१३०९

श्री. नीरज प्रतापसिंग
वरिष्ठ प्रशासकीय अधिकारी (गणित)
एन.आय.ओ.एस्.नोईडा २०१३०९

पाठलेखक

श्री. जी. डी. धाल
प्रपाठक (निवृत्त) NCERT,
K-१७१ LIC कॉलनी, पश्चिम
विहार, नवी दिल्ली ११००८७

श्री. जे. सी. निजवान
उपप्राचार्य (निवृत्त) सर्वोदय
विद्यालय, सी-ब्लॉक, सरस्वती
विहार, नवी दिल्ली ११००८७

श्री. ईश्वरचंद्र
प्रपाठक (निवृत्त) NCERT,
घर नं. WZ १४२७०,
नांगलराया, नवी दिल्ली ११००४६

प्रा. एस. के एस. गौतम
प्राध्यापक (निवृत्त) NCERT,
मयूर विहार -फेज
नवी दिल्ली ११००९१

अभ्यासक्रम संपादक

प्रा. मोहनलाल
चिटणीस DAV College
संचालक मंडळ, विद्या., ई-१८२
न्यू राजेंद्रनगर, नवी दिल्ली ६०

श्री. पी. के गर्ग
निवृत्त प्राचार्य, रामजस स्कूल,
१६९, पुंडरिक विहार, सरस्वती
विहार नवी दिल्ली ११००३४

डॉ. राजपाल सिंग
व्याख्याता,गणित,राजकीय प्रतिभा विकास
विद्या.२१८ मैत्री अपार्ट आय.पी.
एक्सटेंशन, पतपारगंज, नवी दिल्ली ९२

डॉ. आय. के. बंसल
प्राध्यापक, विभागप्रमुख नि.
NCERT, प्राथ. शिक्षण खाते
सेक्टर-३, रोहिणी, नवी दिल्ली ८५

डॉ. के. के. वशिष्ठ
प्राध्यापक (निवृत्त) NCERT,
१५/१०-७ HIG डुप्लेक्स
वसुंधरा, गाहियाबाद, उत्तर प्रदेश

डॉ. के. एम्. गुप्ता
प्राध्यापक (निवृत्त) १५/१०७
आशिर्वाद, सी-२९ सुलतानपूर
कॉलनी, नवी दिल्ली ११००३०

श्री. सुर्वेंदू शेखर दास
उपसंचालक (शैक्षणिक)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यापीठ, नोईडा ०९

श्री. नीरंज प्रतापसिंग
वरिष्ठ प्रशासकीय अधि.,गणित
राष्ट्रीय मुक्त विद्यापीठ, नोईडा ०९

मराठी भाषांतर

श्री. अ. गं. कडेकर
समन्वयक, विज्ञान आणि तंत्रज्ञान
एस.एस.सी. बोर्ड, पुणे

श्री. गो. वि. खजुरे
समन्वयक गणित
विषय – एस.एस.सी. बोर्ड, पुणे

श्री. रा. वा. टेके
माजी उपप्राचार्य, ने. सु. बोस,
उच्च माध्यमिक विद्यालय, पुणे - ६

लेसर टाईपसेट
वेदिका एन्टरप्रायजेस
पुणे - ४३

रेखा कलाकार - श्री. महेश शर्मा, रा.मु.शा.सं. नवीन दिल्ली

अध्यक्षांचा संदेश

प्रिय विद्यार्थ्यांनो,

आपणास माहित असेलच की समाजाच्या तसेच समाजातील काही विशिष्ठ घटकांच्या गरजा ह्या कालपरत्वे बदलत असतात. आणि ह्या सामाजिक गरजा पूर्ण करण्यासाठी त्यासाठी योजावयाच्या पद्धती व तंत्रे ही काळानुरूप बदलने गरजेचे असते. शिक्षण हे तर बदलाचे प्रमुख साधन. योग्य वेळी शिक्षणात घडवून आणलेला योग्य बदल हा समाजामध्ये सकारात्मकता आणतो. हा दृष्टिकोन येणाऱ्या आव्हानांना तसेच कठीण परिस्थितीला तोंड देण्याचे धाडस देतो. हे सर्व परिणामकारकपणे ठराविक अंतराने अभ्यासक्रम बदलून साध्य केले जाऊ शकते. स्थिर अभ्यासक्रम हा फक्त शिक्षणाचे एक मानवी साधन म्हणूनच कार्य करतो. समजा जर आपण एका भांड्यामध्ये पाणी भरले व ते भांडे पाणी न बदलता तसेच दीर्घ काळ ठेवले तर काही काळाने ते पाणी पिण्यास अयोग्य बनते. एवढेच नव्हे तर त्या पाण्याचा दुर्गंध सगळीकडे पसरायला लागतो आणि म्हणूनच अभ्यासक्रम बदलणे ही या पाण्याप्रमाणे काळानुरूप गरजेचे असते.

पाठयपुस्तकातील घटक तयार करणे हा नवीन अभ्यासक्रमाचा सर्वात प्रमुख व महत्वाचा घटक असतो की ज्या द्वारे त्या विषयाची ध्येये व उद्दिष्टे साध्य केली जावू शकतात. तसेच याद्वारे आपणास जुन्या व पारंपारिक पद्धती (की ज्या आता कालबाह्य झालेल्या आहेत) बदलून नवनवीन तंत्रे शिकता येतात.

आणि हाच हेतु मनात धरून देशभरातील सर्व शिक्षणतज्ञ हे ठराविक कालाने एकत्र येत असतात व अपेक्षित व गरजेचे असणारे बदल सुचवत असतात. याचाच परिपाक म्हणुन राष्ट्रीय अभ्यासक्रम आकृतीबंध (National Curriculam Framework (NCF)) अस्तीत्वात आला. यामध्ये राष्ट्रीय अभ्यासक्रमामध्ये शिक्षणाच्या वेगवेगळया पातळयावर म्हणजेच प्राथमिक, पूर्व प्राथमिक, माध्यमिक, उच्च माध्यमिक स्तरावर अपेक्षित असणारे बदल सुचविलेले आहेत.

हाच आकृतीबंध मनात धरून तसेच देशाच्या व समाजाच्या गरजा लक्षात घेवून आम्ही माध्यमिक शिक्षणाचा अभ्यासक्रम अद्ययावत केला आहे. तो गरजांना व काळाला अनुसरून आहे.

हा अभ्यासक्रम तयार करताना तो अतिशय रंजक व आकर्षक असावा, ही काळजी घेण्यात आली आहे.

डॉ. एस.एस.जेना

अध्यक्ष (एनआयओएस)

संचालकांचा अभिप्राय

प्रिय विद्यार्थ्यांनों,

तुमच्या आवश्यकतेनुसार व गरजेप्रमाणे नवीन अभ्यासक्रम तयार करण्याचा प्रयत्न राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयाच्या शिक्षण विभागाने केला आहे. माध्यमिक स्तरावरील सर्व विषयांचा अभ्यासक्रम बदलण्याची जबाबदारी आम्ही नुकतीच घेतली आहे. देशातील इतर मंडळाच्या पाठ्यक्रमाशी समानता आणण्यासाठी आम्ही केंद्रीय माध्यमिक शिक्षण मंडळ (Central Board of Secondary Education) तसेच माध्यमिक शिक्षण मंडळ महाराष्ट्र, उत्तरप्रदेश, मध्यप्रदेश, गोवा, जम्मू आणि काश्मिर, पं. बंगाल इ. मंडळाशी चर्चा विनिमय केला. राष्ट्रीय शिक्षण, संशोधन व प्रशिक्षण व सल्लागार मंडळाने तयार केलेला अभ्यासक्रम प्रमाणयुक्त मानूनच राष्ट्रीय पाठ्यक्रम तयार करण्यात आला. या सर्व गोष्टींचा सर्वकष व तुलनात्मक अभ्यास केल्यानंतर असे जाणवले की आपला अभ्यासक्रम हा अधिक कार्यात्मक जीवनाशी निगडीत असणारा व सोपा होता. हा अभ्यासक्रम जास्तीत जास्त परिणामकारक व उपयोगी कसा बनवता येइल हा गहन प्रश्न होता. त्यासाठी आम्ही देशभरातील शिक्षणतज्ञ आमंत्रित करून त्याच्या मार्गदर्शनाखाली हा अभ्यासक्रम सुधारीत व अद्यायावत करून घेतला.

तुम्हाला दिल्या जाणाऱ्या अध्ययन साहित्याचाही आम्ही विचार केला आहे. जुनी, कालबाह्य माहिती काढून त्याऐवजी नवीन अद्ययावत माहिती देण्याचा प्रयत्न केला आहे. तसेच ही माहिती आकर्षक व आवाहनात्मक देण्याचाही पयत्न केला आहे.

मला अशी आशा वाटते की तुम्हाला हा अभ्यासक्रम रंजक व उत्साहवर्धक वाटेल. पुढील प्रगतीसाठी तुमच्या सर्व योग्य सूचनांचे स्वागत करू.

आपना सर्वांना माझ्याकडून आनंदी व यशस्वी आयुष्यासाठी शुभेच्छा.

(डॉ. कुलदीप अगरवाल)
संचालक (शैक्षणिक)

आपल्याशी हितगुज

विद्यार्थ्यांशी हितगुज

विद्यार्थी मित्रांनो,

गणित अभ्यासक्रमात आपले स्वागत.

आपण अभ्यासासाठी गणित विषयाची निवड केली म्हणून मला आनंद होत आहे. गणिताचा अभ्यास केल्यानंतर आपल्यामध्ये जी निर्णय क्षमता येते, तिचा उपयोग आपल्याला जीवनात येणारया निरनिराळया समस्या सोडविताना करता येईल.

गणितामुळे आपल्या मध्ये विचारशक्ती, अचूकपणा, तर्कसंगतता कार्यकारणक्षमता आणि शास्त्रीय दृष्टिकोन निर्माण होण्यास मदत होते.

हा गणिताचा अभ्यासक्रम दोन पाठयपुस्तकात विभागलेला आहे. पुस्तक १ आणि पुस्तक २.

पहिल्या पुस्तकात बीजगणिताच्या विभागात सात पाठ तर व्यावसायिक गणिताच्या विभागात दोन पाठ आहे. बीजगणित विभागात वेगवेगळया संख्यापद्धती, त्यांची गरज आणि त्यांच्या साहाय्याने करण्यात येणा–या मुलभूत प्रक्रिया यांची माहिती दिली आहे.

या संख्या पद्धती आणि त्यांचा रोजच्या जीवनात होणारा उपयोग आपण पाहणार आहोत.

व्यावसायिक गणित विभागात टक्केवारी, नफा-तोटा, सरळ व्याज, चक्रवाढ व्याज, सूट, विक्रीकर, बँक व्यवहार, हप्तेबंदीने खरेदी यावरची उदाहरणे आपण पाहणार आहोत. या बरोबरच चक्रवाढ व्याजाचे सूत्र वापरून आपणास वाढीचा दर किंवा घटीचा दर काढणारी उदाहरणेही सोडविता येतील.

प्रात्यक्षिक कामामुळेच विषयज्ञान पक्के होण्यास मदत होते. त्यामुळे ३0 प्रात्यक्षिक कृती असणारी गणिती प्रयोगशाळा पुस्तिका या पुस्तकाबरोबरच आपणास देण्यात आली आहे. आपल्या अध्ययन केंद्रामध्ये या कृती करून पाहाव्यात, म्हणजे गणित हा विषयसुद्धा मनोरंजक आहे याची खात्री आपणास पटेल.

विषयाचे आणि त्यामधील संकल्पनांचे आकलन योग्यप्रकारे व्हावे म्हणून पुरेशी चित्रे आणि भरपूर उदाहरणे दिली आहेत.

विद्यार्थ्यांनी सोडवून दाखविलेली सर्व उदाहरणे काळजीपूर्वक अभ्यासावीत आणि नंतर 'आपली प्रगती तपासा' आणि प्रत्येक धडयाच्या शेवटी संकीर्ण प्रश्नसंग्रह यामधील उदाहरणे सोडविण्याचा प्रयत्न करावा.

जर आपल्याला काही अडचण आली तर माझ्याशी संपर्क साधण्यात संकोच करू नका.

आपल्या सूचनांचा निश्चितपणे सकारात्मक विचार केला जाईल.

सर्वांना शुभेच्छा!

आपला, निरज प्रताप सिंग्वरिष्ठ प्रशासकीय अधिकारी (गणित)

अध्ययन साहित्याचा उपयोग कसा कराल?

सर्वसामान्य शाळेतील शिक्षणपद्धतीपेक्षा राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयातील शिक्षण पद्धती पूर्णपणे भिन्न आहे. या भिन्न शिक्षण पद्धतीमध्ये आपण प्रवेश घेतला आहे. येथे प्रवेश घेतल्याबद्दल आपले स्वागत करून अभ्यासासंबंधी काही उपयुक्त माहिती खाली दिली आहे.

स्वयंअध्ययन

सर्वसामान्य शाळेमध्ये शिकविण्यासाठी, मार्गदर्शन करण्यासाठी, शंकानिरसन करण्यासाठी व अभ्यासाला प्रेरणा देण्यासाठी शिक्षक उपलब्ध असतात. त्याचप्रमाणे शाळेतील विद्यार्थी परस्परांमध्ये चर्चा करून स्वतःच्या अडचणी दूर करू शकतात. शाळेची ग्रंथालये उपयुक्त माहिती पुरवू शकतात. प्रयोगशाळेत प्रयोग करून आपण ज्ञान मिळवू शकतो. अभ्यासेतर उपक्रमात भाग घेऊनसुद्धा आपण ज्ञानात भर घालू शकतो. आपल्यासाठी वेगवेगळया शैक्षणिक विषयांवर आकाशवाणी आणि दूरदर्शन कार्यक्रम तयार करून सादर केले जातात. कार्यक्रमांद्वारे मौलिक मार्गदर्शन मिळते. अशा त़रहेने शाळेतील विद्यार्थ्याला ज्ञानार्जनासाठी सर्व बाजूंनी मदत मिळते.

परंतु मुक्त विद्यालयात विद्यार्थ्यांना मार्गदर्शनासाठी शिक्षक उपलब्ध नसतात. विद्यार्थ्याला स्वतःच्या जबाबदारीवरच ज्ञानार्जन करावे लागते. याचा अर्थ विद्यार्थीच स्वतःचा शिक्षक असतो. त्यामुळे शाळेतील विद्यार्थ्यापेक्षा स्वतः ज्ञानार्जन करणारया मुक्त विद्यालयातील विद्यार्थ्यांची स्वतःवरील जबाबदारी शतपटीने वाढते. परंतु त्याबरोबरच ही गोष्ट अतिशय आव्हानात्मक आहे. ही बाब देखील सत्य आहे.

मुक्त विद्यालयातील विद्यार्थी ज्ञानार्जनासाठी फक्त स्वतःवर आणि स्वतःवरच अवलंबून असतो. याचाच अर्थ असा की स्वतःच्या अभ्यासाचे वेळापत्रक स्वतः विद्यार्थ्यालाच ठरवावे लागते, नियमितपणे अभ्यास करावा लागतो. अभ्यास करण्याची, प्रगतीची ऊर्जा कायम ठेवावी लागते आणि उत्तीर्ण होऊन ध्येय साध्य करावे लागते.

अभ्यासाहित्याविषयी

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय शिक्षण संस्था आपल्याला सर्व प्रकारचे अभ्यास साहित्य पुरविण्यासाठी प्रयत्नशील आहे. त्यापैकी काही अभ्यास साहित्य (पाठयपुस्तक) आपल्या हातात आहे. आम्ही या साहित्याला पाठयपुस्तक (text book) असे न म्हणता या साहित्याला अभ्यास साहित्य (learning material) म्हटले आहे. शाळेतील पाठयपुस्तकापेक्षा हे अभ्यास साहित्य अगदी निराळे आहे. या अभ्यास साहित्यामध्ये पाठयपुस्तक आणि ते शिकविणारा अध्यापक यांचा अप्रतिम मिलाफ आहे. वर्गात शिक्षक ज्या पद्धतीने ज्ञानार्जन करतात, विद्यार्थ्यांच्या संकल्पना दृढ करतात आणि ज्ञानाचा पाया पक्का करतात. त्याप्रमाणेच शिक्षक ज्या पद्धतीने समजावून सांगतात अगदी तशाच पद्धतीने या पुस्तकातील मजकूर तयार केला गेला आहे. योग्य त्या ठिकाणी खुलाशावरोबरच निवडक उदाहरणे आणि अनुरूप आकृत्या, चित्रे, आलेख देण्यात आले आहेत. म्हणूनच हे पुस्तक भारदस्त झाले आहे. परंतु त्यामुळे घाबरून जाऊ नका.

पाठयपुस्तकातील धडयांची विभागणी विभागावार करण्यात आली आहे. ती विभागणी आणि त्याचे कारण आपण समजावून घेऊ या.

प्रस्तावना: प्रस्तावनेमधे जे लिहिलेले असते त्याचा संबंध शीर्षकाशी असतो.

उद्दिष्टे : प्रकरणामधून तुम्ही जे शिकणे अपेक्षित असते ते या विधानांवरून तुम्हाला समजू शकते. प्रकरण वाचल्यानंतर तुम्ही जो अभ्यास करणे अपेक्षित असते तो उद्दिष्ट्यांच्या मदतीने तपासू शकता. उद्दिष्टे जरूर वाचा

टिपणे : (notes) प्रत्येक पानावर काही रिकामी जागा आहे तिथे तुम्ही महत्त्वाचे मुद्दे लिहू शकता.

पाठ्यांशावरील प्रश्न : प्रत्येक भागानंतर तुम्हाला किती समजले आहे ते तपासण्यासाठी लघुत्तरी प्रश्न दिले आहेत. प्रकरणाच्या शेवटी या प्रश्नांची उत्तरे दिलेली आहेत. ते प्रश्न जरूर सोडवा. प्रश्नांची उत्तरे तुम्हाला माहीत आहेत का नाहीत यावरून पुढचे प्रकरण वाचायचे का परत आधीच्या प्रकरणाचा अभ्यास करायचा हे तुम्ही ठरवू शकाल.

तुम्ही काय शिकलात?

प्रकरणातील मुख्य मुद्दे सारांश रुपाने यात सांगितलेले आहेत. उजळणीसाठी तुम्हाला याची मदत होईल. यात तुम्ही तुमचे स्वत:चे काही मुद्दे पण लिहू शकता.

संकीर्ण प्रश्न : यात लघुत्तरी आणि दीर्घोत्तरी प्रश्न असतात. संपूर्ण प्रकरण समजून घेण्याची संधी उत्तरांचा सराव करून तुम्हाला मिळू शकेल.

उत्तरे : तुमची उत्तरे किती प्रमाणात बरोबर आहेत हे तुम्हाला दिलेल्या उत्तरावरून लक्षात येईल.

व्यक्तिगत संपर्क कार्यक्रम

आपल्या अध्ययन केंद्रात प्रत्येक विषयासाठी संपर्क सत्रे आयोजित करण्यात येतात. नेहमीच्या शाळेत ज्या पद्धतीने विषयाचे अध्ययन होते, त्या पद्धतीने या सत्रात विषय शिकविला जात नाही, हे ध्यानात घ्या. या सत्रामध्ये तुमच्या शंकांचे निरसन केले जाईल. तुमच्या अडचणी सोडविल्या जातल. अभ्यासाबाबत तुम्हाला मार्गदर्शन आणि सल्ला दिला जाईल. म्हणून या संपर्कसत्रांचा जास्तीत जास्त फायदा घेण्यासाठी विषयाची चांगली तयारी करा आणि संपर्क सत्राला उपस्थित रहा.

गणिती कार्यशाळा कार्यक्रम

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय शिक्षण संस्थेने गणित या विषयाची प्रयोगशाळा पुस्तिका तयार केली आहे. या प्रयोगशाळा पुस्तिकेतील कृती प्रत्यक्ष करण्याची संधी आपणास संपर्क केंद्रावरील गणिती कार्यशाळा कार्यक्रमात मिळेल.

दूरचित्रवाणी, आकाशवाणी वरील कार्यक्रम

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय शिक्षण संस्थेने विषयाशी संबंधित आकशवाणीवरून प्रक्षेपित करण्यासाठी काही कार्यक्रम तयार केले आहेत. तसेच दूरदर्शनवरून प्रदर्शित करण्यासाठीसुद्धा काही कार्यक्रम तयार केले आहेत. हे सर्व कार्यक्रम मनोरंजक तर आहेतच परंतु या कार्यक्रमाच्या दर्शन – श्रवणामुळे आपल्या ज्ञानात भर पडेल. अभ्यासास मदत होईल.

या कार्यक्रमाच्या सीडीज (ऑडिओ, व्हीडिओ) आपल्याला संपर्क केंद्रावरसुद्धा उपलब्ध होतील. आपण त्या केंद्रावरून घेऊन जा. ऐका, पाहा आणि परत आणून द्या.

आपल्या अभ्यासाच्या नियोजनासाठी काही उपयुक्त सूचना

आपल्या अभ्यासाचे नियोजन करणे अत्यंत गरजेचे आहे. त्यासाठी काही उपयुक्त सूचनांचा आपण विचार करा.

कोणतीही गोष्ट साध्य करण्यासाठी कठोर परिश्रमाला पर्याय नाही, ही गोष्ट ध्यानात ठेवा. जितके जास्त कठोर परिश्रम, तितके जास्त उज्वल यश आपल्या पदरात पडते. ध्येय गाठण्यसाठी कुठल्याही चोरवाटांचा उपयोग होत नाही. परीक्षेच्या वेळी मदत करण्याचे कोणीही आश्वासन दिले तर त्यावर अजिबात भरवसा ठेऊ नका. कारण परीक्षाकेंद्रावर अतिशय कडेकोट बंदोबस्त आणि अत्यंत दक्ष अशी पर्यवेक्षण व्यवस्था असते. यातूनसुद्धा तुमचा प्रयत्न यशस्वी झाला, तरीसुद्धा तुम्हाला ज्ञान मिळणार नाही. हा तुमचा सर्वात मोठा तोटा होईल. यासाठी अतिशय प्रामाणिकपणे अभ्यास करून परीक्षेत उत्तम यश मिळवा. आयुष्यात यशस्वी व्हा.

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालय शिक्षण संस्था आपल्याला सर्वच बाबतीत स्वातंत्र्य आणि लवचिकता देणे . उदा. सर्वच विषय एकाचवेळी घेऊन परीक्षेला बसण्याची सक्ती आपल्यावर नाही. परीक्षार्थींनी आपल्याला आपले काम / व्यवसाय सांभाळून अभ्यासासाठी किती वेळ देता येईल याचा स्वतःशी विचार करावा. एकाच वेळी सर्व विषयांचा अभ्यास करता येईल का याचा आढावा घ्यावा. तसे नसल्यास काही विषय या वेळी तर काही पुढच्यावेळी देण्यासंबंधी विचार करावा व त्याप्रमाणे अभ्यासाचे नियोजन करावे. एकाचवेळी सर्व विषयांचा अभ्यास करण्याचा प्रयत्न केल्यास कोणत्याच विषयावर लक्ष केंद्रीत होणार नाही आणि अपयशाचे धनी व्हावे लागेल.

म्हणून आपल्या सोयीनुसार सकाळ, दुपार, संध्याकाळ केव्हाही अभ्यासासाठी वेळ निश्चित करा. कालावधी निश्चित करा. प्रत्येक विषयाला कितीही वेळ द्यावयाचा याचे वेळापत्रक ठरवा. हे वेळापत्रक पाळण्याचा कसोशीने प्रयत्न करा.

अभ्यास करताना घटकातील ज्या संकल्पना महत्त्वाच्या वाटतात त्या पेन्सिलीने अधोरेखित करा. महत्त्वाचे मुद्दे अधोरेखित करा. आपल्या अभ्यास संस्थेने दिलेल्या अभ्यास साहित्यावरच अवलंबून आहे. तरीसुद्धा आवश्यकता वाटल्यास आणि वेळ असल्यास इतर पुस्तकातूनही व ज्ञानसाधनांमार्फत ज्ञान मिळवा. पण आमची अशी खात्री आहे की आम्ही दिलेले अभ्याससाहित्य आपल्यादृष्टिने पुरेसे आहे. आपल्या विषयांचे अभ्याससाहित्य (पुस्तके) जवळ बाळगा.

आपल्याला ज्या संकल्पना आणि मुद्दे समजले नाहीत, ते लिहून ठेवा. याबाबत आपल्या पालकांबरोबर, मित्रांबरोबर चर्चा करा. अध्ययन केंद्रातील मार्ग दर्शकाकडून आपल्या शंकांचे निरसन करा.

पाठामध्ये विचारलेल्या सर्व प्रश्नांची उत्तरे तयार करा. विभागाच्या शेवटी विचारलेल्या सर्व प्रश्नांची उत्तरे तयार करा. याने तुमचा अभ्यास तर होईलच. तसेच यामुळे परीक्षेची तयारीसुद्धा होईल. याबरोबरच नमुना प्रश्नपत्रिका आणि गतवर्षीच्या प्रश्नपत्रिका सोडविण्याचा प्रयत्न करा. या प्रश्नांची उत्तरे मित्रांना, पालकांना दाखवा. त्यांच्याबरोबर चर्चा करा.

आपल्या मदतीसाठी काही मुद्दे सुचविले आहेत. अभ्यासासाठी आपणसुद्धा यापेक्षा चांगले मार्ग सुचवा. अभ्यासाचे चांगले तंत्र शोधा आणि अंमलात आणा.

यामुळे आपल्याला निश्चितपणे उज्वल यश प्राप्त होईल.

धन्यवाद!

अभ्यासघटक
१

घटक १

गणित

पाठ १ - संख्याप्रणाली

पाठ २ - घातांक आणि करणी

पाठ ३ - बैजिक राशी आणि बहुपदी

पाठ ४ - सूत्रे आणि अवयव

पाठ ५ - एकरेषीय समीकरणे

पाठ ६ - वर्गसमीकरणे

पाठ ७ - अंकगणिती श्रेढी

घटक २

व्यावहारीक गणित

पाठ ८ - टक्केवारी आणि तिचे उपयोजन

पाठ ९ - हप्ता खरेदी

प्रात्यक्षिक

अभ्यासक्रम

२

	विभाग III भूमिती
पाठ 10	रेषा आणि कोन
पाठ 11	त्रिकोणांची एकरूपता
पाठ 12	एकसंपाती रेषा
पाठ 13	चौकोन
पाठ 14	त्रिकोणांची समरूपता
पाठ 15	वर्तुळ
पाठ 16	वर्तुळातील कोन आणि चक्रीय चौकोन
पाठ 17	वृत्तछेदिका, स्पर्शिका व त्यांचे गुणधर्म
पाठ 18	भूमितीय रचना
पाठ 19	निर्देशक भूमिती
	सराव कार्य - भूमिती
	विभाग IV – महत्वमापन
पाठ 20	प्रतलीय आकृत्यांची परिमिती व क्षेत्रफळ
पाठ 21	घनाकृतींचे पृष्ठफळ आणि घनफळ
	सराव कार्य - महत्वमापन
	विभाग V त्रिकोणमिती
पाठ 22	त्रिकोणमितीची ओळख
पाठ 23	काही विशिष्ट कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे
	सराव कार्य - त्रिकोणमिती
	विभाग VI – सांख्यिकी
पाठ 24	सांख्यिकी माहिती आणि तिची मांडणी
पाठ 25	केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन
पाठ 26	संभाव्यतेची ओळख
	सराव कार्य - सांख्यिकी
	नमुना प्रश्नपत्रिका

Awards Won by NIOS

Several projects have been implemented by the NIOS to tap the potential of Information and Communication Technology (ICT) for promoting of Open and Distance Learning (ODL) system. The Ni-On project of NIOS won the National Award for e-governance and Department of Information and Technology, Govt. of India. In further recognition of its On-line initiatives and best ICT practices, the NIOS received the following awards:

NIOS WINS National Award for e-Governance 2008-09

Silver icon for Excellence in Government Process Re-engineering, Instituted by Government of India Department of Administrative Reforms and Public Grievances & Department of Information Technology.

NIOS receives NCPEDP MPHASIS Universal Design Awards 2012

National Institute of Open Schooling (NIOS) has been awarded THE NCPEDP - MPHASIS UNIVERSAL DESIGN AWARDS 2012 instituted by National Centre for Promotion of Employment for Disabled People. The award was given by **Sh. Mukul Wasnik, Hon'ble Minister for Social Justice and Empowerment, Govt. of India** on 14th August, 2012. NIOS has been selected for its remarkable work done for the learners with disabilities through ICT by making its web portal www.nios.ac.in completely accessible for such learners.

The Manthan Award South Asia & Asia Pacific 2012

The Manthan Award South Asia & Asia Pacific 2012 to recognize the best ICT practices in e-Content and Creativity instituted by Digital Empowerment Foundation in partnership with World Summit Award, Department of Information Technology, Govt. of India, and various other stakeholders like civil society members, media and other similar organisations engaged in promoting digital content inclusiveness in the whole of South Asian & Asia Pacific nation states for development. The award was conferred during **9th Manthan Award Gala South Asia & Asia Pacific 2012 at India Habitat Centre on 1st Dec. 2012.**

अनुक्रमणिका

घटक १

गणित

घटक २

व्यावहारीक गणित

Awards Won by NIOS

Web Ratna Awards 2012 Platinum Icon under Outstanding Web Content for Acknowledging exemplary initiatives/practices in the realm of e-Governance for dissemination of information & services instituted by Department of Information Technology, Ministry of Communications & IT (MC&IT) and National Informatic Centre (NIC), Government of India. The award has been conferred by Hon'ble Minister of Communications and Information Technology Shri Kapil Sibal on 10th December 2012 at Dr. D.S Kothari Auditorium, DRDO Bhawan, Dalhousie Road, New Delhi.

TOI Social Impact Award 2012

NIOS has been selected as winner of the Social Impact Award 2012 instituted by Times of India in partnership with J P Morgan The Award is given in the recognition of magnificent work done by an individual or groups or institutions making an impact in the society in various segment including Education. NIOS feels honoured to accept the award.

The award was conferred on 28th January 2013 at a function in presence of President of India and high level dignitaries.

National Awards for the Empowerment of Persons with Disabilities, 2012

The NIOS received the National Award for the Empowerment of persons with disabilities, 2012 Instituted by Ministry Social Justice and Empowerment, Govt. of India. The NIOS got this award under the category of best accessible Website for making its website www.nios.ac.in completely accessible for person with disabilities. The website is bilingual in Hindi and English. It also has provisions of Screen Reader, increasing text size, colour contrast scheme etc. for disabled learners. This award was conferred by the Hon'ble President of India at Vigyan Bhawan, New Delhi on 6th February, 2013. Dr. S.S. Jena Chairman, NIOS received the award.

१

संख्याप्रणाली

अनादि कालापासून मानव प्रणाली आपल्याजवळ असलेल्या वस्तू, शेळ्या, मेंढ्या, पशु, झाडे, जडजवाहिरे इत्यादीचे मोजमाप करत आला आहे. त्यासाठी त्याने खालील मार्गांचा अवलंब केला.

- जमिनीवर किंवा दगडावर वस्तुगणिक रेघ मारणे.

- वस्तु काढताना किंवा ठेवताना वस्तुगणिक एक दगड बाजूला टाकणे.

अशा तऱ्हेने गणनपद्धती माहित नसूनसुद्धा ते आपल्या वस्तुंची नोंद ठेवू शकत असत.

मानवी संस्कृतीमधील अंकांचा शोध हा अनेक महत्त्वाच्या शोधांपैकी एक आहे. अंकांचा शोध लागला नसता तर किती? केवढे? या प्रश्नांची उत्तरे आपणास देता आली नसती आणि त्याने किती गोंधळ झाला असता याची आपण कल्पनादेखील करू शकत नाही. शून्यासकट अंकांचा आणि अंकप्रणालीचा आणि मूलभूत गणिती क्रियांचा शोध लागल्यामुळेच आपण खालील प्रश्नांची उत्तरे देऊ शकतो.

1. पिशवीत किती सफरचंदे आहेत?
2. सभेत बोलण्यासाठी किती वक्त्यांना पाचारण केले आहे?
3. टेबलावर किती खेळणी आहेत?
4. शेतातून किती पोती धान्य निघाले?

या आणि यासारख्या अनेक प्रश्नांची उत्तरे देण्यासाठी संख्या आणि गणिती प्रक्रियांचा उपयोग होतो यावरून संख्या प्रणालीचा अभ्यास आणि तिची अभ्यासक्रमातील गरज लक्षात येते. या पाठात आपण नैसर्गिक संख्या, पूर्णांक संख्या आणि अपूर्णांक संख्या यांचा थोडक्यात आढावा घेणार आहोत. त्यानंतर आपण परिमेय व अपरिमेय संख्यांचा परिचय करून घेणार आहोत. वास्तव संख्येंविषयी चर्चा करून आपण या पाठाचा शेवट करणार आहोत.

उद्दिष्टे :

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खालील बाबींचे ज्ञान होईल.

❖ नैसर्गिक संख्यापासून वास्तव संख्यांपर्यंत (परिमेय आणि अपरिमेय) संख्याप्रणालीचा विस्तार कसा झाला, हे समजेल.

- विविध प्रकारच्या संख्या ओळखता येतील.
- पूर्णांक संख्या परिमेय संख्येच्या स्वरूपात लिहिता येतील.
- परिमेय संख्या अनावर्ति किंवा आवर्ति (दशांशस्थळांची पुनरावृत्ती होणाऱ्या) आहेत, हे ओळखता येईल.
- कोणत्याही दोन परिमेय संख्यांमध्ये असणारी परिमेय संख्या शोधता येईल.
- संख्यारेषेवर परिमेय संख्या निर्देशित करता येईल.
- अपरिमेय संख्यांची उदाहरणे सांगता येतील.
- संख्यारेषेवर $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ या संख्या निर्देर्शित करता येतील.
- दिलेल्या कोणत्याही दोन संख्यांमधील अपरिमेय संख्या शोधता येतील.
- परिमेय आणि अपरिमेय संख्यांचे सांगितलेल्या दशांश स्थळापर्यंत दशांश अपूणर्शंकात रुपांतर करता येईल.
- वास्तव संख्यांवर (परिमेय आणि अपरिमेय) बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या मूलभूत प्रक्रिया करता येतील.

1.1 अपेक्षित पूर्वज्ञान :

संख्या प्रमाणालीसंबंधी मूलभूत माहिती आणि त्यांचा व्यवहारातील उपयोग

1.2 नैसर्गिक संख्या (Natural Numbers) पूर्ण संख्या (Whole Numbers) आणि अपूर्णांक संख्या (Integers) यांची उजळणी :

1.2.1 नैसर्गिक संख्या :

1, 2, 3, ... या मोजसंख्या विचारात घ्या. या मोजसंख्यांचीच संख्याप्रणाली तयार होते. रोजच्या व्यवहारात आपण याच संख्यांचा वापर करत असतो.

सर्वात मोठी असणारी नैसर्गिक संख्या अस्तित्वात नाही. कारण कोणत्याही नैसर्गिक संख्येत 1 मिळविला असता त्यापेक्षा मोठी संख्या तयार होते.

नैसगिर्कक संख्यांवर करता येणाऱ्या चार मूलभूत प्रक्रियांची (बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार) माहिती आपणास आहेच.

उदाहरणार्थ :

$4 + 2 = 6$, ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$6 + 21 = 27$, हीसुद्धा नैसर्गिक संख्या आहे.

$22 - 6 = 16$, हीसुद्धा नैसर्गिक संख्या आहे.

परंतु $2 - 6 =$ येणारे उत्तर ही नैसर्गिक संख्या नाही.

त्याचप्रमाणे, $4 \times 3 = 12$, ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$12 \times 3 = 36$, हीसुद्धा नैसर्गिक संख्या आहे.

$\frac{12}{2} = 6$, ही नैसर्गिक संख्या आहे. परंतु $\frac{6}{4}$ = येणारे उत्तर ही नैसर्गिक संख्या नाही.

यावरून आपण असे अनुमान काढू शकतो की,

1. a) नैसर्गिक संख्यांची बेरीज आणि गुणाकार करून येणारे उत्तर नैसर्गिक संख्याच असते. परंतु,

   b) नैसर्गिक संख्यांची वजाबाकी आणि भागाकार करून आलेले उत्तर नैसर्गिक संख्याच असते, असे नाही.

2. नैसर्गिक संख्या आपण संख्यारेषेवर खालीलप्रमाणे दाखवू शकतो.

   1 2 3 4 5 6 7 8 9 ....

3. नैसर्गिक संख्यांची बेरीज किंवा गुणाकार कोणत्याही क्रमाने केला तरी उत्तरात बदल होत नाही.

   म्हणजेच नैसर्गिक संख्यांची बेरीज किंवा गुणाकार या क्रिया क्रमनिरपेक्ष असतात.

   परंतु हे विधान नैसर्गिक संख्यांची वजाबाकी किंवा भागाकार या प्रक्रियांबावतीत सत्य असत नाही.

1.2.2 पूर्ण संख्या :

1. नैसर्गिक संख्येमधून तीच संख्या वजा केली असता कोणती संख्या उरते? ही अडचण सोडविण्यासाठी नैसर्गिक संख्याप्रणालीमध्ये 0 (शून्य) समाविष्ट केले गेले.

   0 समाविष्ट असणाऱ्या नैसर्गिक संख्यांना पूर्ण संख्या असे म्हणतात.

   $\therefore$ पूर्ण संख्या = 0, 1, 2, 3, ...

   पूर्ण संख्येमध्येसुद्धा सर्वात मोठी संख्या अस्तित्वात नाही.

2. 0 चे गुणधर्म

   $a + 0 = a = 0 + a$

   $a - 0 = a$ परंतु $(0 - a)$ ही अव्याख्येय आहे.

   $a \times 0 = 0 = 0 \times a$

   शून्याने भागणे अव्याख्येय आहे.

3. नैसर्गिक संख्यांप्रमाणे पूर्ण संख्यांवरसुद्धा चारही मूलभूत प्रक्रिया करता येतात. (वजाबाकी व भागाकार याबाबतीत काही बंधने आहेत.)

4. पूर्ण संख्या आपण संख्यारेषेवर खालीलप्रमाणे दाखवू शकतो.

   0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ....

1.2.3 पूर्णांक संख्या :

नैसर्गिक संख्या व पूर्ण संख्या यांच्या क्रियांवरील विचार करता एका संख्येतून दुसरी संख्या वजा करता येतेच असे नाही; हे आपल्या लक्षात येते.

उदाहरणार्थ : (2 - 3), (3 - 7), (9 - 20) इ. या वजाबाक्या नैसर्गिक संख्या किंवा पूर्ण संख्या प्रणालीमध्ये शक्य होत नाहीत.

या किंवा अशासारख्या वजाबाक्या शक्य व्हाव्यात म्हणून या संख्याप्रणाली अधिक प्रगत (extended) करण्याची गरज आहे. म्हणून आपण ही प्रणाली वाढवून –1 (उणे एक) –2 (उणे दोन) .... यासारख्या संख्या त्यात घेतल्या.

$$\therefore\ 1 + (-1) = 0,\ 2 + (-2) = 0,\ 3 + (-3) = 0 \ldots\ldots\ 99 + (-99) = 0 \ldots$$

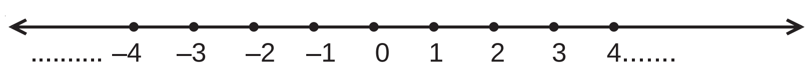
याप्रमाणे आपण पूर्ण संख्यांमध्ये भर घालून पूर्णांकसंख्यांची नवी प्रणाली तयार केली.

म्हणून पूर्णांक संख्या =

.... -7, -6, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

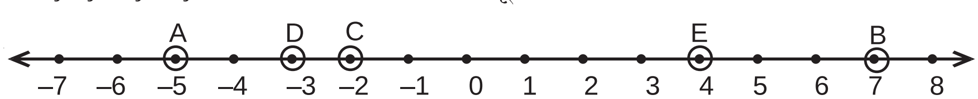
1.2.4 पूर्णांक संख्यांचे संख्यारेषेवर निर्देशन :

आपण पूर्ण संख्या दाखविणारी संख्या रेषा 0 च्या डावीकडे वाढविली आणि त्यावर -1, -2, -4, -4 हे बिंदू स्थापन केले. हे बिंदू अशा पद्धतीने स्थापन केले की, 1 आणि –1, 2 आणि –2, 3 आणि -3 हे बिंदू शून्यापासून सारख्याच अंतरावर आणि शून्याच्या विरुद्ध दिशेला असतील. आपली पूर्णांक संख्या रेषा खालीलप्रमाणे असेल.



आता या संख्यारेषेवर पूर्णांक संख्या आपण सहजपणे दाखवू शकतो.

उदा. –5, 7, –2, –3, 4 या संख्या संख्यारेषेवर दाखवू.



आकृतीमध्ये बिंदू A, B, C, D आणि E हे अनुक्रमे –5, 7, –2, –3 आणि 4 या संख्या दर्शवितात.

जर पूर्णांक संख्या $a > b$, असे असल्यास a नेहमीच b च्या उजव्या बाजूस असेल याउलट $a < b$, असे असल्यास b नेहमीच a च्या उजव्या बाजूस असेल.

उदा. वरील आकृतीत $7 > 4$, म्हणून बिंदू B हा बिंदू E च्या उजव्या बाजूस आहे. त्याचप्रमाणे $-2 > -5$ म्हणून बिंदू C(–2) हा बिंदू A(–5) च्या उजव्या बाजूस आहे. याउलट $4 < 7$, म्हणून 4 ही संख्या 7 च्या डाव्या बाजूस आहे. म्हणूनच आकृतीमध्ये बिंदू E हा बिंदू B च्या डाव्या बाजूस आहे.

दिलेल्या a आणि b या दोन पूर्णांक संख्यांचा लहानमोठेपणा ठरविण्यासाठी आपण पुढील नियम वापरू.

1. $a > b$, जर a हा b च्या उजव्या बाजूस असेल.

2. $a < b$, जर a हा b च्या डाव्या बाजूस असेल.

उदा. 1.1 : खाली दिलेल्यापैकी नैसर्गिक संख्या, पूर्णसंख्या आणि पूर्णांक संख्या ओळखा.

1, 5, 22, -6, 7, –13, 0, 12, –12, 13, –31

उकल : 7, 12, 13, 15 आणि 22 या नैसर्गिक संख्या आहेत.

0, 7, 12, 13, 15 आणि 22 या पूर्ण संख्या आहेत.

-31, -13, -12, -6, 0, 7, 12, 13, 15 आणि 22 या पूर्णांक संख्या आहेत.

उदा. 1.2 : खाली दिलेल्या संख्यांपैकी

1. नैसर्गिक नसणाऱ्या संख्या कोणत्या?
2. पूर्ण नसणाऱ्या संख्या कोणत्या?

-17, 15, 23, -6, -4, 0, 16, 18, 22, 31.

उकल : 1. नैसर्गिक नसणाऱ्या संख्या –17, –6, –4 आणि 0

2. पूर्ण नसणाऱ्या संख्या –17, –6, –4

टीप : वरील उदाहरणावरून आपण असे म्हणू शकतो की,

1. सर्व नैसर्गिक संख्या या पूर्ण संख्या आणि पूर्णांक संख्यासुद्धा आहेत. परंतु याचा व्यत्यास सत्य नाही.
2. सर्व पूर्ण संख्या या पूर्णांक संख्या आहेत.

यापूर्वीच्या इयत्तेमध्ये (वर्गामध्ये) आपण पूर्णांक संख्यावरील चार मूलभूत प्रक्रियांचा अभ्यास केला आहे. त्याची पुनरावृत्ती न करता आपण नमुन्यादाखल काही उदाहरणे पाहू.

उदा. 1.3 : खालील उदाहरणे सोडवा आणि आलेले उत्तर पूर्णांक संख्या आहे का नाही, ते सांगा.

उकल : $12 \times 4 = 48$; पूर्णांक संख्या आहे.

$7 \div 3 = \frac{7}{3}$; पूर्णांक संख्या नाही.

$18 \div 3 = 6$; पूर्णांक संख्या आहे.

$36 \div 7 = \frac{36}{7}$; पूर्णांक संख्या नाही.

$14 \times 2 = 28$; पूर्णांक संख्या आहे.

$18 \div 36 = \frac{18}{36}$; पूर्णांक संख्या नाही.

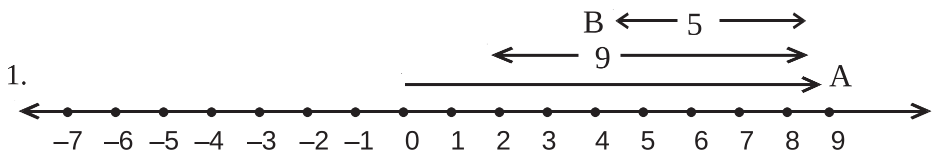
$13 \times (-3) = -39$ पूर्णांक संख्या आहे.

उदा. 1.4 : संख्यारेषेचा उपयोग करून खालील पूर्णांक संख्येच्या बेरजा करा.

1) $9 + (-5)$ 2) $(-3) + (-7)$

उकल :

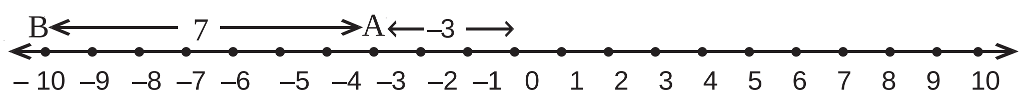
1.



संख्यारेषेवर बिंदू A हा 9 चे स्थान दर्शवितो. A च्या डाव्या बाजूला 5 घरे (5 एकक) गेले असता, बिंदू B मिळतो. तो 4 हे स्थान दर्शवितो.

$\therefore 9 + (-5) = 4$

2.



शून्यापासून सुरवात करून 0 च्या डाव्या बाजूला 3 घरे गेलो असता बिंदू A मिळतो. हा बिंदू –3 हे स्थान दर्शवितो.

बिंदू A पासून 7 घरे डाव्या बाजूला गेलो असता बिंदू B मिळतो. हा बिंदू –10 हे स्थान दर्शवितो.

$\therefore (-3) + (-7) = -10$

1.3 परिमेय संख्या (Rational Numbers) :

a या पूर्णांक संख्येला b या पूर्णांक संख्येने भागले [$b \neq 0$] असता, खालीलपैकी उत्तर मिळेल.

1. जेव्हा b हा a चा गुणक असतो,

   समजा $a = mb$, येथे m = नैसर्गिक किंवा पूर्णांक संख्या

   तेव्हा $\frac{a}{b} = m$

2. जेव्हा b हा a चा गुणक नसतो,

   या बावतीत $\frac{a}{b}$ ही पूर्णांक संख्या असू शकत नाही.

   आपणास ही नवीन प्रकारची संख्या मिळते.

   या संख्येस परिमेय संख्या असे म्हणतात.

परिमेय संख्या :

p आणि q या पूर्णांक संख्या असून $q \neq 0$, तर p/q या संख्येस परिमेय संख्या असे म्हणतात.

उदा. : $\frac{-2}{3}, \frac{5}{-8}, \frac{6}{2}, \frac{11}{7}$ या परिमेय संख्या आहेत.

1.3.1 धन आणि ऋण परिमेय संख्या :

1. जेव्हा p आणि q या दोन्ही पूर्णांक संख्या धन असतील किंवा या पूर्णांक संख्या ऋण असतील, तर p/q ही परिमेय संख्या असते.

   उदाहरणार्थ : $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{-3}{-2}, \frac{-8}{-6}, \frac{-12}{-57}$ या सर्व धन परिमेय संख्या आहेत.

2. जेव्हा p आणि q या दोन्ही पूर्णांक संख्यांची चिन्हे भिन्न असतात, तेव्हा p/q या परिमेय संख्या ऋण असते.

   उदाहरणार्थ : $\frac{-7}{2}, \frac{6}{-5}, \frac{-12}{4}, \frac{16}{-3}$ या सर्व ऋण परिमेय संख्या आहेत.

1.3.2 परिमेय संख्येचे प्रमाणित स्वरूप :

p आणि q या धन पूर्णांक संख्या असताना,

$$\frac{-p}{q}, \frac{p}{-q}, \frac{-p}{-q} \text{ आणि } \frac{p}{q}$$

या सर्व परिमेय संख्या असताता हे आपणास माहिती आहे.

तसेच,

$$\frac{-p}{q} = -\left[\frac{p}{q}\right], \frac{-p}{-q} = \frac{-(-p)}{-(-q)} = \frac{p}{q} \quad \frac{p}{-q} = \frac{(-p)}{-(-q)} = \frac{-p}{q}$$

वरील सर्व ठिकाणी आपण छेदस्थानी असणारी q ही पूर्णांक संख्या धन केली आहे.

p आणि q पूर्णांक संख्या आहेत $p \neq 0$ आणि q ही धन संख्या आहे. (किंवा ती धन केली आहे.) p आणि q मध्ये 1 आणि -1 खेरीज कोणताही समाईक अवयव नाही. तर p/q ही परिमेय संख्या प्रमाणित संख्या आहे, असे म्हणतात.

$\frac{2}{-3}$ या परिमेय संख्येचे प्रमाणित रूप $\frac{-2}{3}$ हे आहे. त्याचप्रमाणे $\frac{-5}{6}$ आणि $\frac{-3}{5}$ प्रमाणित परिमेय संख्या आहेत.

टीप : प्रमाणित परिमेय संख्येला परिमेय संख्येचे अतिसंक्षिप्त रूप असे म्हणतात. आपण या दोन्ही संज्ञा एकाच अर्थाने वापरणार आहोत.

उदा. : $\frac{18}{22}$ ही परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ या प्रमाणित रूपात किंवा अतिसंक्षिप्त रूप या स्वरूपात लिहिता येते.

त्याचप्रमाणे,

$\frac{-25}{35}$ ही प्रमाणित परिमेय संख्या अतिसंक्षिप्त रूपात $\frac{-5}{7}$ अशीही लिहिता येते. (अंश आणि छेदामधील 5 हा समाईक गुणक काढून टाकून)

टिपा

काही महत्त्वाचे निष्कर्ष :

1. सर्व नैसर्गिक संख्या या परिमेय संख्या आहेत. परंतु याचा व्यत्यास सत्य असेलच असे नाही.
2. सर्व पूर्ण संख्या आणि पूर्णांक संख्या या परिमेय संख्या आहेत. परंतु याचा व्यत्याय सत्य असेलच असे नाही.

उदा 1.5 : खालीलपैकी कोणत्या संख्या परिमेय संख्या आहेत व कोणत्या संख्या परिमेय नाहीत ते ओळखा.

$-2, \frac{5}{3}, -17, \frac{15}{7}, \frac{18}{5}, \frac{-7}{6}$

उकल :

1. -2 ही संख्या $\frac{p}{q}$ आणि $q \neq 0$ अशा स्वरूपात म्हणजे $\frac{-2}{1}$ अशी लिहिता येते.

   $\therefore -2$ ही परिमेय संख्या आहे.

2. $\frac{5}{3}$ ही संख्या $\frac{p}{q}$ आणि $q \neq 0$ अशा स्वरूपात आहे.

   $\therefore \frac{5}{3}$ ही संख्या परिमेय संख्या आहे.

3. -17 ही संख्यासुद्धा $\frac{p}{q}$ आणि $q \neq 0$ अशा स्वरूपात म्हणजे $\frac{-17}{1}$ अशी लिहिता येते.

   -17 ही परिमेय संख्या आहे.

4. त्याचप्रमाणे $\frac{15}{7}, \frac{18}{5}$ आणि $\frac{-7}{6}$ या परिमेय संख्या आहेत, हे दाखविता येईल.

उदा. 1.6 : खालील परिमेय संख्या अतिसंक्षिप्त रूपात लिहा.

1. $\frac{-24}{192}$ 2. $\frac{12}{168}$ 3. $\frac{-21}{49}$

उकल :

1. $\frac{-24}{192} = \frac{-3\times8}{3\times8\times8} = \frac{-1}{8}$

   $-\frac{1}{8}$ हे $\frac{-24}{192}$ या परिमेय संख्येचे अतिसंक्षिप्त रूप आहे.

2. $\frac{12}{168} = \frac{12}{12\times14} = \frac{1}{14}$

$\frac{1}{14}$ हे $\frac{12}{168}$ या परिमेय संख्येचे अतिसंक्षिप्त रूप आहे.

3. $\frac{-21}{49}=\frac{-3\times 7}{7\times 7}=\frac{-3}{7}$

$\frac{3}{7}$ हे $\frac{21}{49}$ या परिमेय संख्येचे अतिसंक्षिप्त रूप आहे.

1.4 परिमेय संख्यांची सममूल्य रूपे (Equivalent form of a rational number) :

परिमेय संख्येच्या अंशाला आणि छेदाला एकाच संख्येने गुणले किंवा भागले असता परिणमेय संख्येचे सममूल्य रूप मिळते.

उदा. :

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 2}{3\times 2}=\frac{4}{6},\quad \frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 2}=\frac{8}{12},\quad \frac{2}{3}=\frac{2\times 8}{3\times 8}=\frac{16}{24}$$

$\therefore \frac{4}{6},\frac{8}{12},\frac{16}{24}$ ही $\frac{2}{3}$ या परिमेय संख्येची सममूल्य रूपे आहेत.

त्याचप्रमाणे,

$$\frac{3}{8}=\frac{6}{16}=\frac{21}{56}=\frac{27}{72}=\text{..........}$$

आणि $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{12}{21}=\frac{28}{49}=\text{..........}$

ही अनुक्रमे $\frac{3}{8}$ आणि $\frac{4}{7}$ ची सममूल्य रूपे आहेत.

उदा. 1.7 : खालील परिमेय संख्यांची प्रत्येकी पाच सममूल्य रूपे लिहा.

1. $\frac{3}{17}$ 2. $\frac{-5}{9}$

उकल :

1. $\frac{3}{17}=\frac{3\times 2}{17\times 2}=\frac{6}{34},\quad \frac{3}{17}=\frac{3\times 4}{17\times 4}=\frac{12}{68}$

$$\frac{3\times(-3)}{17\times(-3)}=\frac{-9}{-57},\quad \frac{3\times 8}{17\times 8}=\frac{24}{136}$$

$$\frac{3}{17} \times \frac{7}{7} = \frac{21}{119}$$

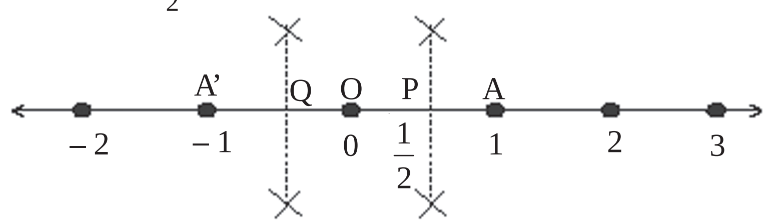
$\therefore \frac{3}{17}$ ची सममूल्य रूपे $= \frac{6}{34}, \frac{12}{68}, \frac{-9}{-51}, \frac{24}{136}, \frac{21}{119}$

2. 1) प्रमाणेच क्रिया करून $\frac{-5}{9}$ ची सममूल्य रूपे

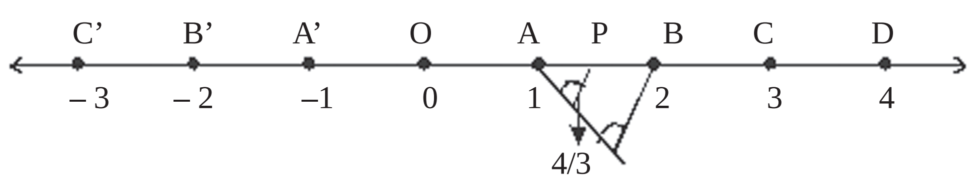
$= \frac{-10}{18}, \frac{-15}{27}, \frac{-20}{36}, \frac{-60}{108}, \frac{-35}{63}$

1.5 परिमेय संख्यांचे संख्या रेषेवर आरेखन :

पूर्ण संख्यांचे संख्या रेषेवर आरेखन करण्याविषयी आपणास माहिती आहेच. आता आपण $\frac{1}{2}$ ही संख्या संख्यारेषेवर दाखविण्याचा प्रयत्न करू. $\frac{1}{2}$ ही धन परिमेय संख्या असून ती शून्याच्या उजव्या बाजूस येईल. $0 < \frac{1}{2} < 1$ असल्याने ह ही संख्या शून्य 0 आणि 1 च्या दरम्यान येईल. अंतर OA चे दोन समान भाग करा त्यासाठी OA बिंदू P मध्ये दुभागा. बिंदू P संख्या $\frac{1}{2}$ चे स्थान दर्शविते त्याचप्रमाणे अंतर OA' चा मध्यबिंदू Q हा परिमेय संख्या $\frac{-1}{2}$ चे स्थान दर्शविते.



त्याचप्रमाणे $\frac{4}{3}$ ही संख्या संख्यारेषेवर खालीलप्रमाणे दाखविता येईल.



$1 < \frac{4}{3} < 2$ असल्याने $\frac{4}{3}$ ही संख्या 1 आणि 2 च्या दरम्यान येईल. अंतर AB तीन समान भाग करा. त्याचा एक भाग म्हणजे AP होय.

$\therefore \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = OA + AP = OP$

बिंदू P हा संख्यारेषेवरील $\frac{4}{3}$ या संख्येचे स्थान दर्शविते.

1.6 परिमेय संख्यांची तुलना :

परिमेय संख्यांची तुलना करण्यासाठी आपण खालीलपैकी एक पद्धत वापरतो.

1. समान छेद असणाऱ्या दोन परिमेय संख्यांची तुलना करावयाची असल्यास, त्या संख्यांच्या अंशांची तुलना करावी. ज्या संख्येचा अंश मोठा ती परिमेय संख्या मोठी असते.

   उदा. $\frac{5}{17}$ आणि $\frac{9}{17}$ या परिमेय संख्यांची तुलना या ठिकाणी छेद समान म्हणजेच 17 आहे.

   $9 > 5$

   $\therefore \frac{9}{17} > \frac{5}{17}$

2. असमान छेद असणाऱ्या दोन परिमेय संख्यांची तुलना करावयाची असल्यास छेदाचा लसावि काढावा. संख्या सममूल्य कराव्यात त्यानंतर त्या संख्यांच्या अंशांची तुलना करावी. ज्या संख्येचा अंश मोठा ती परिमेय संख्या मोठी असते.

   उदा. $\frac{5}{7}$ आणि $\frac{6}{11}$ या परिमेय संख्यांची तुलना

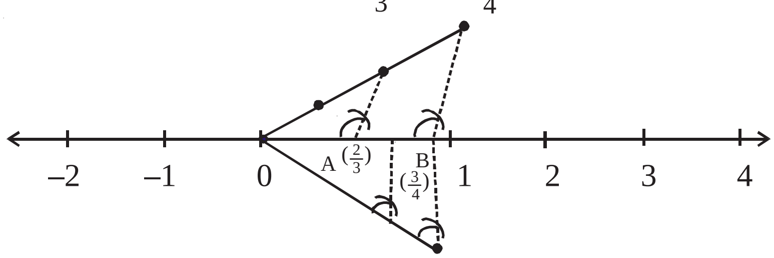
   प्रथम छेदाचा लसावि काढून छेद समान करावा.

   $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 11}{7 \times 11} = \frac{33}{77}$ आणि $\frac{6}{11} = \frac{6 \times 7}{11 \times 7} = \frac{42}{77}$

   आता $42 > 33$, $\frac{42}{77} > \frac{33}{77}$

   किंवा $\frac{6}{11} > \frac{3}{7}$

3. दिलेल्या परिमेय संख्यांचे स्थान संख्या रेषेवर निश्चित करा. जी परिमेय संख्या उजव्या बाजूस असते ती संख्या मोठी असते. उदा. $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{3}{4}$ या परिमेय संख्या संख्या रेषेवर दाखवा.



टिपा

$$0 < \frac{2}{3} < \text{ आणि } 0 < \frac{3}{4} < 1$$

म्हणजेच $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{3}{4}$ या परिमेय संख्या 0 ते 1 च्या दरम्यान येतात. संख्यारेषेवरील एकक जागेचे समान भाग करा. बिंदू A $\frac{2}{3}$ ही परिमेय संख्या आणि बिंदू B $\frac{3}{4}$ ही परिमेय संख्या दर्शवितो. बिंदू A हा बिंदू B च्या उजव्या बाजूस आहे.

$$\therefore \frac{3}{4} > \frac{2}{3} \text{ किंवा } \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

$\therefore \frac{2}{3}$ आणि $\frac{3}{4}$ या संख्यांपैकी $\frac{3}{4}$ ही संख्या मोठी आहे.

आपली प्रगती तपासा 1.1

1. दिलेल्या संख्यांमधून परिमेय संख्या आणि पूर्णांक संख्या ओळखा.

$$4, \frac{-3}{4}, \frac{5}{6}, -36, \frac{12}{7}, \frac{3}{-8}, \frac{15}{7}, -6$$

2. दिलेल्या संख्यांमधून खालील कोणत्या संख्या नाहीत, ते सांगा.

   1) नैसर्गिक संख्या

   2) पूर्ण संख्या

   3) पूर्णांक संख्या

   4) परिमेयसंख्या

$$\frac{-7}{4}, 16, \frac{-3}{7}, -15, 0, \frac{5}{17}, \frac{3}{-4}, -\frac{4}{3}$$

3. खालील उदाहरणामध्ये परिमेय संख्यांचे छेद समान करून, त्यांना सोपे रूप द्या आणि आलेले उत्तर नैसर्गिक संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक संख्या किंवा परिमेय संख्या आहे ते सांगा.

1) $3 + \frac{7}{3}$ 2) $-3 + \frac{10}{4}$ 3) $-8-13$ 4) $12-12$

5) $\frac{9}{2} - \frac{1}{2}$ 6) $2 \times \frac{5}{7}$ 8) $8 \div 3$

4. संख्या रेषेचा उपयोग करून खालील बेरजा करा.

1) 9 + (–7) 2) (–5) + (–3) 3) (–3) + (4)

5. खालीलपैकी कोणत्या परिमेय संख्या अतिसंक्षिप्त रूपात आहेत?

$$\frac{8}{12}, \frac{5}{7}, \frac{-3}{12}, \frac{-6}{7}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}, \frac{15}{24}$$

6. खालीलपैकी कोणत्या परिमेयसंख्या पूर्णांक संख्या आहेत?

$$-10, \frac{15}{5}, \frac{-5}{15}, \frac{13}{5}, \frac{27}{9}, \frac{7\times 3}{14}, \frac{-6}{-2}$$

7. दिलेल्या परिमेय संख्येच्या सममूल्य असणाऱ्या तीन परिमेय संख्या लिहा.

$$\frac{2}{5}, \frac{-5}{6}, \frac{17}{3}$$

8. संख्येरेषेवर खालील परिमेय संख्या दाखवा.

$$\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$$

9. पुढे दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांमधील संख्येचा लहानमोठेपणा पुढील प्रकारे ठरवा.

1) छेद समान करून

2) संख्यारेषा वापरून

a) $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ आणि $\frac{7}{9}$ c) $\frac{-2}{3}$ आणि $\frac{-1}{2}$ d) $\frac{3}{7}$ आणि $\frac{5}{11}$

e) $\frac{-7}{6}$ आणि $\frac{3}{2}$

1.7 परिमेय संख्यांवरील चार मूलभूत प्रक्रिया

1.7.1 परिमेय संख्यांची बेरीज

a) $\frac{p}{q}$ आणि $\frac{r}{q}$ या परिमेय संख्यांची बेरीज करा.

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}$$

उदा.

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}$

2) $\frac{3}{17}+\frac{9}{17}=\frac{3+9}{17}=\frac{12}{17}$

आणि 3) $\frac{14}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{14-5}{3}=\frac{9}{3}=3$

b) $\frac{p}{q}$ आणि $\frac{r}{s}$ या परिमेय संख्यांची बेरीज करा.

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps}{qs}+\frac{rq}{sq}=\frac{ps+rq}{qs}$$

उदा.

1) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{(3\times3)+(4\times2)}{4\times3}=\frac{9+8}{12}=\frac{17}{12}$

2) $-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}=\frac{(-4\times8)+(5\times7)}{5\times8}=\frac{-32+35}{40}$

$=\frac{35-32}{40}=\frac{3}{40}$

वरील दोन उदाहरणांवरून आपण खालील निष्कर्ष काढू शकतो.

a) समच्छेद असणाऱ्या दोन परिमेय संख्यांची बेरजी करताना उत्तरमध्ये छेदस्थानी समाईक संख्या लिहावी आणि अंशास्थानी असलेल्या संख्यांची बेरीज करूनही अंशस्थानी लिहावी.

b) छेद भिन्न असणाऱ्या दोन परिमेय संख्यांची बेरीज करताना छेदस्थानी असणाऱ्या दोन संख्यांचा गुणाकार छेद म्हणून मांडावा आणि अंशस्थानी (पहिल्या अपूर्णांकाचा अंश $\times$ दुसऱ्या अपूर्णांकाचा छेद) आणि (दुसऱ्या अपूर्णांकाचा अंश $\times$ पहिल्या अपूर्णांकाचा छेद) यांची बेरीज मांडावी.

आता काही उदाहरणे सांडवू.

उदा. 1.8 : खालील परिमेय संख्यांची बेरीज करा.

1) $\frac{2}{7}$ आणि $\frac{6}{7}$ 2) $\frac{4}{17}$ आणि $\frac{-3}{17}$ 3) $-\frac{5}{11}$ आणि $\frac{-3}{11}$

उकल ः

1. $\dfrac{2}{7}+\dfrac{6}{7}=\dfrac{2+6}{7}=\dfrac{8}{7}$

$\therefore\ \dfrac{2}{7}+\dfrac{6}{7}=\dfrac{8}{7}$

2. $\dfrac{4}{17}+\dfrac{(-3)}{17}=\dfrac{4+(-3)}{17}=\dfrac{4-3}{17}=\dfrac{1}{17}$

$\therefore\ \dfrac{4}{17}+\dfrac{(-3)}{17}=\dfrac{1}{17}$

3. $\left[-\dfrac{5}{11}\right]+\left[\dfrac{-3}{11}\right]=\dfrac{(-5)+(-3)}{11}=\dfrac{-5-3}{11}=\dfrac{-8}{11}$

$\therefore\ \left[-\dfrac{5}{11}\right]+\left[-\dfrac{3}{11}\right]=-\dfrac{8}{11}$

उदा. 1.9 खालील परिमेय संख्यांची बेरीज करा.

1) $\dfrac{3}{4}$ आणि $\dfrac{1}{7}$ 2) $\dfrac{2}{7}$ आणि $\dfrac{3}{5}$ 3) $\dfrac{5}{9}$ आणि $-\dfrac{4}{15}$

उकल ः

1. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{7}$

$=\dfrac{3\times7}{4\times7}+\dfrac{1\times4}{7\times4}$

$=\dfrac{21}{28}+\dfrac{4}{28}$

$=\dfrac{21+4}{28}$

$=\dfrac{25}{28}$

$\therefore\ \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{25}{28}$ किंवा $\left[\dfrac{(3\times7)+(4\times1)}{4\times7}=\dfrac{21+4}{28}=\dfrac{25}{28}\right]$

2. $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$

$$=\frac{2\times5}{7\times5}+\frac{3\times7}{5\times7}$$

$$=\frac{10}{35}+\frac{21}{35}$$

$$=\frac{10+21}{35}$$

$$=\frac{31}{35}$$

$\therefore \frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{31}{35}$ किंवा $\left[\frac{(2\times5)+(3\times7)}{35}=\frac{10+21}{35}=\frac{31}{35}\right]$

3. $\frac{5}{9}+\frac{(-4)}{15}$

$$=\frac{5\times15}{9\times15}+\frac{(-4)\times9}{15}$$

$$=\frac{75}{135}+\frac{(-36)}{135}$$

$$=\frac{75-36}{135}=\frac{39}{135}=\frac{3\times13}{3\times45}=\frac{13}{45}$$

$\therefore \frac{5}{9}+\frac{(-4)}{15}=\frac{13}{45}$ किंवा $\left[\frac{(5\times15)+(9\times(-4))}{9\times15}=\frac{75-36}{135}=\frac{39}{135}=\frac{13}{45}\right]$

1.7.2 परिमेय संख्यांची वजाबाकी

a) $\frac{p}{q}-\frac{r}{q}=\frac{p-r}{q}$

b) $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{ps-qr}{qs}$

उदा. 1.10 : सांपे रूप द्या.

1) $\frac{7}{4}-\frac{1}{4}$ 2) $\frac{3}{5}-\frac{2}{12}$

उकल :

1. $\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7-1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{2\times 3}{2\times 2}=\frac{3}{2}$

2. $\frac{3}{5}-\frac{2}{12}=\frac{3\times 12}{5\times 12}-\frac{2\times 5}{12\times 5}$

$=\frac{36}{60}-\frac{10}{60}=\frac{36-10}{60}$

$=\frac{26}{60}=\frac{13\times 2}{30\times 2}=\frac{13}{30}$

1.7.3 परिमेय संख्यांचा गुणाकार आणि भागाकार

1. $\left(\frac{p}{q}\right)$ आणि $\left(\frac{r}{s}\right)$ या दोन संख्यांमध्ये $q \neq 0$ आणि $s \neq 0$ नसताना या दोन संख्यांचा गुणाकार

म्हणजे $\frac{pr}{qs}$ ही परिमेय संख्या असते. $[qs \neq 0]$

2. $\left(\frac{p}{q}\right)$ आणि $\left(\frac{r}{s}\right)$ या दोन संख्यामध्ये $q \neq 0$ आणि $s \neq 0$ नसताना या दोन संख्यांचा भागाकार

म्हणजे $\frac{ps}{qr}$ ही परिमेय संख्या असते. $[qr \neq 0]$

म्हणजेच $\left(\frac{p}{q}\right)\div\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{p}{q}\times\left(\frac{s}{r}\right)$

किंवा (पहिली परिमेय संख्या) $\times$ (दुसऱ्या परिमेय संख्येचा व्यस्तांक)

आता काही उदाहरणे सांडवू.

उदा. 1.11 : परिमेय संख्यांचा गुणाकार करा.

1) $\frac{3}{7}$ आणि $\frac{2}{9}$ 2) $\frac{5}{6}$ आणि $\left(\frac{-2}{19}\right)$ 3) $\frac{7}{13}$ आणि $\left(\frac{-2}{-5}\right)$

उकल :

1. $\frac{3}{7}\times\frac{2}{9}=\frac{3\times2}{7\times9}=\frac{3\times2}{7\times3\times3}=\frac{2}{21}$

$\therefore\left(\frac{3}{7}\right)\times\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{2}{21}$

2. $\frac{5}{6}\times\left(\frac{-2}{19}\right)=\frac{5\times(-2)}{6\times19}=-\frac{2\times5}{2\times3\times19}=-\frac{5}{57}$

$\therefore\left(\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{2}{19}\right)=-\frac{5}{57}$

3. $\frac{7}{13}\times\frac{(-2)}{(-5)}=\left(\frac{7}{13}\right)\left(\frac{-(-2)}{5}\right)$

$=\frac{7}{13}\times\frac{2}{5}=\frac{7\times2}{13\times5}=\frac{14}{65}$

उदा. 1.12 : सांपे रूप द्या.

1) $\left(\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{7}{12}\right)$ 2) $\left(\frac{9}{16}\right)\div\left(-\frac{105}{12}\right)$ 3) $\left(\frac{87}{27}\right)\div\left(\frac{29}{18}\right)$

उकल :

1. $\left(\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{7}{12}\right)$

$=\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{12}{7}\right)$ ($\frac{7}{12}$ चा व्यस्तांक $\frac{12}{7}$)

$=\frac{3\times12}{4\times7}=\frac{3\times3\times4}{7\times4}=\frac{9}{7}$

$\therefore\left(\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{7}{12}\right)=\frac{9}{7}$

2. $\left(\frac{9}{16}\right)\div\left(-\frac{105}{12}\right)$

$$\left(\frac{9}{16}\right)\times\left(\frac{2}{-105}\right) \qquad \left(\frac{-105}{2} \text{ चा व्यस्तांक } \frac{2}{-105}\right)$$

$$= \frac{9\times2}{2\times8\times3\times35} - \frac{3\times3\times2}{2\times8\times3\times35} = \frac{3\times3\times2}{2\times8\times3\times35}$$

$$= \frac{-3}{8\times35} = \frac{-3}{280}$$

$$\therefore \left(\frac{9}{16}\right) \div \frac{-105}{2} = \frac{-3}{280}$$

3. $\left(\frac{87}{27}\right)\div\left(\frac{29}{18}\right)$

$$= \left(\frac{87}{27}\right)\times\left(\frac{18}{29}\right) = \frac{87}{27}\times\frac{18}{29} = \frac{29\times3\times2\times9}{9\times3\times29} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \left(\frac{87}{27}\right)\div\left(\frac{29}{18}\right) = \frac{2}{1}$$

आपली प्रगती तपासा 1.2

1. खालील परिमेय संख्यांची बेरीज करा.

1) $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}$ 2) $\frac{2}{15}, \frac{6}{15}$ 3) $\frac{3}{20}, \frac{-7}{-20}$ 4) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$

2. खालील परिमेय संख्यांची बेरीज करा.

1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ 2) $\frac{17}{7}, \frac{5}{9}$ 3) $\frac{2}{5}, \frac{-5}{7}$

3. सोडवा.

1) $\left[-\frac{7}{8}+\frac{-5}{12}\right]+\frac{3}{16}$ 2) $\left[\frac{7}{3}+\frac{3}{4}\right]+\left[-\frac{3}{5}\right]$

4. वजाबाकी करा.

1) $\frac{13}{15}$ मधून $\frac{7}{15}$ 2) $-\frac{5}{3}$ मधून $\frac{7}{3}$ 3) $\frac{9}{24}$ मधून $\frac{3}{7}$

टिपा

5. सोपे रूप द्या.

1) $\left[3\frac{1}{5}+\frac{7}{5}-2\frac{1}{6}\right]$ 2) $\frac{5}{2}+\frac{13}{4}-6\frac{3}{4}$

6. गुणाकार करा.

1) $\frac{2}{11}$ ला $\frac{5}{6}$ ने गुणा 2) $\frac{-3}{11}$ ला $\frac{-33}{35}$ ने गुणा 3) $\frac{-11}{3}$ ला $\frac{-27}{77}$ ने गुणा

7. भागाकार करा.

1) $\frac{1}{2}$ ला $\frac{1}{4}$ ने भागा 2) $\frac{-7}{4}$ ला $\frac{-4}{5}$ ने भागा 3) $\frac{35}{33}$ ला $\frac{-7}{22}$ ने भागा

8. सोपे रूप द्या.

1) $\left[\frac{2}{3}+\frac{7}{8}\right]\times\frac{8}{25}\div\frac{35}{17}$ 2) $\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{4}\right]\times 21$

9. $\frac{16}{7}$ आणि $\frac{-3}{14}$ यांच्या बेरजेला याच संख्यांच्या वजावाकीने भागा.

10. एका संख्येला $\frac{13}{3}$ ने गुणले असता $\frac{39}{12}$ हे उत्तर मिळते तर ती संख्या काढा.

1.8 (A) परिमेय संख्यांचे दशांश अपूर्णांकात रुपांतर :

एका पूर्णांक संख्येला दुसऱ्या पूर्णांकसंख्येने भागून येणारे उत्तर दशांश अपूर्णांकात लिहिणे या प्रक्रियेशी आपण परिचित आहोतच. परिमेय संख्येची रुपांतर दशांश अपूर्णांकात करण्यासाठी भागाकार पद्धतीचा आणि दशांश चिन्हांचा वापर करावा लागेल.

आता काही उदाहरणे सांडवू.

उदा. 1.13 : **खालील संख्या दशांश अपूर्णांकात लिहा.**

1) $\frac{12}{5}$ 2) $\frac{-27}{25}$ 3) $\frac{13}{16}$

टिपा

उकल :

1. भागाकार पद्धतीने,

$$\begin{array}{r} 2.4 \\ 5\overline{)12.0} \\ -10 \\ \hline 2.0 \\ -2.0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore \frac{12}{5} = 2..4$$

2.

$$\begin{array}{r} -1.08 \\ 25\overline{)-27} \\ 25 \\ \hline 200 \\ 200 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore \frac{-27}{25} = -1.08$$

3. भागाकार पद्धतीने,

$$\begin{array}{r} -0.8125 \\ 16\overline{)13.0000} \\ -128 \\ \hline 20 \\ -16 \\ \hline 40 \\ -32 \\ \hline 80 \\ -80 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore \frac{13}{16} = 0.8125$$

वरील उदाहरणावरून आपल्या लक्षात आले असेल की, जेव्हा बाकी शून्य उरते, तेव्हा भागाकाराची प्रक्रिया संपते आणि दशांश चिन्हापुढे मर्यादितच संख्या येतात. या संख्यांना अनावर्ति दशांश संख्या असे म्हणतात.

टीप : वरील परिमेय संख्यांच्या भागाकारात छेदस्थानी 2 किंवा 5 अथवा 2 आणि 5 याच मूल संख्या येतात.

याऐवजी आपण $\frac{12}{5}$ हे $\frac{12\times 2}{5\times 2}=\frac{24}{10}=\frac{24}{10}$ = 2.4 असेही मांडू शकतो.

याच पद्धतीने इतर उदाहरणे सोडविता येतील.

आता काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 1.4 : दशांश अपूर्णांकात रुपांतर करा.

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{5}{11}$

उकल :

a)

$$
\begin{array}{r}
2.33 \\
3\overline{)7.00} \\
6 \\
\hline
1.0 \\
9 \\
\hline
1.0 \\
9 \\
\hline
1.00
\end{array}
$$

या ठिकाणी प्रत्येकावेळी बाकी 1 राहते

$\therefore$ हा सिमित दशांश अपूर्णांक नाही.

$\therefore \ \frac{7}{3} = 2.333 \ldots\ldots$ किंवा $2.\overline{3}$

b)

$$
\begin{array}{r}
0.28571428 \\
7\overline{)2.000} \\
-14 \\
\hline
60 \\
-56 \\
\hline
40 \\
-35 \\
\hline
50 \\
-49 \\
\hline
10 \\
-7 \\
\hline
30 \\
-28 \\
\hline
20 \\
-14 \\
\hline
60 \\
-56 \\
\hline
4
\end{array}
$$

$\frac{2}{7} = 0.28\overline{5714}$

टिप : संख्या किंवा संख्यासमुहाच्या वरच्या बाजूवर आडवी रेघ असल्यास ती संख्या किंवा तो संख्यासमूह परत परत येतो असता त्याचा अर्थ आहे.

c)
$$
\begin{array}{r}
0.454 \\
11\overline{)5.00} \\
\underline{44} \\
60 \\
\underline{55} \\
50 \\
\underline{44} \\
50..
\end{array}
$$

$\therefore \frac{5}{11} = 0.454$

येथे 45 हा संख्यासमूह परत परत येतो.

$\therefore \frac{5}{11} = 0.\overline{45}$

वरील उदाहरणांवरून हे स्पष्ट होते की, जेव्हा छेदस्थानी 2 किंवा 5 या खेरीज अन्य गुणक असतात, तेव्हा भागाकाराच्या उत्तरातील दशांत अपूर्णांक समूह पुन्हा पुन्हा येत राहतो. अशा अपूर्णांकांना आवर्ति दशांश अपूर्णांक असे म्हणतात.

उदा. 1.13 व 1.14 वरून आपणास असे दिसून येते की, परिमेय संख्यांचे दशांश अपूर्णांकी रूप

1. सीमित असते (म्हणजे भागाकारात काही पायऱ्यानंतर बाकी 0 उरते.)
2. सीमित नसते (म्हणजे भागाकारात बाकी कधीही 0 येत नाही.)

म्हणजे परिमेय संख्या दशांश रूपात सीमित असते किंवा सीमित नसते म्हणजेच आवर्ति असते.

1.8 दशांत अपूर्णांकी संख्येचे p/q या स्वरूपात दर्शविता येणाऱ्या परिमेय संख्येत रुपांतर करणे.

काही उदाहरणांवरून आपण हे समजावून घेऊ

उदा. 1.15 : 1) 0.48 आणि 2) 0.1357 p/q या स्वरूपात मांडा.

उकल :

1. $0.48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$

2. $0.1375 = \frac{1375}{10000} = \frac{55}{400} = \frac{11}{80}$

उदा. 1.16 : 1) 0.666 ..... 2) 0.374374 .... हे p/q या स्वरूपात मांडा.

उकल :

1. समजा $x = 0.666$ ...... (A)

$\therefore 10x = 6.666$ ...... (B)

$\therefore$ (B) – (A)

$\therefore 10x - x = 6.666 - 0.666$

$\therefore 9x = 6$

$\therefore x = \frac{6}{9}$

$\therefore x = \frac{2}{3}$

2. समजा $x = 0.374374 \ldots..$

$\therefore 1000x = 374.374374 \ldots.$

$\therefore$ (B) – (A)

$\therefore 1000x - x = 374.374374 \ldots.. - 0.374374$

$\therefore 999x = 374$

$\therefore x = \frac{374}{999}$

$\therefore 0.374374374 \ldots\ldots. = \frac{374}{999}$

वरील उदाहरणांवरून लक्षात येते की, परिमेय संख्येची दशांश मांडणी संपणारी किंवा संपवणारी परंतु आवर्ति असते.

टीप : 0.374374374 .... या सारखे आवर्ति दशांत अपूर्णांक $0.\overline{374}$ असे लिहितात. 374 या संख्यासमूहावर असणारी आडवी रेषा तो संख्यासमूह भागाकारात पुन्हा पुन्हा येतो, हे दर्शविते.

आपली प्रगती तपासा 1.3

1. खालील दशांश अपूर्णांकी संख्यांचे परिमेय संख्येत रुपांतर करा.

1) $\frac{31}{80}$ 2) $\frac{12}{25}$ 3) $\frac{12}{8}$ 4) $\frac{75}{12}$ 5) $\frac{91}{63}$

2. खालील परिमेय संख्यांचे दशांश अपूर्णांकी संख्येत रुपांतर करा.

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{5}{7}$ 3) $\frac{25}{11}$

3. खालील दशांश अपूर्णांक p/q या स्वरूपात मांडा.

a) 1) 2.3 2) –3.12 3) – 0.715 4) 8.146

b) 1) $0.\overline{333}$ 2) $3.\overline{42}$ 4) 0.315315315 ....

1.9 दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असणाऱ्या परिमेय संख्या

दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असणारी परिमेय संख्या शोधता येईल का?

यासाठी खालील उदाहरणांचा अभ्यास करा.

उदा. 1.17 : $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{6}{5}$ या दरम्यान असणारी परिमेय संख्या सांगा.

उकल : ही संख्या काढण्यासाठी आपण पुढील कृती करू.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}+\frac{6}{5}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{15+24}{20}\right]=\frac{39}{40}$$

आता $\frac{3}{4}=\frac{3\times 10}{4\times 10}=\frac{30}{40}$

आणि $\frac{6}{5}=\frac{6\times 8}{5\times 8}=\frac{48}{40}$

$$\therefore \frac{30}{40}<\frac{39}{40}<\frac{48}{40}$$

$\therefore$ $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{6}{5}$ या दरम्यान $\frac{39}{40}$ ही परिमेय संख्या आहे.

टीप : $\frac{3}{4}=0.75$, $\frac{39}{40}=0.975$ आणि $\frac{6}{5}=1.2$

$$\therefore 0.75<0.975<1.2$$

किंवा $\frac{3}{4}<\frac{39}{40}<\frac{6}{5}$

हे उदाहरण आपण दोन्ही पद्धतीनी सोडवू शकतो.

1. दिलेल्या परिमेय संख्याचा छेद समान करून घ्यावा आणि नंतर संख्यांची सरासरी काढावी.
2. परिमेय संख्येचे दशांत संख्येत रुपांतर करावे आणि नंतर त्या संख्यांची सरासरी काढावी.

दिलेल्या दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान आणखी किती परिमेय संख्या असतील? हा महत्त्वाचा प्रश्न आहे. यासाठी खालील उदाहरणांचा अभ्यास करा.

उदा. 1.18 : $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{3}{4}$ या दरम्यानच्या तीन परिमेय संख्या काढा.

उकल :

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times 8}{2\times 8}=\frac{8}{16}$$

आणि $$\frac{3}{4}=\frac{3\times 4}{4\times 4}=\frac{12}{16}$$

$$\therefore \frac{8}{16}<\frac{9}{16}<\frac{10}{16}<\frac{11}{16}<\frac{12}{16}$$

अशा रीतीने आपल्याला $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{3}{4}$ या दरम्यानच्या $\frac{9}{16}, \frac{10}{16}$ आणि $\frac{11}{16}$ या तीन परिमेय संख्या मिळाल्या.

अशा तऱ्हेने आपण दिलेल्या दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यानमधील असंख्य परिमेय संख्या काढू शकतो.

आता $$\frac{1}{2}=\frac{1\times 50}{2\times 50}=\frac{50}{100}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 25}{4\times 25}=\frac{75}{100}$$

$$\therefore \frac{50}{100}<\frac{51}{100}<\frac{52}{100}<\frac{53}{100}<\ldots\ldots<\frac{72}{100}<\frac{73}{100}\,\frac{74}{100}<\frac{75}{100}< \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

अशा रीतीने आपण (1) दाखविल्याप्रमाणे $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{3}{4}$ यादरम्यानमधील 24 परिमेय संख्या मांडू शकलो.

अशा रीतीने आपण कितीही संख्या मांडू शकतो.

टीप : वरील उदाहरणावरून आपणास हे लक्षात येते की, दिलेल्या दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान अनंत परिमेय संख्या असू शकतात.

आपली प्रगती तपासा 1.4

1. दिलेल्या परिमेय संख्यांच्या दरम्यानतील परिमेय संख्या काढा.

   1) $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{4}{3}$ 2) $\frac{5}{6}$ 3) $-\frac{3}{4}$ आणि $\frac{1}{3}$

2. दिलेल्या परिमेय संख्यांच्या दरम्यानतील दोन परिमेय संख्या काढा.

   1) $-\frac{2}{3}$ आणि $\frac{1}{2}$ 2) $-\frac{2}{3}$ आणि $-\frac{1}{4}$

3. दिलेल्या परिमेय संख्यांच्या दरम्यानतील 5 परिमेय संख्या काढा.

1) 0.27 आणि 0.30 2) 7.31 आणि 7.35

3) 20.75 आणि 26.80 4) 1.001 आणि 1.002

1.10 अपरिमेय संख्या (Irvational Numbers)

परिमेय संख्यांचे दशांशात रुपांतर केले असता, आपणास एकतर सीमित संख्या मिळते किंवा अनंत संख्या किंवा भागाकारात तीच तीच संख्या किंवा संख्यासमूह परत परत येत राहतो.

जे दशांत सीमित नाहीत, अनंतही नाहीत, परंतु परत परत येत राहतात, असे दशांश आहेत का? त्यासाठी खालील दशांश पहा.

0.10¸ 100¸ 1000¸ 100000 .... (1)

आपल्या लक्षात येईल की या दशांशाला एक विशिष्ट आकृतिबंध आहे आणि तो अनंत लिहिता येतो. पुन्हा पुन्हा येणारे संख्या समूह या ठिकाणी नाहीत.

वरीलप्रमाणेच एक दशांश पहा.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ...... (2)

आपण (1) आणि (2) मधील पुढचे अंक लिहू शकू का?

1. मधील पुढील 6 अंक 000001 ...... आणि

2. मधील पुढील 6 अंक 141516 ...... हे आहेत.

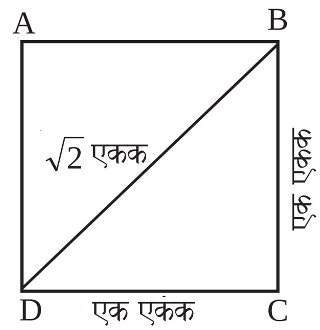
(1) आणि (2) मधील संख्या अपरिमेय संख्या आहेत.

1.11 परिमेय संख्यासंबंधी असणाऱ्या त्रुटी (Inadequacy of rational numbers)

कोणत्याही लांबीचे मापन आपण परिमेय संख्येत करू शकतो का? कोणत्याही वस्तूचे वस्तुमान आपण परिमेय संख्येत करू शकतो का?

पुढील परिस्थितीचा विचार करा.

ज्याची लांबी 1 एकक आहे, असा ABCD हा एक चौरस आहे. साहजिकच्या त्याच्या कर्णाची लांबी $\sqrt{2}$ एकक येईल.



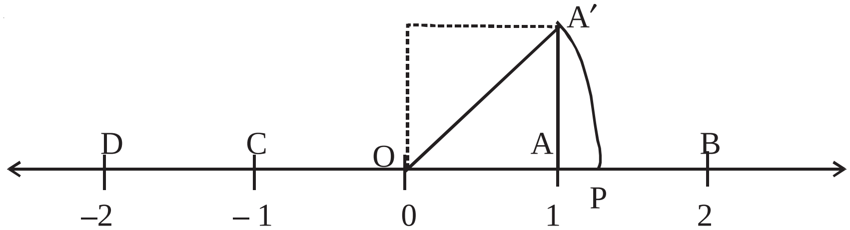
ज्याचा वर्ग 2 आहे, अशी कोणतीही परिमेय संख्या नाही म्हणून $\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या नाही, हे सिद्ध करता येते. (ही सिद्धता या पाठाच्या आवाक्यापलिकडील असल्याने दिली नाही.)

दिलेल्या एककात परिमेय संख्या वापरून आपण दिलेल्या रेषाखंडाची लांबी अचूक मोजू शकत नाही, हे आपल्या लक्षात आले असेलच. त्या दृष्टीने परिमेय संख्या अपुऱ्या आहेत. या अपुरेपणामुळेच परिमेय संख्यांचा विस्तार अपरिमेय संख्यांपर्यंत करणे भाग पडले. (अपरिमेय संख्या म्हणजे ज्या संख्या परिमेय नाहीत, अशा संख्या होय.)

प्रत्येक परिमेय संख्या संख्यारेषेवरील बिंदूशी निगडीत असते, हे आपण जाणतोच. आता या विधानाचा व्यत्यास पाहू. संख्यारेषेवर घेतलेला कोणताही बिंदू परिमेय संख्येशी निगडीत असतो का? या प्रश्नाचे उत्तर नाही असे आहे. या खुलाशासाठी आपण पुढील उदाहरण पाहू.

संख्या रेषेवर 0, 1, 2, –1 आणि – 2 हे बिंदू अनुक्रमे O, A, B, C, D या अक्षरांनी निर्देशित करा.

बिंदू A पाशी $AA' \perp OA$ ही रेषा काढा. AA' अंतर म्हणजे 1 एकक अंतर आहे, असे माना.



आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे बाजूची लांबी OA असणारा चौरस पूर्ण करा. OA′ हा चौरसाचा कर्ण होय.

$\therefore OA' = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ एकक O केंद्र घेऊन आणि OA′ ही त्रिज्या घेऊन वर्तुळपाकळी काढली असता ही संख्यारेषेला P बिंदूत छेदते. बिंदू P संख्यारेषेवरील $\sqrt{2}$ चे स्थान दर्शविते.

$\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या असल्याने बिंदू P सारखे असंख्य बिंदू संख्यारेषेवर आहेत आणि हे आपण परिमेय संख्यांनी दर्शवू शकत नाही, असा निष्कर्ष काढता येईल. वरीलप्रमाणेच आपण संख्यारेषेवर $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{2}$ यासारखे परिमेय संख्यांनी दर्शवू न शकणारे बिंदू स्थापन करू शकतो. म्हणजेच संख्यारेषेवर परिमेय संख्यांशी संबंधित असणाऱ्या बिंदूमध्ये रिक्त जागा आहे, हे सिद्ध होते. म्हणून संख्यारेषेवर परिमेय संख्यांशी संबंधित व अपरिमेय संख्यांशी संबंधित बिंदू असतात.

अशा तऱ्हेने परिमेय संख्यांशी संबंधित असणाऱ्या कार्यप्रणालीमध्ये आपण अपरिमेय संख्या समाविष्ट केल्या आहेत. परिमेय संख्या आणि अपरिमेय संख्या याचा समावेश असणाऱ्या प्रणालीस वास्तव संख्या पद्धती असे म्हणतात.

ज्या संख्याप्रणालीमध्ये सर्व परिमेय आणि सर्व अपरिमेय संख्यांचा समावेश होतो त्या संख्याप्रणालीस वास्तव संख्याप्रणाली असे म्हणतात.

आपली प्रगती तपासा 1.5

1. पुढील उदाहरणामधील संख्यांचे दशांशात रुपांतर करून दशांश चिन्हापुढील पहिले तीन अंक सांगा.

   $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$

टिपा

2. खालील संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $1+\sqrt{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.12 दिलेल्या दोन संख्यांमधील अपरिमेय संख्या शोधणे

दिलेल्या दोन संख्यांमधील अपरिमेय संख्या शोधण्याची प्रक्रिया आपण खालील उदाहरणाद्वारे समजावून घेऊ.

उदा. 1. 19 : 2 आणि 3 मधील अपरिमेय संख्या काढा.

उकल : $\sqrt{2\times3}$ ही संख्या विचारात घ्या.

$\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}\approx 2.45$ अंदाजे

2.45 ही संख्या 2 आणि 3 मध्ये असून ही अपरिमेय संख्या आहे.

उदा. 1.20 : $\sqrt{3}$ आणि 2 मधील अपरिमेय संख्या काढा.

उकल : $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ ही संख्या विचारात घ्या.

$$=\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

$$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\approx 1+\frac{1.73}{2}$$

$$\approx 1.866$$

$\therefore \frac{\sqrt{3}+2}{2}\approx 1.866$ ही संख्या $\sqrt{2}$ (≈ 1.732) आणि 2 या दरम्यान आहे.

$\therefore \sqrt{3}$ व 2 मधील अपरिमेय संख्या $=\frac{\sqrt{3}+2}{2}$

आपली प्रगती तपासा 1.6

1. दिलेल्या संख्यांच्या जोडीमधील अपरिमेय संख्या काढा.

   1) 2 आणि 4   2) $\sqrt{3}$ आणि 3   3) $\sqrt{2}$ आणि $\sqrt{3}$

2. 1 आणि 2 यामध्ये किती अपरिमेय संख्या आहेत हे आपणास सांगता येईल का? उदाहरणाने स्पष्ट करा.

1.13 दशांश अपूर्णांकाची किंमत विशिष्ट दशांश स्थळापर्यंत काढणे.

व्यवहारात बऱ्याच वेळा विशिष्ट दशांशस्थळापर्यंत अंदाजे किंमत सांगणे सोयीचे होते.

पुढील उदाहरणांनी हे स्पष्ट होईल.

उदा. 1.21 : 2.71832 या संख्येची किंमत दोन दशांश स्थळापर्यंत सांगा.

उकल : संख्येमध्ये दशांश स्थळानंतर आलेल्या तिसऱ्या स्थानी 8 हा अंक आहे. हा अंक 5 पेक्षा मोठा आहे.

$\therefore$ 2.71832 या संख्येची 2 दशांशस्थळापर्यंत अंदाजे किंमत 2.72

उदा. 1.22 : 12.78962 या संख्येची किंमत तीन दशांश स्थळापर्यंत सांगा.

उकल : संख्येमध्ये दशांश स्थळानंतर आलेल्या चौथ्या स्थानी 6 हा अंक आहे. हा अंक 5 पेक्षा मोठा आहे. म्हणून आपण तिसऱ्या स्थानी असलेल्या अंकात 1 मिळवून अंदाजे किंमत काढू. म्हणून 12.78962 या संख्येची तीन दशांश स्थळापर्यंत असणारी किंमत 12.790

अशा तऱ्हेने विशिष्ट दशांश स्थळापर्यंत किंमत सांगण्यासाठी आपण विशिष्ट दशांशस्थळानंतरचा अंक विचारात घेतो आणि

1. तो अंक 5 पेक्षा लहान असेल तर तो विचारात न घेता आपण विशिष्ट दशांशस्थळापर्यंतचे उत्तर सांगतो.

2. तो अंक 5 किंवा 5 पेक्षा मोठा असेल, तर त्या अगोदरच्या अंकात आपण 1 ही संख्या मिळवितो आणि विशिष्ट दशांशस्थळापर्यंतचे उत्तर सांगतो.

आपली प्रगती तपासा 1.7

1. खालील संख्यांची किंमत तीन दशांश स्थळापर्यंत सांगा.

   1) 0.77777   2) 7.3259   3) 1.0118   4) 3.1428   5) 1.1413

तुम्ही काय शिकलात?

- ❖ नैसर्गिक संख्या पूर्ण संख्या आणि पूर्णांक संख्या आणि चार मूलभूत गणिती प्रक्रिया यांची उजळणी.
- ❖ वरील संख्यांचे संख्यारेषेवर आरेखन
- ❖ पूर्णांक संख्यांचा परिमेय संख्यांपर्यंत विस्तार

  p आणि q या पूर्णांक संख्या असून $q \neq 0$ तर p/q या संख्येस परिमेय संख्या असे म्हणतात.
- ❖ ज्या दोन परिमेय संख्यांचे प्रमाणित रूप (standard form) सममूल्य असते, त्या दोन परिमेय संख्या सममूल्य असतात.
- ❖ परिमेय संख्यांचे संख्यारेषेवर आलेखन करता येते.
- ❖ संख्यारेषेवर परिमेय संख्या दर्शविणारा एक आणि एकच बिंदू असतो.
- ❖ परिमेय संख्यांची तुलना करता येते.
  - ❖ संख्यांचे छेद सारखे करून त्या संख्येच्या अंशांची तुलना करणे.
  - ❖ परिमेय संख्यांचे संख्यारेषेवर आरेखन केले असता जी संख्या उजव्या बाजूस असते ती मोठी असते.
- ❖ पूर्णांक संख्यांवर ज्या चार मूलभूत प्रक्रिया करता येतात, त्या परिमेय संख्यांवरसुद्धा करता येतात.
- ❖ परिमेय संख्यांचे दशांशात रुपांतर केले असता ते आवर्ति किंवा अनावर्ती असते.
- ❖ दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान अनंत परिमेय संख्या सामावलेल्या असतात.
- ❖ संख्यारेषेवर परिमेय संख्यांनी दाखविता न येणारे बिंदू आहेत. ही परिमेय संख्या प्रणालीमधील मोठी त्रुटी आहे.
- ❖ परिमेय संख्यांचा विस्तार वास्तव संख्यांपर्यंत केला आहे.
- ❖ परिमेय संख्या आणि अपरिमेय संख्या मिळून वास्तव संख्या प्रणाली तयार होते.
- ❖ दिलेल्या कोणत्याही दोन संख्यांच्या दरम्यान असंख्य अपरिमेय संख्या असतात.
- ❖ अपरिमेय संख्यांचे दशांश अपूर्णांकात रुपांतर केले असता ते आवर्ति किंवा अनावर्ती असते.
- ❖ परिमेय किंवा अपरिमेय संख्यांची विशिष्ट दशांशस्थळापर्यंत अंदाजे किंमत काढता येते.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. दिलेल्या यादीमधून

   1) नैसर्गिक संख्या

   2) पूर्णांक असणाऱ्या परंतु नैसर्गिक नसणाऱ्या संख्या

   3) परिमेय असणाऱ्या परंतु नैसर्गिक नसणाऱ्या संख्या आणि

   4) अपरिमेय संख्या

   शोधा

   $-3, 1.7, \frac{6}{7}, \frac{-3}{8}, 0, -32,$

2. पूर्णांक संख्येला परिमेय संख्येचे रुप द्या.

   1) –14   2) 13   3) 0   4) 2

   5) 1   6) –1   7) –25

3. परिमेय संख्यांना अतिसंक्षिप्त रूप द्या.

   $\frac{6}{8}, \frac{14}{21}, \frac{-17}{153}, \frac{13}{273}$

4. परिमेय संख्यांना दशांश रूप द्या.

   1) $\frac{11}{80}$ 2) $\frac{8}{25}$ 3) $\frac{14}{8}$ 4) $\frac{15}{6}$ 5) $\frac{98}{35}$ 6) $\frac{15}{7}$

   7) $\frac{-7}{6}$ 8) $\frac{115}{11}$ 9) $-\frac{17}{13}$ 10) $\frac{126}{36}$

5. दशाश सख्या p/q या स्वरूपात लिहा.

   1) 2.4   2) –0.32   3) 8.14

   4) 3.   5) 0.415415415 .....

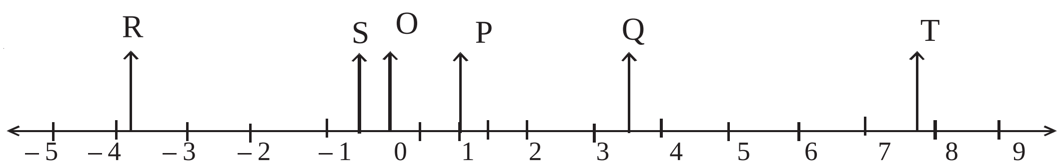
6. दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असणारी परिमेय संख्या शोधा.

   1) $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{7}{8}$ 2) –2 आणि –3   3) $-\frac{4}{5}$ आणि $\frac{1}{3}$

7. दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असणाऱ्या प्रत्येकी तीन परिमेय संख्या शोधा.

   1) $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{-3}{4}$ 2) 0.27 आणि 0.28 3) 1.32 आणि 1.34

8. संख्यारेषेवरील P, Q, R, S आणि T या बिंदूंशी संबंधित असणाऱ्या परिमेय संख्या सांगा.



9. खालील परिमेय संख्यांची बेरीज करा.

   1) $\frac{3}{5}, \frac{-7}{5}$ 2) $\frac{-7}{9}, \frac{5}{9}$ 3) $\frac{3}{5}, \frac{7}{3}$ 4) $\frac{9}{5}, \frac{2}{3}$ 5) $\frac{18}{7}, -\frac{7}{6}$

10. खालील परिमेय संख्यांचा गुणाकार करा.

    1) $\frac{3}{5}, \frac{7}{3}$ 2) $\frac{19}{5}, \frac{2}{3}$ 3) $\frac{15}{7}, \frac{-14}{5}$

11. दोन संख्यांच्या दरम्यान असणारी अपरिमेय संख्या शोधा.

    1) 1 आणि 3 2) $\sqrt{3}$ आणि 3

    3) $\sqrt{2}$ आणि 4) $-\sqrt{2}$ आणि $\sqrt{2}$

12. 2 आणि 7 च्या दरव्यान किती परिमेय आणि किती अपरिमेय संख्या आहेत?

13. खालील संख्यांची अंदाजे किंत दोन दशांश स्थळापर्यंत काढा.

    1) 0.338 2) 3.924 3) 3.1415 4) 3.1428

14. खालील संख्यांची किंमत तीन दशांशस्थळापर्यंत काढा.

    1) $\frac{3}{4}$ 2) $2 + \sqrt{2}$ 3) 1.7326 4) 0.9999

15. खालील अपरिमेय संख्यांना सोपे रूप द्या.

    (पहिले उदाहरण सोडवून दाखविले आहे.)

    1) $12\sqrt{3}+5\sqrt{3}-7\sqrt{3}=\sqrt{3}\ [12 + 5 - 7] = 10\sqrt{3}$

    2) $3\sqrt{2}-2\sqrt{8}+7\sqrt{2}$

    3) $[\sqrt{8}\times 3\sqrt{2})\times 6\sqrt{2}]+36\sqrt{2}$

आपली प्रगती तपासा – उत्तरे

1.1

1. पूर्णांक संख्या 4¸ –36¸ –6

   परिमेय संख्या 4¸ , –36¸ , –6

2. 1) $\frac{-7}{4}, -\frac{3}{4}$ –15.0,

   2) $-\frac{7}{4}, -\frac{3}{7}$, –15, $\frac{5}{17}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$

   3) $-\frac{7}{4}, -\frac{3}{7}$, $\frac{15}{7}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$

   4) सर्व परिमेय संख्या आहेत.

3. 1) $\frac{16}{3}$, परिमेय 2) $-\frac{1}{2}$, परिमेय 3) – 21, पूर्णांक संख्या परिमेयसंख्या,

   4) शून्य, पूर्ण संख्या, पूर्णांक संख्या आणि परिमेयसंख्या

   5) 4, सर्व 6) $\frac{10}{7}$, परिमेय 7) $\frac{8}{3}$, परिमेय

4. 1) 2 2) –8 3) 1

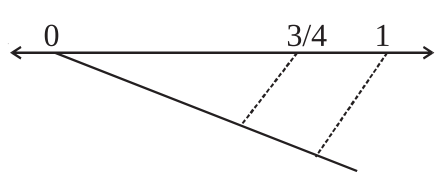
5. $\frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

6. – 10, $\frac{15}{5}, \frac{29}{7}, \frac{-6}{2}$

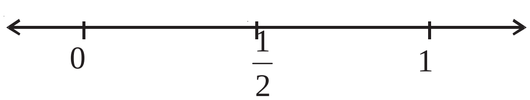
7. 1) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20}$ 2) $\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24}$ 3) $\frac{17}{3} = \frac{34}{6} = \frac{51}{9} = \frac{68}{12}$

8. 1)

2)



3)



टिपा

9. a) $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ b) $\frac{7}{9} > \frac{3}{5}$ c) $\frac{-1}{2} > \frac{-2}{3}$ d) e) $\frac{3}{2} > -\frac{7}{6}$

1.2

1. 1) $\frac{9}{7}$ 2) $-\frac{4}{15}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$

2. 1) $\frac{19}{6}$ 2) $\frac{188}{63}$ 3) $-\frac{11}{35}$

3. 1) $\frac{53}{48}$ 2) $\frac{149}{60}$

4. 1) $\frac{2}{5}$ 2) – 4 3) $\frac{5}{56}$

5. 1) $\frac{73}{30}$ 2) – 1

6. 1) $\frac{5}{33}$ 2) $\frac{9}{35}$ 3) $\frac{9}{7}$

7. 1) 2 2) $\frac{35}{16}$ 3) $-\frac{10}{3}$

8. 1) $\frac{1}{5}$ 2) 7

9. 29/35

10. 3/4

1.3

1. 1) 0.3875 2) 0.48 3) 1.5 4) 6.25 5) $1.\overline{4}$

2. 1) $0.\overline{6}$ 2) $0.\overline{714285}$ 3) $2.\overline{27}$

3 1) a) 1) $\frac{23}{10}$ 2) $-\frac{78}{25}$ 3) $-\frac{143}{200}$ 4) $\frac{4073}{500}$

b) 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{113}{33}$ 3) $-\frac{35}{111}$

1.4

1. 1) $\frac{25}{24}$ 2) 5.5 3) $\frac{-5}{24}$

2. 1) 0.2 आणि 0.3 2) –0.30, 0.35

3) 1) 0.271, 0.275, 0.281, 0.285, 0.291

2) 7.315, 7.320, 7.325, 7.330, 7.331

3) 21.75, 22.75, 23.75, 24.75, 25.75

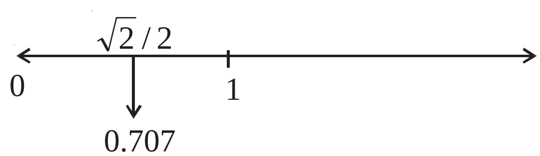
4) 1.0011, 1.0012, 1.0013, 1.0014, 1.0015

टीप याखेरीज आणखीही उत्तरे येऊ शकतील.

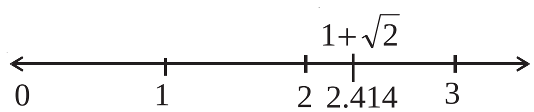
1.5

1. 1.414, 1732, 2.236

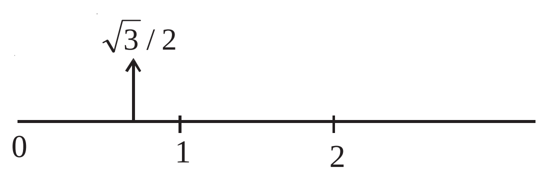
2. 1)



2)



3)



1.6

1. 1) $\sqrt{5}$ 2) + 1 3) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

2. अनंत

1.0001, 1.0002, ...,

1.0011 .... 1.0020, 1.00021 ....

1.7

1. 1) 0.778 2) 7.326 3) 1.012 4) 3.143 5) 1.141

टिपा

प्रश्नांची उत्तरे

1) नैसर्गिक संख्या 17

पूर्णांक असणाऱ्या परंतु नैसर्गिक नसणाऱ्या संख्या – 3, 0, –32

परिमेय असणाऱ्या परंतु नैसर्गिक नसणाऱ्या संख्या -3, $\frac{6}{7}, \frac{-3}{8}$, 0, - 32, $\frac{3}{14}, \frac{11}{6}$

अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}$

2. 1) $-\frac{14}{1}$ 2) $\frac{13}{1}$ 3) $\frac{0}{1}$ 4) $\frac{2}{1}$

5) $\frac{1}{1}$ 6) $\frac{-1}{1}$ 7) $\frac{-25}{1}$

3. $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{21}$

4. 1) 0.1375 2) 0.32 3) 1.75 4) 2.5 5) 2.8

6) 2.142857 7) $-1.\overline{166}$ 8) $10.\overline{45}$ 9) $-1.\overline{307692}$ 10) 3.5

5. 1) $\frac{12}{5}$ 2) $\frac{-8}{25}$ 3) $\frac{407}{50}$ 4) $\frac{107}{33}$ 5) $\frac{415}{999}$

6. 1) $\frac{13}{16}$ 2) –2.5 3) शून्य

7. 1) 0.50, 0.25, 0.00 2) 0.271, 0.274, 0.277, 3) 1.325, 1.33, 1.335

8. 1) R : – 3.8, 2) S : –0.5 3) O : 0.00 4) S : $-0\overline{33}$

5) Q : 3.5 6) T : $-7.\overline{66}$

9. 1) $-\frac{4}{5}$ 2) $-\frac{2}{9}$ 3) $\frac{44}{15}$ 4) $\frac{37}{15}$ 5) $\frac{59}{42}$

10. 1) $\frac{7}{5}$ 2) $\frac{38}{15}$ 3) –6

11.	1) $\sqrt{3}$	2) $1 + \sqrt{3}$	3) $\sqrt{3}$	4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
12.	अनंत			
13.	1) 0.34	2) 3.92	3) 3.14	4) 3.14
14.	1) 0.75	2) 3.414	3) 1. 733	4) 1.000
15.	2) $6\sqrt{2}$	3) 180	4) 2	

❖ ❖ ❖

२

घातांक आणि करणी

यापूर्वीच्या पाठात आपण दोन किंवा अधिक वास्तव संख्यांच्या गुणाकाराविषयी माहिती घेतली आहे. खालील गुणाकार आपण सहजपणे मांडू शकतो.

$4 \times 4 \times 4 = 64$

$11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641$

आणि $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

आता आणखी एका गुणाकाराचा विचार करा.

13 ही संख्या 15 वेळा मांडून त्या गुणाकाराचे उत्तर काढावयाचे आहे.

म्हणजे,

$13 \times 13 \times 13$ .... 15 वेळा

हे उत्तर काढणे अतिशय कठीण आहे.

घातांक वापरून ही समस्या सोडविणे शक्य आहे. या पाठात आपण घातांक म्हणजे काय हे पाहणार आहोत. घातांकाचे नियम व त्यांचे उपयोजनही पाहणार आहोत. वास्तव संख्या त्यांच्या मूळ संख्यांच्या घातांकाच्या स्वरूपात कशा मांडता येतात, हेही पाहणार आहोत.

पाठाच्या पुढील भागात आपण $a^{\frac{1}{q}}$ म्हणजे a चे q वे मूळ कसे हे पाहणार आहोत. तसेच करणी चिन्ह, करणीस्थ संख्या व घातांक यांची ओळख करून घेणार आहोत. आपण करणीचे नियम व ते वापरून करणीस सोपे रूप कसे देता येते, हे पाहणार आहोत. परिमेयीकरण गुणक म्हणजे काय व करणीच्या छेदाचे परिमेयीकरण कसे करावे, हे आपण पाहणार आहोत.

उद्दिष्टे :

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खालील बाबींचे ज्ञान होईल.

- वारंवार येणाऱ्या संख्यांचा गुणाकार घातांकरूपात मांडता येईल. त्याचप्रमाणे घातांकित संख्या गुणाकाराच्या स्वरूपात मांडता येतील.
- घातांकित स्वरूपात लिहिलेल्या संख्येचा पाया आणि घातांक ओळखता येईल.

- नैसर्गिक संख्या त्या संख्येच्या मूळ गुणाकारांच्या घातांकाच्या स्वरूपात मांडता येतील.
- घातांकाचे नियम सांगता येतील.
- a°, $-a^{-m}$ आणि $a^{p/q}$ यांचा अर्थ सांगता येईल.
- घातांकाचे नियम वापरून घातांकित समीकरणे सोडविता येतील.
- अपरिमेय संख्यासंचामधून करणीसंख्या ओळखता येतील.
- करणीची करणीस्थसंख्या व घातांक ओळखता येईल.
- करणीचे नियम सांगता येतील.
- दिलेली करणी सोप्या रुपात मांडता येईल.
- भिन्न रूपात असलेली करणीपदे समरूपात आणता येतील.
- करणीसंख्यांवर चार मूलभूत गणिती प्रक्रिया करता येतील.
- दिलेल्या करणीसंख्या चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडता येतील.
- दिलेल्या करणीचा परिमेयीकरण गुणक शोधता येईल.
- $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ आणि $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ यासारख्या करणींच्या छेदांचे (या ठिकाणी x आणि y या नैसर्गिक संख्या व a आणि b या पूर्णांक संख्या आहेत.) परिमपयीकरण करता येईल.
- करणीराशींना सोपे रूप देता येईल.

अपेक्षित पूर्वज्ञान :

- मूळ संख्या
- संख्यांवरील चार मूलभूत प्रक्रिया
- परिमेय संख्या
- संख्यांमधील क्रमबद्धता

2.1 घातांकांचे लेखन

पुढील गुणाकार पहा.

1) 7×7 2) $3 \times 3 \times 3$ 3) $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

क्र. i) मध्ये 7 ही संख्या 2 वेळा घेऊन गुणाकार केला आहे.

$\therefore$ 7×7 ची मांडणी 7^2 अशी करतात.

क्र. ii) मध्ये 3 ही संख्या 3 वेळा घेऊन गुणाकार केला आहे.

$\therefore$ $3 \times 3 \times 3$ ची मांडणी 3^3 अशी करतात.

क्र. iii) मध्ये 6 ही संख्या 5 वेळा घेऊन गुणाकार केला आहे.

$\therefore$ $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ ची मांडणी 6^5 अशी करतात.

7^2 ही संख्या 7 या संख्येचा दुसरा घात किंवा 7 चा वर्ग अशी वाचतात.

या ठिकाणी 7 या संख्येला पाया व 2 या संख्येला घातांक असे म्हणतात.

त्याचप्रमाणे 3^3 ही संख्या 3 या संख्येचा तिसरा घात किंवा 3 चा घन अशी वाचतात.

या ठिकाणी 3 या संख्येला पाया आणि 3 या संख्येला घातांक असे म्हणतात.

त्याचप्रमाणेच 6^5 ही संख्या 6 चा 5 वा घात अशी वाचतात. या ठिकाणी 6 या संख्येला पाया आणि 5 या संख्येला घातांक असे म्हणतात. वरील सर्व ठिकाणी गुणाकारात पुन्हा पुन्हा येणाऱ्या एकाच संख्यांचा गुणाकार लिहिताना जी पद्धति वापरतात त्यास घातांक आकृतिबंध असे म्हणतात.

$\therefore$ $5 \times 5 \times$ . . . . 20 वेळा $= 5^{20}$

आणि $(7)\ (\ (7)$ . . . . . . 10 वेळा $= (7)^{10}$

5^{20} मध्ये, 5 ही संख्या पाया आणि 20 ही संख्या घातांक आहे. $(7)^{10}$ मध्ये, 7 ही संख्या पाया आणि 10 ही संख्या घातांक आहे. त्याचप्रमाणे घातांकाचे चिन्ह वापरून कुठल्याही परिमेय संख्येचा तिच्याशीच असणारा गुणाकार आपण अचूक मांडू शकतो.

$$\therefore \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ 16 वेळा } = \left(\frac{3}{5}\right)^{16}$$

$$\text{आणि } \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \ldots\ldots\ldots \text{10 वेळा } = \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}$$

म्हणजेच, a या परिमेय संख्येचा तिच्याशीच m वेळा गुणाकार असेल तर तो गुणाकार a^m असा लिहितात. या ठिकाणी a हा पाया व m हा घातांक आहे.

आता काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 2.1 : किंमती काढा.

1. $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ 2. $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$

टिपा

उकल :

1. $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{(2)^3}{(7)^3} = \frac{8}{343}$

2. $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-3)^4}{(5)^4} = \frac{81}{625}$

उदा. 2.2 ः घातांक रूपात लिहा.

1. (‘5) × (‘5) × (‘5) × (‘5) × (‘5) × (‘5) × (‘5)

2. $\left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right)$

उकल ः

1. (‘5) × (‘5) × (‘5) × (‘5) × (‘5) × (‘5) × (‘5) = $(5)^7$

2. $\left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) = \left(\frac{3}{11}\right)^4$

उदा. 2.3 ः खालील संख्या घातांक रूपात लिहा.

संख्येचा पाया व घातांक लिहा.

1. 4096   2. $\frac{125}{729}$ 3. ‘512

उकल :

1. $4096 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

$= (4)^6$ पाया $= 4$, घातांक $= 6$

$= (2^2)^6 = 2^{12}$

$\therefore 4096 = 2^{12}$ पाया $= 2$, घातांक 12

2. $\frac{125}{729} = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} = \left(\frac{5}{9}\right)^3$

पाया $= \frac{5}{9}$ घातांक $= 3$

टिपा

3. $512 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^9$

पाया $= 2$, घातांक $= 9$

उदा. 2.4 : सोपे रूप द्या.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

उकल :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3^3}{2^3}$$

तसेच $\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4^4}{3^4}$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{3^3}{2^3} \times \frac{4^4}{3^4}$$

$$= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= \frac{32}{3}$$

उदा. 2.5 : दिलेल्या संख्येचा व्यस्तांक मांडून उत्तर घातांकामध्ये लिहा.

1. 3^5 2. $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ 3. $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

उकल :

1. $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 243$

$\therefore$ व्यस्तांक $= \frac{1}{243} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$

$$\text{चा व्यस्तांक } = \frac{4^2}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

3. $\left(-\frac{5}{6}\right)^9 = \frac{(-5)^9}{(6)^9}$

$$\therefore \left(-\frac{5}{6}\right)^9 \text{ चा व्यस्तांक } = \frac{-6^9}{5^9} = \left(\frac{-6}{5}\right)^9$$

p/q ही शून्याखेरीज कोणतीही परिमेय संख्या असेल आणि m ही धन पूर्णांक संख्या असेल,

तर $\left(\frac{p}{q}\right)^m$ चा व्यस्तांक $\left(\frac{q}{p}\right)$ येतो.

हे ध्यानात ठेवा.

आपली प्रगती तपासा 2.1

1. घातांक रूपात लिहा.

1) $(7) \times (7) \times (7) \times (7)$

2) $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \ldots\ldots$ 10 वेळा

3) $\left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) \times \ldots\ldots$ 20 वेळा

2. पाया व घातांक सांगा.

1) $(3)^5$ 2) $(7)^4$ 3) $\left(-\frac{2}{11}\right)^8$

3. किंमती काढा.

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^4$ 2) $\left(\frac{-2}{9}\right)^4$ 3) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

4. सोपे रूप द्या.

1) $\left(\frac{7}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^6$ 2) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^2$

5. व्यस्तांक लिहा.

1) 3^5 2) $(-7)^4$ 3) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$

2.2 संख्येचे मूळ अवयव (Prime Factorisation)

कोणतीही संयुक्त संख्या तिच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या स्वरूपात मांडता येते.

उदा. 72, 760 आणि 7623 या संयुक्त संख्या लक्षात घ्या.

1. $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^3 \times 3^2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

2. $760 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 19$

$= 2^3 \times 5^1 \times 19^1$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 760 \\ \hline 2 & 380 \\ \hline 2 & 190 \\ \hline 5 & 95 \\ \hline 19 & 19 \\ \hline & 1 \end{array}$$

3. $7623 = 3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 11$

$= 3^2 \times 7^1 \times 11^2$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 7623 \\ \hline 3 & 2541 \\ \hline 7 & 847 \\ \hline 11 & 121 \\ \hline 11 & 11 \\ \hline & 1 \end{array}$$

1 खेरीज कोणतीही नैसर्गिक संख्या आपल्याला त्या संख्येच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या स्वरूपात मांडता येते. या गुणाकारात मूळ अवयव कोणत्याही क्रमाने आले तरी चालतात. (क्रमनिरपेक्षता गुणधर्म)

आता काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 2.6 : 24300 ही संख्या घातांकरूपात मांडा.

उकल : $24300 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3$

$\therefore\ 24300 = 2^2 \times 3^5 \times 5^2$

उदा. 2.7 : 98784 ही संख्या घातांक रूपात मांडा.

उकल :

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 98784 \\ \hline
2 & 49392 \\ \hline
2 & 24696 \\ \hline
2 & 12348 \\ \hline
2 & 6174 \\ \hline
3 & 3087 \\ \hline
3 & 1029 \\ \hline
7 & 343 \\ \hline
7 & 49 \\ \hline
7 & 7 \\ \hline
 & 1
\end{array}
$$

$\therefore\ 98784 = 2^5 \times 3^2 \times 7^3$

आपली प्रगती तपासा 2.2

1. खालील संख्या त्यांच्या मूळ संख्यांच्या घातांकरूपात लिहा.

   1) 429 2) 648 3) 1512

2. घातांक रूपात लिहा.

   1) 729 2) 512 3) 2592

   4) $\frac{1331}{4096}$ 5) $-\frac{243}{32}$

2.3 घातांकाचे नियम (Laws of Exponents)

खालील उदाहरणे पहा.

1. $3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

   $= 3^5 = 3^{2+3}$

2. $(-7)^2 \times (-7)^4 = [(-7) \times (-7)] \times [(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)]$

   $= [(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)]$

   $= (-7)^6 = (-7)^{2+4}$

3. $\times\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left[\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right]\times\left[\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right]$

$$=\left[\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right]$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3+4}=\left(\frac{3}{4}\right)^{7}$$

4. $a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a) = a^7 = a^{3+4}$

वरील उदाहरणांवरून आपल्या लक्षात येते की,

नियम 1 : a ही कोणतीही परिमेय संख्या आणि m आणि n हे धन पूर्णांक असतील तर,

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

उदा. 2.8 : किंमत काढा.

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^{5}$$

उकल : $a = -\frac{3}{2}$, $m = 3,\ n = 5$

$$\therefore \left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^{5}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3+5}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{8}=\frac{6561}{256}$$

उदा 2.9 : किंमत काढा.

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{2}\times\left(\frac{7}{4}\right)^{3}$$

उकल : $\left(\frac{7}{4}\right)^{2}\times\left(\frac{7}{4}\right)^{3}=\left(\frac{7}{4}\right)^{2+3}=\left(\frac{7}{4}\right)^{5}=\frac{16807}{1024}$

आता खालील उदाहरणांकडे लक्ष द्या.

1. $7^5 \div 7^3 = \frac{7^5}{7^3} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = 7 \times 7 = 7^2 = 49$

2. $(-3)^7 \div (-3)^4 = \frac{(-3)^7}{(-3)^4} = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}$

$$= (-3)(-3)(-3) = (-3)^3 = (-3)^{7-4}$$

वरील उदाहणांवरून आपल्या लक्षात येतील की,

टिपा

नियम 2 : ‘a’ ही शून्याखेरीज कोणतीही परिमेय संख्या आणि m आणि n हे धन पूर्णांक असतील, (m > n) तर

$a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

उदा. 2.10 : किंमत काढा.

$$\left(\frac{35}{25}\right)^{16} \div \left(\frac{35}{25}\right)^{13}$$

$$= \left(\frac{35}{25}\right)^{16-13} = \left(\frac{35}{25}\right)^{3} = \left(\frac{7}{5}\right)^{3} = \frac{343}{125}$$

नियम 2 : मध्ये, $m < n \Rightarrow n > m$

तेव्हा, $a^m \div a^n = a^{-(n-m)} = \dfrac{1}{a^{m-n}}$

नियम 3 : मध्ये, $n > m$

तेव्हा $a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{m-n}}$

उदा. 2.11 : किंमत काढा.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{6} \div \left(\frac{3}{7}\right)^{9}$$

उकल : $a = \frac{3}{7}$, m=6, n = 9

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{6} \div \left(\frac{3}{7}\right)^{9} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{9-6}}$$

$$= \frac{7^3}{3^3} = \frac{343}{27}$$

खालील उदाहरणे पहा.

१. $(3^3)^2 = 3^3 \times 3^3 = 3^{3+3} = 3^6 = 3^{3\times 2}$

2. $$\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{2}\right]^{5} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{2} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{2} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{2} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{3}{7}\right)^{2+2+2+2+2} = \left(\frac{3}{7}\right)^{10} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2\times 5}$$

वरील दोन उदाहरणांवरून आपल्या लक्षात येते की,

नियम 4 : a ही कोणतीही परिमेय संख्या आणि m आणि n हे धन पूर्णांक असतील तर,

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

आता एक उदाहरण सोडवू.

उदा. 2.12 : किंमत काढा.

$$\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3$$

उकल :

$$\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{2\times 3} = \left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{64}{15625}$$

2.3.1 ः शून्य घातांक [Zero Exponent]

$a^m \div a^n = a^{m-n}$, $m > n$ असताना

$= \dfrac{1}{a^{n-m}}$, $n > m$ असताना

हे आपणास माहीत आहेत.

परंतु $m = n$ असताना काय उत्तर येते ते पाहू.

$\therefore$ $a^m \div a^n = a^m \div a^m = a^{m-m}$

$$\Rightarrow \frac{a^m}{a^m} = a^0$$

$$\Rightarrow 1 = a^0$$

यावरून आपणास महत्त्वाचा नियम मिळतो.

नियम 5 : a ही शून्याखेरीज कोणतीही परिमेय संख्या असेल तर,

$$a^0 = 1$$

उदा. 2.13 : किंमत काढा.

1) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^0$ 2) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^0$

उकल : $a^0 = 1$ हा नियम वापरून.

$$1)\ \left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$$

त्याचप्रमाणे $$2)\ \left(\frac{-3}{4}\right)^0 = 1$$

आपली प्रगती तपासा. 2.3

1. खालील उदाहरणांना सोपे रूप देऊन उत्तरे घातांकित स्वरूपात मांडा.

   1) $(7)^2 \times (7)^3$ 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ 3) $\left(-\frac{7}{8}\right)^1 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^2 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3$

2. खालील उदाहरणांना सोपे रूप देऊन उत्तरे घातांकित स्वरूपात मांडा.

   1) $(7)^9 \div (7)^7$ 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^8 \div \left(\frac{3}{4}\right)^2$ 3) $\left(\frac{-7}{3}\right)^{18} \div \left(\frac{-7}{3}\right)^3$

3. खालील उदाहरणांना सोपे रूप देऊन उत्तरे घातांकित स्वरूपात मांडा.

   1) $(2^6)^3$ 2) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^2$ 3) $\left[\left(-\frac{5}{9}\right)^3\right]^5$

   4) $\left(\frac{11}{3}\right)^5 \times \left(\frac{15}{7}\right)^0$ 5) $\left(-\frac{7}{11}\right)^0 \times \left(-\frac{7}{11}\right)^3$

4. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत?

   1) $7^3 \times 7^3 = 7^6$ 2) $\left(\frac{3}{11}\right)^5 \times \left(\frac{3}{11}\right)^2 = \left(\frac{3}{11}\right)^7$ 3) $\left[\left(\frac{4}{9}\right)^5\right]^4 = \left(\frac{4}{9}\right)^9$

   4) $\left[\left(\frac{3}{19}\right)^6\right]^2 = \left(\frac{3}{19}\right)^8$ 5) $\left(\frac{3}{11}\right)^0 = 0$ 6) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$

   7) $\left(\frac{8}{15}\right)^5 \times \left(\frac{7}{6}\right)^0 = \left(\frac{8}{15}\right)^5$

2.4 ऋण घातांक (Negative Integers as Exponents)

1. 5 या संख्येचा व्यस्तांक $\frac{1}{5}$ आहे, हे आपणाला माहिती आहेच. आपण व्यस्तांक 5^{-1} असा लिहितो आणि पाचचा उणे एक घात असे वाचतो.

2. (-7) चा व्यस्तांक $-\frac{1}{7}$ आहे. आपण हा व्यस्तांक $(-7)^{-1}$ असा लिहितो आणि उणे सातचा उणे एक घात असे वाचतो.

3. 5^2 चा व्यस्तांक $\frac{1}{5^2}$ आहे. आपण हा व्यस्तांक 5^{-2} असा लिहितो आणि पाचचा उणे दोन घात असा वाचतो.

म्हणजेच,

a ही कोणतीही शून्येतर परिमेय संख्या m हा घन पूर्णांक असेल तर a^m चा व्यस्तांक $\frac{1}{a^m}$ असतो हा व्यस्तांक a^{-m} असा लिहितात आणि एचा उणे एम् घात असावाचतात.

$$\therefore \frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

आता एक उदाहरण सोडवू.

उदा. 2.14 : खालील संख्या धनघातांकित करून मांडा

1) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$ 2) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{2}$

उकल :

1. $$\left(\frac{3}{8}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3^2}{8^2}} = \frac{8^2}{3^2} = \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

2. $$\left(-\frac{4}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{4}{7}\right)^2} = \frac{7^2}{(-4^2)} = \left[-\frac{7}{4}\right]^2$$

वरील उदाहरणावरून आपल्या लक्षात येते की, p/q ही कोणतीही शून्येत्तर परिमेय संख्या असेल m धन पूर्णांक असेल तर,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-m} = \frac{q^m}{p^m} = \left(\frac{p}{q}\right)^m$$

2.5 पूर्णांक घातांकासाठी घातांकाचे नियम

शून्येत्तर पूर्णांकाच्या ऋण घातांकाचा अर्थ आपण पाहिला. घातांकाचे नियम ऋण घातांकालासुद्धा लागू पडतात, हे लक्षात घ्या.

उदा.

1. $$\left(\frac{3}{5}\right)^{-4}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{3}=\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{4}}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{3}=\left(\frac{3}{5}\right)^{3-4}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$$

2. $$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}}\times\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}}=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2+3}}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2-3}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}$$

3. $$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\div\left(-\frac{3}{4}\right)^{-7}=\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}}\div\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{7}}=\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}}\times\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{7}}{1}=\left(-\frac{3}{4}\right)^{7-3}=\left(-\frac{3}{4}\right)^{4}$$

4. $$\left[\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}\right]^{3}=\left[\left(\frac{7}{2}\right)^{2}\right]^{3}=\left(\frac{7}{2}\right)^{6}=\left(\frac{2}{7}\right)^{-6}=\left(\frac{2}{7}\right)^{-2\times 3}=\left(\frac{2}{7}\right)^{-6}$$

वरील उदाहरणांवरून घातांकाचे नियम क्र. 1 ते नियम क्र. 5 हे ऋण घातांकित संख्यांनासुद्धा लागू पडतात, हे आपल्या लक्षात येते.

$\therefore$ a आणि b या शून्याखेरीज कोणत्याही परिमेय संख्या असतील आणि m आणि n हे पूर्णांक असतील तर,

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ जर $m > n$

   $= a^{n-m}$ जर $n > m$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

आपली प्रगती तपासा 2.4

1. $\left(\frac{-3}{7}\right)^{-2}$ ही संख्या p/q या परिमेय संख्या स्वरूपात लिहा.

2. खालील उत्तरे धन पूर्णांक परिमेय संख्या स्वरूपात लिहा.

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-4}$ 2) $12^{5} \times 12^{-3}$ 3) $\left[\left(\frac{3}{13}\right)^{-3}\right]^{4}$

3. खालील प्रश्नांची उत्तरे ऋण पूर्णांक परिमेय संख्या स्वरूपात लिहा.

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{4}$ 2) $[(7)^{2}]^{5}$ 3) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{5}$

4. सोपे रूप द्या.

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{7}$ 2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{4}$ 3) $\left(-\frac{7}{5}\right)^{-4} \div \left(-\frac{7}{5}\right)^{-7}$

5. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत?

1) $a^{m} \times a^{n} = a^{m-n}$

2) $(a^{m})^{n} = a^{-mn}$

3) $a^{m} \times b^{m} = (ab)^{m}$

4) $a^{m} \div a^{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m}$

5) $a^{-m} \times a^{0} = a^{m}$

2.6 $a^{p/q}$ चा अर्थ (Meaning of $a^{p/q}$)

m आणि n च्या कोणत्याही किंमतीसाठी $a^{m} \times a^{n}$ हे सत्य असते हे आपणास माहिती आहेच.

आता a ही धन परिमेय संख्या आणि q ही नैसर्गिक संख्या असताना $a^{1/q}$ चा अर्थ काय होईल?

खालील गुणाकार लक्षात घ्या.

$$\underbrace{a^{1/q} \times a^{1/q} \times a^{1/q} \times \ldots\ldots\ldots\, a^{1/q}}_{q \text{ वेळा}} = a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}} \ldots\ldots \text{ q वेळा}$$

$$= a^{q/q} = a$$

म्हणजेच $a^{1/q}$ चा q घातांक = a किंवा हे a चे q वे मूळ आहे.

आणि ते $\sqrt[q]{a}$ असे लिहितात.

उदा.

$$7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{1+1+1+1}{4}} = 7^{\frac{4}{4}} = 7^1 = 7$$

किंवा $7^{\frac{1}{4}}$ म्हणजे 7 चे चौथे मूळ होय.

ही संख्या $\sqrt[4]{7}$ अशी लिहितात.

जर a ही धन वास्तव संख्या p ही पूर्णांकसंख्या व q ही नैसर्गिक संख्या असेल तर,

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

आपण पाहिले आहे की,

$$\underbrace{a^{p/q} \times a^{p/q} \times a^{p/q} \times \dots\dots\dots \times a^{p/q}}_{q \text{ वेळा}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} \quad \dots\dots \ q \text{ वेळा}$$

$$= a^{\frac{p}{q} \times q} = a^p$$

$$\therefore a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$\therefore$ a^p चे q वे मूळ $a^{p/q}$

त्याचप्रमाणे $7^{2/3}$ म्हणजे 7 च्या वर्गाचे घनमूळ होय.

आता घातांकाचे नियम लिहू या..

1) $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$

2) $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $(ab)^m = a^m \times b^m$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

वरील नियमांचा पडताळा पाहण्यासाठी आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 2.15 : किंमती काढा.

1) $(625)^{1/4}$ 2) $(243)^{2/5}$ 3) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{-3}{4}}$

उकल :

1. $(625)^{\frac{1}{4}} = (5\times5\times5\times5)^{\frac{1}{4}} = \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{4}{1}\times\frac{1}{4}} = 5^1 = 5$

2. $(243)^{\frac{2}{5}} = (3\times3\times3\times3\times3)^{\frac{2}{5}} = \left(3^5\right)^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{5}{1}\times\frac{2}{5}} = 3^2 = 9$

3. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3}\right)^{\frac{-3}{4}}$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{1}\times\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8}$$

आपली प्रगती तपासा 2.5

१. सोपे रूप द्या.

1) $(16)^{3/4}$

2) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$

२. सोपे रूप द्या.

1) $(625)^{\frac{1}{4}} \div (25)^{\frac{1}{2}}$

2) $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}}$

3) $\left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$

टिपा

2.7 करणी (Surds)

$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ आणि $\sqrt{5}$ या सर्व अपरिमेय संख्या आहेत, हे आपण पहिल्या पाठात पाहिले आहेच. आता आपण या विशिष्ट प्रकारच्या अपरिमेय संख्यांचा अभ्यास करणार आहोत. या संख्यांना करणी (Surds or radicals) असे म्हणतात.

करणी (व्याख्या) : x ही धन परिमेय संख्या असताना $\sqrt[n]{x}$ या प्रकारच्या धन अपरिमेय संख्येस करणी असे म्हणतात. करणीमध्ये x चे n वे मूळ अचूक काढता येत नाही.

$\sqrt[n]{x}$ मध्ये,

1) ती संख्या ($\sqrt[n]{x}$) अपरिमेय संख्या असेल

आणि

2) त्या संख्येचे मूळ (x) धन परिमेय संख्या असेल, तर आणि तरच $\sqrt[n]{x}$ ही करणी संख्या असते.

2.7.1 काही व्याख्या

$\sqrt[n]{x}$ मध्ये $\sqrt{\ }$ या चिन्हास मूळ चिन्ह n या संख्येस घातांक (order) आणि x या संख्येस करणीस्थसंख्या (radicand) असे म्हणतात.

टीप :

1. जेव्हा करणीमध्ये कोटी लिहिलेली नसते तेव्हा ती कोटी 2 आहे, असे समजावे.

   उदा. $\sqrt{7} = \sqrt[2]{7}$ कोटी = 2

2. $\sqrt[3]{8}$ ही करणी संख्या नाही, कारण याचे उत्तर 2 ही परिमेय संख्या आहे.

3. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ही जरी अपरिमेय संख्या असली, तरी ही करणी संख्या नाही, कारण ही संख्या अपरिमेय संख्येचे मूळ आहे.

2.8 शुद्ध आणि मिश्र करणी (Pure and Mixed Surd)

१. ज्या करणीमध्ये 1 ही परिमेय संख्या गुणक व इतर गुणक अपरिमेय संख्या असतात, अशा करणीस शुद्ध करणी असे म्हणतात.

   उदा. $\sqrt[5]{16}$, $\sqrt[3]{50}$ या शुद्ध करणी आहेत.

२. ज्या करणीमध्ये 1 या परिमेय संख्येखेरीज कोणतीही परिमेय संख्या गुणक व दुसरा गुणक अपरिमेय संख्या असते तो अशा करणीस मिश्र करणी असे म्हणतात.

   उदा. $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{7}$ या मिश्र करणी आहेत.

2.9 करणीची कोटी (Order of Surd)

$5\sqrt[3]{4}$ यामध्ये 5 या संख्येस सहगुणक (coefficient) 3 या संख्येस कोटी (order) आणि 4 या संख्येस करणीस्थ संख्या असे म्हणतात.

उदा. 2.16 : खालीलपैकी कोणत्या संख्या करणी संख्या आहेत, ते सांगा.

1) $\sqrt{49}$ 2) $\sqrt{96}$ 3) $\sqrt{81}$ 4) $\sqrt[3]{256}$

उकल :

1. $\sqrt{49} = 7$

   7 ही परिमेय संख्या आहे.

   $\therefore \sqrt{49}$ ही करणी संख्या नाही.

2. $\sqrt{96} = \sqrt{4\times4\times6} = 4\sqrt{6}$

   $\therefore \sqrt{96}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

   $\Rightarrow \sqrt{96}$ ही करणी संख्या आहे.

3. $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3\times3\times3\times3} = 3\sqrt[3]{3}$

   ही अपरिमेय संख्या आहे.

   $\therefore \sqrt[3]{81}$ ही करणी संख्या आहे.

4 $\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{4\times4\times4\times4} = 4\sqrt[3]{4}$

   $\therefore \sqrt[3]{256}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

   $\Rightarrow \sqrt[3]{256}$ ही करणी संख्या आहे.

   $\therefore$ (2), (3) आणि (4) या करणी संख्या आहेत.

उदा. 2.17 : खालील संख्यांमधील घातांक (index) आणि पाया (radicand) सांगा.

1) $\sqrt[5]{117}$ 2) $\sqrt{162}$ 3) $4\sqrt[4]{213}$ 4) $\sqrt[4]{214}$

उकल :

1. घातांक 5 आणि पाया 117

2. घातांक 2 आणि पाया 162

3. घातांक 4 आणि पाया 213

4. घातांक 4 आणि पाया 214

उदा. 2.18 : शुद्ध आणि मिश्र करणी ओळखा.

1) $\sqrt{42}$ 2) $4\sqrt[3]{18}$ 3) $2\sqrt[4]{98}$

उकल :

१. $\sqrt{42}$ ही शुद्ध करणी आहे.

2. $4\sqrt[3]{18}$ ही मिश्र करणी आहे.

3. $2\sqrt[4]{98}$ ही मिश्र करणी आहे.

2.10 घातांकाचे नियम (Laws of Radicals)

घातांकाचे नियम खालीलप्रमाणे आहे. (सिद्धता अनावश्यक)

१. $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$

2. $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

३. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

या ठिकाणी a आणि b या धन परिमेय संख्या अनून n ही धन पूर्णांक संख्या आहे.(Integer)

उदा. 2.19 : खालीलपैकी कोणत्या संख्या करणीसंख्या आहेत? ते ओळखा त्यासाठी घातांकाच्या नियमांचा वापर करा.

1) $\sqrt{5}\times\sqrt{80}$ 2) $2\sqrt{15}\div4\sqrt{10}$ 3) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}$ 4) $\sqrt{32}\div\sqrt{27}$

उकल :

1. $\sqrt{5}\times\sqrt{80}=\sqrt{5\times80}=\sqrt{400}=20$

20 ही परिमेय संख्या आहे.

$\therefore \sqrt{5}\times\sqrt{80}$ ही करणी संख्या नाही.

2. $2\sqrt{15} \div 4\sqrt{10} = \dfrac{2\sqrt{15}}{4\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{2\times2\times10}}$

$= \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{40}} = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

$\therefore 2\sqrt{15} \div 4$ ही करणी संख्या आहे.

3. $\sqrt[3]{4} \times \quad = \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow$ ही करणी संख्या नाही.

4. $\sqrt{32} \div \sqrt{27} = \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{32}{27}}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

$\therefore \sqrt{32} \div \sqrt{27}$ ही करणी संख्या आहे.

आपली प्रगती तपासा 2.6

१. प्रत्येक संख्येचा घातांक आणि पाया सांगा.

1) $\sqrt[4]{64}$ 2) $\sqrt[6]{343}$ 3) $\sqrt{119}$

२. खालीलपैकी कोणत्या संख्या करणीसंख्या आहेत, ते सांगा.

1) $\sqrt[3]{64}$ 2) $\sqrt[4]{625}$ 3) $\sqrt[6]{216}$

4) $\sqrt{5}\times\sqrt{45}$ 5) $3\sqrt{2}\times 5$

खालीलपैकी शुद्ध करणी व मिश्र करणी ओळखा.

1) $\sqrt{32}$ 2) $2\sqrt[3]{12}$ 3) $13\sqrt[3]{91}$ 4) $\sqrt{35}$

2.11 करणीचे नियम (Laws of surds)

सर्व करणी संख्या अपूर्णांक घातांकाच्या स्वरूपात मांडता येतात त्यामुळे यापूर्वी अभ्यासलेले घातांकाचे सर्व नियम करणीलासुद्धा लागू पडतात. आपण या नियमांची उजळणी करू या.

1. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ किंवा $\dfrac{1}{x^n} \times \dfrac{1}{y^n} = (xy)^{\frac{1}{n}}$

2. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ किंवा $\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$ किंवा $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$

4. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ किंवा $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \text{x}^{\frac{m}{n}}$

5. $\sqrt[n]{x^p} = \sqrt[mn]{x^{pn}}$ किंवा $\left(x^p\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{p}{m}}$

$$= x^{\frac{pn}{mn}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{mn}}$$

या ठिकाणी x आणि y या धन परिमेय संख्या असून m, n आणि p हे धन पूर्णांक (integers) आहेत.

काही उदाहरणांवरून हे नियम सिद्ध करू.

1. $\sqrt[3]{3}\ \sqrt[3]{8} = 3^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} = (24)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3\times 8}$

2. $\dfrac{(5)^{\frac{1}{3}}}{(9)^{\frac{1}{3}}} = \left(\dfrac{5}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}$

3. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{7}} = \sqrt[3]{7^{\frac{1}{2}}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{7} = \sqrt[2\times 3]{7} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{7}}$

4. $\sqrt[5]{4^3} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{3}{5}} = 4^{\frac{9}{15}} = \sqrt[15]{4^9} = \sqrt[3\times 5]{4^{3\times 3}}$

अशा तऱ्हेने हे नियम करणीलाही लागू पडतात हे सिद्ध होते.

महत्त्वाचे करणीच्या घाताला (अंश व छेद) एकाच धन संख्येने गुणले असता करणीचा घातांक (order) बदलता येते.

उदा. $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

आणि $\sqrt[4]{3} = \sqrt[8]{3^2} = \sqrt[8]{9}$

2.12 सरूप करणी (Similar or Like Surds)

करणी संख्यांचा सहगुणक विचारात न घेता, जेव्हा दोन करणी संख्यांना संक्षिप्त रूप दिले असता समान अपरिमेय संख्या मिळते, तेव्हा त्या दोन करणी संख्यांना सरूप करणी असे म्हणतात.

उदा. $3\sqrt{5}$ आणि $7\sqrt{5}$ या सरूप करणी आहे.

$\sqrt{75}$ $\sqrt{3}$ आणि $\sqrt{12} = 2$

$\sqrt{75}$ आणि $\sqrt{12}$ या संख्या $5\sqrt{3}$ आणि $2\sqrt{3}$ या स्वरूपात मांडता येतात. म्हणून त्या सरूप करणी आहेत.

2.13 करणीचे सोपे रूप (Simplest (lowest) Form of a surd)

जर एखादी करणी

अ) शक्य तितक्या कमी घातांकाच्या स्वरूपात असल्यास

ब) करणी चिन्हात अपूर्णांकाशिवाय संख्या असल्यास

क) a^n स्वरूपाचा ज्यात a हा धन पूर्णांक आहे; एखादा अवयव करणी चिन्हात नसल्यास.

ती करणी सोप्या स्वरूपात आहे, असे म्हणतात.

उदा. $\sqrt[3]{\dfrac{125}{18}} = \sqrt[3]{\dfrac{125\times12}{18\times12}} = \sqrt[3]{\dfrac{125\times12}{216}} = \sqrt[3]{\dfrac{5^3\times12}{6^3}} = \dfrac{5}{6}\sqrt[3]{12}$

आता काही उदाहरणे पाहू या.

उदा. 2.20 : करणींना सोपे रूप देऊन त्या शुद्ध स्वरूपात मांडा.

1) $2\sqrt{7}$ 2) $4\sqrt[4]{7}$ 3) $\dfrac{3}{4}\sqrt{32}$

उकल :

1. $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2\times7} = \sqrt{4\times7} = \sqrt{28}$ करणीचे शुद्ध रूप

2. $4\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{4^4\times7} = \sqrt[4]{256\times7} = \sqrt[4]{1792}$ करणीचे शुद्ध रूप

3. $\dfrac{3}{4}\sqrt{32} = \sqrt{32\times\dfrac{9}{16}} = \sqrt{18}$ करणीचे शुद्ध रूप

उदा. 2.21 : शुद्ध स्वरूपातील करणी मिश्र स्वरूपात मांडा.

1) $\sqrt{128}$ 2) $\sqrt[6]{320}$ 3) $\sqrt[3]{250}$

उकल :

1. $\sqrt{128} = \sqrt{64\times2} = 8\sqrt{2}$ मिश्र करणी

टिपा

2. $\sqrt[6]{320} = \sqrt[6]{2\times2\times2\times2\times2\times2\times5} = \sqrt[6]{2^6\times5} = 2\sqrt[6]{5}$ मिश्र करणी

3. $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5\times5\times5\times2} = 5\sqrt[3]{2}$ मिश्र करणी

आपली प्रगती तपासा 2.7

1. खालील जोड्यांपैकी कोणत्या करणी सरूप आहेत ते सांगा.

   1) $\sqrt{8}, \sqrt{32}$ 2) $5\sqrt{3}, 6\sqrt{18}$ 3) $\sqrt{20}, \sqrt{125}$

2. शुद्ध स्वरूपात मांडा.

   1) $7\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt[3]{16}$ 3) $\frac{5}{8}\sqrt{24}$

3. मिश्र स्वरूपात मांडा.

   1) $\sqrt[3]{250}$ 2) $\sqrt[3]{243}$ 3) $\sqrt[4]{512}$

2.14 करणींवरील चार मूलभूत गणिती प्रक्रिया

2.14.1 : करणींची बेरीज आणि वजाबाकी

परिमेय संख्यांच्या बेरीज वजाबाकीप्रमाणेच करणीसंख्यांची बेरीज वजाबाकी करता येते.

उदा. :

$$5\sqrt{3} + 17\sqrt{3} = (5 + 17)\sqrt{3} = 22\sqrt{3}$$

आणि $12\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = (12 - 7)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

करणींची बेरीज आणि वजाबाकी करताना प्रथम करणी सरूप करून घ्याव्यात आणि नंतर बेरीज वजाबाकी करावी.

उदा.

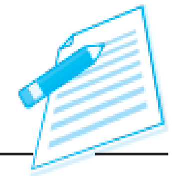
1. $\sqrt{50} + \sqrt{288}$

$= \sqrt{5\times5\times2} + \sqrt{12\times12\times2}$

$= 5\sqrt{2} + 12\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}\,(5+12)$

$= 17\sqrt{2}$



2. $\sqrt{98} - \sqrt{18}$

$= \sqrt{7\times7\times2} - \sqrt{3\times3\times2}$

$= 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}\,(7-3)$

$= 4\sqrt{2}$

उदा. 2.22 : सोपे रूप द्या.

1) $4\sqrt{6} + 2\sqrt{54}$ 2) $45\sqrt{6} - 3\sqrt{216}$

उकल :

1. $4\sqrt{6} + 2\sqrt{54}$

$= 4\sqrt{6} + 2\sqrt{3\times3\times6}$

$= 4\sqrt{6} + 2\times3\sqrt{6}$

$= 4\sqrt{6} + 6\sqrt{6}$

$= \sqrt{6}\,(4+6)$

$= 10\sqrt{6}$

2.. $45\sqrt{6} - 3\sqrt{216}$

$= 45\sqrt{6} - 3\sqrt{6\times6\times6}$

$= 45\sqrt{6} - 3\times6\sqrt{6}$

$= 45\sqrt{6} - 18\sqrt{6}$

$= 27\sqrt{6}$

उदा. 2.23 : दाखवा. (सिद्ध करा)

$24\sqrt{45} - 16\sqrt{20} + \sqrt{245} - 47\sqrt{5} = 0$

उकल : $24\sqrt{45} - 16\sqrt{20} + \sqrt{245} - 47\sqrt{5} = 0$

$24\sqrt{3\times3\times5} - 16\sqrt{2\times2\times5} + \sqrt{7\times7\times5} - 47\sqrt{5} = 0$

$24\times3\sqrt{5} - 16\times2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 47\sqrt{5} = 0$

$72\sqrt{5} - 32\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 47\sqrt{5} = 0$

$\sqrt{5}\,(72 - 32 + 7 - 47) = 0$

$\sqrt{5}\,(0) = 0$

$0 = 0$

उदा. 2.24 : सोपे रूप द्या..

$2\sqrt[3]{16000} + 8\sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{54} + \sqrt[4]{32}$

उकल : $2\sqrt[3]{16000} + 8\sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{54} + \sqrt[4]{32}$

$2\sqrt[3]{16000} = 2\sqrt[3]{10\times10\times10\times8\times2}$

$= 2\times10\times2\sqrt[3]{2}$

$= 40\sqrt[3]{2}$ ....(I)

$8\sqrt[3]{128} = 8\sqrt[3]{4\times4\times4\times2}$

$= 8\times4\sqrt[3]{2}$

$= 32\sqrt[3]{2}$ ....(II)

$3\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{3\times3\times3\times2}$

$= 3\times3\sqrt[3]{2}$

$= 9\sqrt[3]{2}$ ....(III)

$\sqrt[4]{32}$

$= \sqrt[4]{2\times2\times2\times2\times2}$

$= 2\sqrt[4]{2}$ ....(IV)

I, II, III, IV या किंमती घेऊन दिलेला राशी

$$= 40\sqrt[3]{2} + 32\sqrt[3]{2}\ 9\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2}$$

$$= \sqrt[3]{2}\,(40 + 32 - 9) + 2\sqrt[4]{2}$$

$$= 63\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2}$$

आपली प्रगती तपासा 2.8

खालील उदाहरणांना सोपे रूप द्या.

1. $\sqrt{175} + \sqrt{112}$

2. $\sqrt{32} + \sqrt{200} + \sqrt{128}$

3. $3\sqrt{50} + 4\sqrt{18}$

4. $\sqrt{108} - \sqrt{75}$

5. $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - 8\sqrt[3]{3}$

6. $6\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{128}$

7. $12\sqrt{18} + 6\sqrt{20} - 6\sqrt{147} + 3\sqrt{50} + 8\sqrt{45}$

2.14.2 करणींचा गुणाकार आणि भागाकार

समान कोटी असलेल्या करणीसंख्यांचा गुणाकार किंवा भागाकार करता येतो. करणीचा घातांक आणि करणीसंख्येचा घातांक यांना एकाच धन परिमेय संख्येने गुणून करणींची कोटी समान करता येते, हे आपणास माहिती आहेच. गुणाकार किंवा भागाकार करण्यापूर्वी आपण करणीची कोटी समान करून घेऊ.

आता आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 2.25

१. गुणाकार करा. $5\sqrt[3]{16}$ आणि $11\sqrt[3]{40}$

२. भागाकार करा. $15\sqrt[3]{13} \div 6\sqrt[6]{5}$

उकल :

1. $5\sqrt[3]{16} \times 11\sqrt[3]{40}$

$$= 5 \times 11 \times \sqrt[3]{2\times2\times2\times2} \times \sqrt[3]{2\times2\times2\times5}$$

$$= 55\times 2\sqrt[3]{2}\times 2\sqrt[3]{5}$$

$$= 55\times 2\times 2\times \sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}$$

$$= 220\times\sqrt[3]{10}$$

$$= 220\sqrt[3]{10}$$

2. $15\sqrt[3]{13} \div 6\sqrt[6]{5}$

$$= \frac{15\sqrt[3]{13}}{6\sqrt[6]{5}} = \frac{5}{2}\times\frac{\sqrt[3\times 2]{13^2}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{5}{2}\times\frac{\sqrt[6]{169}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{5}{2}\sqrt[6]{\frac{169}{5}}$$

उदा. 2.26 : सरळ रूप द्या आणि उत्तर अतिसंक्षिप्त रूपात मांडा.

$$2\sqrt{50}\times\sqrt{32}\times 2\sqrt{72}$$

उकल : $2\sqrt{50}\times\sqrt{32}\times 2\sqrt{72}$

$$2\sqrt{50} = 2\sqrt{5\times 5\times 2} = 2\times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2\times 2\times 2\times 2\times 2} = 2\times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{72} = 2\sqrt{6\times 6\times 2} = 2\times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$\therefore$ दिलेला राशी =

$$= 10\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}\times 12\sqrt{2}$$

$$= 480\sqrt{2}$$

2.15 : करणींची तुलना

दोन करणींची तुलना करण्यासाठी करणींची कोटी समान करणे आवश्यक आहे. नंतर करणीस्थ संख्या आणि सहगुणक यांची तुलना करता येते.

आता आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 2.27 : $\sqrt{\frac{1}{4}}$ आणि $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ यापैकी मोठी संख्या कोणती?

उकल : $\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

टिपा

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{1}{9} > \frac{1}{64} \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{9}} > \sqrt[6]{\frac{1}{64}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{3}} > \sqrt{\frac{1}{4}}$$

उदा. 2.28 : चढत्या क्रमाने मांडा $\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}$ आणि $\sqrt[6]{5}$

उकल : $\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}$ आणि $\sqrt[6]{5}$

3, 2 आणि 6 यांचा लसावि 6 आहे.

$$\therefore \sqrt[3]{2} = \sqrt[2\times3]{2^2} = \sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[3\times2]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5}$$

चढता क्रम $\sqrt[6]{4} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[6]{27}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt[6]{5} < \sqrt{3}$$

आपली प्रगती तपासा 2.9

1. $\sqrt[3]{32}$ आणि $5\sqrt[3]{4}$ यांचा गुणाकार करा.
2. $\sqrt{3}$ आणि $\sqrt[3]{5}$ यांचा गुणाकार करा.
3. $\sqrt[3]{135}$ ला $\sqrt[3]{5}$ ने भागा.
4. $2\sqrt{24}$ ला $\sqrt[3]{320}$ ने भागा.
5. $4\sqrt{5}$ आणि $\sqrt[3]{4}$ यामधील मोठी संख्या कोणती?
6. $\sqrt[5]{10}$ आणि $4\sqrt{9}$ यामधील लहान संख्या कोणती?
7. चढत्या क्रमाने मांडा. $\sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{3}, \sqrt[3]{4}$
8. उतरत्या क्रमाने मांडा

   $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{4}$

2.16 करणीचे परिमेयीकरण (Rationalisation of surds)

खालील उदाहरणे पहा.

1. $4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}} = 4$

2. $5^{\frac{7}{11}} \times 5^{\frac{4}{11}} = 5$

3. $7^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} = 7$

वरील तीनही गुणाकारांमध्ये आपणास दोन करणींचा गुणाकार केला असता परिमेय संख्या मिळते.

या ठिकाणी प्रत्येक करणीला दुसऱ्या करणीचा परिमेयीकरण गुणक (rationaling factor) असे म्हणतात.

1. $\sqrt{3}$ चा परिमेयीकरण गुणक $\sqrt{3}$ हाच आहे.

2. $\sqrt[11]{5^4}$ चा परिमेयकरण गुणक $\sqrt[11]{5^7}$ हा आहे तर $\sqrt[11]{5^7}$ चा परिमेयीकरण गुणक $\sqrt[11]{5^4}$ हा आहे.

3. $\sqrt[4]{7}$ चा परिमेयीकरण गुणक $\sqrt[4]{7^3}$ हा आहे, तर $\sqrt[4]{7^3}$ चा परिमेयीकरण गुणक $\sqrt[4]{7}$ हा आहे.

करणींचे परिमेय संख्येत रुपांतर करण्याच्या प्रक्रियेला करणींचे परिमेयीकरण असे म्हणतात. आणि ज्या दोन करणींमुळे परिमेय संख्या मिळते त्या दोन संख्यांना परस्परांचे परिमेयीकरण गुणक असे म्हणतात.

उदा. $\sqrt{x}$ चा परिमेयीकरण गुणक $\sqrt{x}$ आहे.

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ चा परिमेयीकरण गुणक $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ आहे.

टीप :

1. $x-\sqrt{y}$ आणि $x+\sqrt{y}$ यांना अनुबद्ध करणी (conjugate surd) असे म्हणतात. त्यांची बेरीज आणि गुणाकार नेहमीच परिमेय संख्या असते.

2. सर्वसाधारणपणे अपरिमेय करणींच्या छेदाचे परिमेयीकरण केले जाते.

आता आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 2.29 : $\sqrt{18}$ आणि $\sqrt{12}$ चे परिमेयीकरण गुणक काढा.

उकल : $\sqrt{18}=\sqrt{3\times3\times2}=3\sqrt{2}$

$\therefore$ परिमेयीकरण गुणक $= \sqrt{2}$

$$\sqrt{12} = \sqrt{2\times2\times3} = 2\sqrt{3}$$

$\therefore$ परिमेयीकरण गुणक $= \sqrt{3}$

उदा. 2.30 : $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ मधील छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल :

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}{2-5}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}{-3} = -\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$$

$$= -\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

उदा. 2.31 : $\dfrac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$ मधील छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल :

$$\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}} = \frac{\left(4+3\sqrt{5}\right)\left(4+3\sqrt{5}\right)}{\left(4-3\sqrt{5}\right)\left(4+3\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(4+3\sqrt{5}\right)^2}{\left(16-9\times5\right)}$$

$$= \frac{\left(4+3\sqrt{5}\right)^2}{16-45} = \frac{16+45+24\sqrt{5}}{16-45}$$

$$= -\frac{61}{29} - \frac{24}{29}\sqrt{5}$$

उदा. 2.32 : $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ च्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल :

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)}{\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+1\right]\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-1\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\left(3-2\sqrt{6}+2\right)-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{6}} \times \frac{\left(4+2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{2}-4+2\sqrt{18}-2\sqrt{12}-2\sqrt{6}}{(16)-(4\times 6)}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{2}-4+2\sqrt{9\times 2}-2\sqrt{4\times 3}-2\sqrt{6}}{16-24}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{2}-4+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{16-24}$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4-2\sqrt{6}}{-8} = \frac{2\sqrt{2}-4-2\sqrt{6}}{-8}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}-2-\sqrt{6})}{-8} = \frac{(\sqrt{2}-2-\sqrt{6})}{-4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{6}}{4}$$

$$= -\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

उदा. 2.33 : जर $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$, तर a आणि b च्या किंमती काढा.

उकल : $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{9+4+9\sqrt{2}}{9-2}$

$$= \frac{13+9\sqrt{2}}{7} = \frac{13}{7}+\frac{9}{7}\sqrt{2}$$

$$= \frac{13}{7}+\frac{9}{7}\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{13}{7}, b = \frac{9}{7}$$

आपली प्रगती तपासा 2.10

1. पुढील प्रत्येकाचा परिमेयीकरण गुणक काढा.

   1) $\sqrt[3]{49}$ 2) $\sqrt{2}+1$ 3) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}$

2. छेदाचे परिमेयीकरण करून सरळ रूप द्या.

   1) $\dfrac{12}{\sqrt{5}}$ 2) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$ 4) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

3. सरळ रूप द्या. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

4. छेदाचे परिमेयीकरण करा. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$

5. जर, $a = 3 + 2\sqrt{2}$ तर, $a+\dfrac{1}{a}$ ची किंमत काढा.

6. जर $\dfrac{2+5\sqrt{7}}{2-5\sqrt{7}} = x+\sqrt{7}\,y$ तर x आणि y ची किंमत काढा.

तुम्ही काय शिकलात?

❖ $a \times a \times a \times \ldots\ldots$ m वेळा $= a^m$ हे घातांकरूप आहे. यामध्ये a हा पाया आणि m हा घातांक आहे.

❖ घातांकाचे नियम

   1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 3) $(ab)^m = a^m b^m$ 4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

   5) $(a^m)^n = a^{mn}$ 6) $a^0 = 1$ 7) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

❖ $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

- $\sqrt[n]{x}$ या अपरिमेय संख्येस करणी असे म्हणतात. या ठिकाणी x ही परिमेय संख्या असते.
- $\sqrt[n]{x}$ यामध्ये n ला घातांक आणि x ला करणीस्थ संख्या असे म्हणतात.
- ज्या करणीमध्ये 1 या परिमेय संख्येखेरीज कोणतीही परिमेय संख्या गुणक व दुसरा गुणक अपरिमेय संख्या असतो अशा करणीस मिश्र करणी असे म्हणतात.
- करणीची कोटी म्हणजे करणीचे मूळ दर्शविणारी संख्या होय.
- $\sqrt[n]{x}$ मध्ये करणीची कोटी n आहे.
- करणीचे नियम $(a > 0, b > 0)$

1) $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$ 2) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ 3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

- करणी गणिती क्रिया

1) $x^{\frac{1}{n}} \times y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}}$

2) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$

4) $(x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$

5) $\sqrt[m]{x^a} = \sqrt[mn]{x^{an}}$ किंवा $(x^a)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{a}{m}} = x^{\frac{an}{mn}} = (x^{an})^{\frac{1}{mn}}$

- ज्या करणींचा अपरिमेय गुणक समान असतो, अशा करणींना सरूप करणी असे म्हणतात.
- सरूप करणींची बेरीज किंवा वजाबाकी होऊ शकते.
- करणीचा घातांक आणि करणींस्थ संख्या यांना एकाच परिमेय संख्येने गुणून करणीची कोटी बदलता येते.
- सारख्या कोटीच्या करणींवर गुणाकार किंवा भागाकार या क्रिया करता येतात.
- करणींची तुलना करण्यासाठी सर्व करणींची कोटी समान करावी. नंतर करणीस्थ संख्या व सहगुणक विचारात घेऊन त्यांची तुलना करावी.

- दोन करणींचा गुणाकार करून परिमेय संख्या मिळाली, तर प्रत्येक करणीला दुसऱ्या करणीचा परिमेयीकरण गुणक असे म्हणतात.

- $x + \sqrt{y}$ चा $x - \sqrt{y}$ हा परिमेयीकरण गुणक आहे, तर $x - \sqrt{y}$ चा $x + \sqrt{y}$ हा परिमेयीकरण गुणक आहे.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. घातांकित स्वरूपात लिहा.

1) $5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9$

2) $\left(\frac{-7}{9}\right) \times \left(\frac{-7}{9}\right) \times \left(\frac{-7}{9}\right) \times \left(\frac{-7}{9}\right)$

2. सरळ रूप द्या.

1) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3$

3. सरळ रूप देऊन आलेले उत्तर घातांक रूपात लिहा.

1) $(10)^2 \times (6)^2 \times (5)^2$

2) $\left(-\frac{37}{19}\right)^{20} \div \left(-\frac{37}{19}\right)^{20}$

3) $\left[\left(\frac{3}{13}\right)^3\right]^5$

4. सरळ रूप द्या.

1) $3^\circ + 7^\circ + 37^\circ - 3$ 2) $(7^\circ + 3^\circ)\,(7^0 - 3^0)$

5. सरळ रूप द्या.

1) $(32)^{12} \div (32)^{6}$ 2) $(111)^6 \times (111)^5$

3) $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-3} \times \left(-\frac{2}{9}\right)^5$

टिपा

6. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{11} = \left(\frac{3}{7}\right)^{x}$ तर x ची किंमत काढा.

7. $\left(\frac{3}{13}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{13}\right)^{-9} \times \left(\frac{3}{13}\right)^{2x+1}$ तर x ची किंमत काढा.

8. पुढील संख्यांचे मूळ गुणक मांडा आणि प्रत्येक संख्येचे उत्तर घातांकात लिहा.

1) 6480000 2) 172872 3) 11863800

9. सायरस हा तारा पृथ्वीपासून 8.1×10^{13} किमी अंतरावर आहे. प्रकाशाचा वेग 3×10^{5} किमी प्रतिसेकंद आहे. तर ताऱ्यावरून निघालेला प्रकाश पृथ्वीवर पोहोचण्यासाठी किती कालावधि लागेल, ते काढा.

10. खालीलपैकी कोणत्या संख्या करणीसंख्या आहेत, ते सांगा.

1) $\sqrt{36/289}$ 2) $\sqrt[9]{729}$ 3) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+1}$ 4) $\sqrt[4]{3125}$

11. शुद्ध करणी रूपात लिहा.

1) $3\sqrt{3}$ 2) $5\sqrt[3]{4}$ 3) $\sqrt[4]{3125}$

12. सरळ रूप देऊन उत्तर अतिसंक्षिप्त रूपात लिहा.

1) $\sqrt[4]{405}$ 2) $\sqrt[5]{320}$ 3) $\sqrt[3]{128}$

13. सरूप करणींच्या जोड्या ओळखा.

1) $\sqrt{112}, \sqrt{343}$ 2) $\sqrt[3]{625}, \sqrt[3]{3125 \times 25}$ 3) $\sqrt[6]{216}, \sqrt{250}$

14. सोपे रूप द्या.

1) $4\sqrt{48} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + 6\sqrt{3}$

2) $\sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{175}$

3) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$

15. कोणती संख्या मोठी आहे?

1) $\sqrt{2}$ किंवा $\sqrt[3]{3}$ 2) $\sqrt[3]{6}$ किंवा $\sqrt[4]{8}$

16. उतरत्या क्रमाने मांडा.

1) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$ 2) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$

17. चढत्या क्रमाने मांडा.

$\sqrt[3]{16}, \sqrt{12}, \sqrt[6]{320}$

18. छेदाचे परिमेयीकरण करून सरळ रूप द्या.

1) $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}$ 2) $\frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 3) $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

19. छेदाचे परिमेयीकरण करून सरळ रूप द्या.

1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{12}}$

20. जर, $\frac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$ तर a आणि b च्या किंमती काढा. a आणि b या परिमेय संख्या आहेत.

21. जर $x = 7 + 4\sqrt{3}$ तर $x + \frac{1}{x}$ ची किंमत काढा.

प्रश्नांची उत्तरे

2.1

1. 1) $(-7)^4$ 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ 3) $\left(\frac{-5}{7}\right)^{20}$

2.

	पाया	घातांक
1)	-3	5
2)	7	4
3)	$-\frac{2}{11}$	8

3. 1) $\frac{81}{2401}$ 2) $\frac{16}{6561}$ 3) $-\frac{27}{64}$

4. 1) $\frac{3}{7}$ 2) $\frac{625}{324}$

5. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ 2) $\left(-\frac{1}{7}\right)^4$ 3) $\left(-\frac{5}{3}\right)^4$

2 . 2

1. 1) $3^1 \times 11^1 \times 13^1$ 2) $2^3 \times 3^4$ 3) $2^3 \times 3^3 \times 7^1$

2. 1) 3^6 2) 2^9 3) $2^5 \times 3^4$

4) $\frac{11^3}{2^{12}}$ 5) $\frac{(-7)^3}{2^5}$

2 . 3

1. 1) $(7)^5$ 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ 3) $\left(-\frac{7}{8}\right)^6$

2. 1) $(7)^2$ 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ 3) $\left(-\frac{7}{8}\right)^{15}$

3. 1) 2^{18} 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ 3) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{15}$

4) $\left(\frac{11}{3}\right)^5$ 5) $\left(-\frac{7}{11}\right)^3$

4. सत्य : 1), 2), 7)

असत्य : 3), 4), 5), 6)

2 . 4

1. $\frac{49}{9}$

2. 1) $\left(\frac{7}{3}\right)^4$ 2) 12^2 3) $\left(\frac{13}{3}\right)^{12}$

3. 1) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-4}$ 2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-10}$ 3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-10}$

4. 1) $\frac{81}{16}$ 2) $-\frac{2}{3}$ 3) $-\frac{343}{125}$

5. सत्य : 2), 3), 4)

2.5

1. 1) 8 2) $\frac{25}{9}$

2. 1) 1 2) $\frac{7}{8}$ 3) $\frac{13}{16}$

2.6

1. 1) 4,64 2) 6,343 3) 2, 119

2. 3), 4)

3. शुद्ध करणी : 1), 4)

   मिश्र करणी : 2), 3)

2.7

1. 1), 3)

2. 1) $\sqrt{147}$ 2) $\sqrt[3]{432}$ 3) $\sqrt{75/8}$

3. 1) $5\sqrt[3]{2}$ 2) $3\sqrt[3]{9}$ 3) $4\sqrt[4]{2}$

2.8

1) $9\sqrt{7}$ 2) $22\sqrt{2}$ 3) $27\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{3}$

5) $-3\sqrt{3}$ 6) $30\sqrt[3]{2}$ 7) $51\sqrt{2}+36\sqrt{5}-42\sqrt{3}$

2.9

1) $20\sqrt[3]{2}$ 2) $3\sqrt[3]{5}$ 3) 3 4) $\sqrt[6]{\frac{216}{25}}$

5) $\sqrt[3]{4}$ 6) $\sqrt[4]{9}$ 7) $\sqrt[6]{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ 8) $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{2}$

2.10

1. 1) $\sqrt[3]{7}$ 2) $\sqrt{2}-1$ 3) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$

2. 1) $\frac{12}{5}\sqrt{5}$ 2) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$ 3) $\frac{8}{3}-\frac{\sqrt{55}}{3}$ 4) $2+\sqrt{3}$

3. 14

4. $-\frac{1}{4}[2+\sqrt{6}+\sqrt{2}]$

5. 6

7. $-\frac{179}{171}-\frac{20\sqrt{7}}{171}$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. 1) $5^2 \times 3^2 \times 7^3 \times 9^2$ 2) $\left(-\frac{7}{9}\right)^4$

2. 1) $-\frac{5}{56}$ 2) $\frac{1}{105}$

3. 1) $2^4 \times 3^2 \times 5^4$ 2) 1 3) $\left(\frac{3}{13}\right)^{15}$

4. 1) शून्य 2) शून्य

5. 1) $(32)^{18}$ 2) 111 3) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$

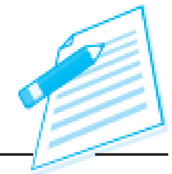
6. $x = 8$

7. $x = -6$

8. $2^7 \times 3^4 \times 5^4$

9. $3^3 \times 10^7$ सेकंद

10. 2), 3), 4)



टिपा

11. 1) $\sqrt[2]{27}$ 2) $\sqrt[3]{500}$ 3) $\sqrt[5]{6250}$

12. 1) $3\sqrt[4]{5}$ 2) $2\sqrt[5]{10}$ 3) $4\sqrt[3]{2}$

13. 1) 2)

14. 1) $\frac{127}{6}\sqrt{3}$ 2) शून्य 3) $5\sqrt{2}$

15. 1) $\sqrt[3]{3}$ 2) $\sqrt[3]{6}$

16. 1) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$ 2) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}$

17. $\sqrt[3]{16}, \sqrt[6]{320}, \sqrt{12}$

18. 1) $-3(\sqrt{6}+\sqrt{7})$ 2) $3(\sqrt{7}+\sqrt{3})$ 3) $9-4\sqrt{5}$

19. 1) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 2) $\frac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}+2\sqrt{105}}{70}$

20. a = 11, b = – 6

21. 14

❖ ❖ ❖

3

बैजिक राशी आणि बहुपदी

आतापर्यंत आपण नैसर्गिक संख्या, पूर्ण संख्या, अपूर्णांक संख्या आणि त्यांच्या साहाय्याने बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार भागाकार या मूलभूत अंकगणितीय प्रक्रियांचा अभ्यास केला आहे. या पाठात आपण बीजगणितीय संख्यांचा अभ्यास करणार आहोत. बीजगणितातील चल राशी, स्थिर राशी बैजिक राशी, विशेष प्रकारची बैजिक राशी म्हणजे बहुपदी व त्यांच्या साहाय्याने बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या मूलभूत प्रक्रियांचा अभ्यास करणार आहोत.

उद्देश :

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खालील बाबींचे ज्ञान होईल.

- राशींमधील चल आणि स्थिर पदे ओळखता येतील.
- बैजिक राशी व त्यामधील पदे ओळखता येतील.
- बहुपदी म्हणजे विशेष प्रकारची बैजिक राशी होय हे समजून येईल व ती ओळखता येईल.
- एक चल आणि दोन चल असणाऱ्या बहुपदींची उदाहरणे देता येतील.
- बहुपदीमधील सरूपपदे व भिन्न रूप पदे ओळखता येतील.
- बहुपदीची कोटी ओळखता येईल.
- बहुपदीमधील चल राशींची किंमत दिली असता बहुपदीची किंमत काढता येईल. बहुपदीची शून्य किंमत काढता येईल.
- बहुपदींवर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या क्रिया करता येतील.

अपेक्षित पूर्वज्ञान

- संख्या आणि त्यावरील चार मूलभूत प्रक्रिया
- प्राथमिक पातळीवरील गणितीय संबोध

3.1 बीजगणिताची ओळख

0, 1, 2, 3 ...... $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ .... $\sqrt{2}$ ...... या संख्यांची आणि बेरीज (+), वजाबाकी (–), गुणाकार (×), भागाकार (÷) या गणिती प्रक्रियांची आपणास माहिती आहेच. गणितात वापरलेल्या अक्षरांना 'अक्षर संख्या' असे म्हणतात. संख्या दर्शविण्यासाठी अक्षरांचा वापर करतात.

समजा एका पुस्तकाची किंमत ₹20 आहे. अंकगणितात आपण एका पुस्तकाची किंमत ₹ = 20 असे मांडतो.

बीजगणितामध्ये आपण एका पुस्तकाची किंमत ` . x आहे असे मांडतो, या ठिकाणी x अक्षर संख्या दर्शविते.

त्याचप्रमाणे, a, b, c, x, y, z ही अक्षरे खुर्च्या, टेबले, माकडे, कुत्री, गायी, झाडे यांची संख्या दर्शवितात.

एका चौरसाची बाजू 3 सें मी आहे.

∴ चौरसाची परिमिती 4 × 3 = 12 एकक येईल.

बीजगणितामध्ये आपण हेच म्हणणे पुढीलप्रमाणे दर्शवितो.

$$p = 4s$$

या ठिकाणी p हे अक्षर परिमितीची संख्या दर्शविते. तर s हे अक्षर चौरसाची बाजू दर्शविते.

अंकगणितीय भाषा आणि बीजगणितीय भाषा यांची तुलना केली असता बीजगणितीय भाषा ही,

1) अंकगणितीय भाषेपेक्षा जास्त अचूक (precise) असते.

2) अंकगणितीय भाषेपेक्षा जास्त सर्वसमावेशक असते.

3) समजण्यास सोपी आणि प्रश्नांची उत्तरे शोधण्यास जास्त सुलभ असते.

खालील तुलनात्मक उदाहरणामुळे वरील मुद्दे जास्त स्पष्ट होतील.

	सर्वसामान्य विधान	बीजगणितीय विधान
1	एका संख्येमध्ये 5 मिळविले असता उत्तर 8 येते.	$a + 3 = 8$
2	एका संख्येची दुप्पट 12 येते.	$x + x = 12 \therefore 2x = 12$ असे मांडतात.
3	अंतर = वेग × वेळ	$d = s \times t \therefore d = st$ असे मांडतात
4	एका संख्येचा वर्ग करून उत्तरात 5 मिळविले असता 9 ही संख्या येते.	$b \times b + 5 = 9 \therefore b^2 + 5 = 9$ असे मांडतात
5	दोन क्रमावर संख्यांचा गुणाकार 30 येतो. संख्या) $\therefore y\,(y + 1) = 30$	$y \times (y + 1) = 30$ (y = नैसर्गिक असे मांडतात)

टिपा

अंकगणितातील आकड्यांऐवजी बीजगणितामध्ये अक्षरांचा वापर केला जातो. अंकगणितामध्ये आणि बीजगणतिामध्ये बेरीज (+), वजावाकी (−), गुणाकार (×) आणि भागाकार (÷) या चिन्हांचा अर्थ सारखाच आहे. बीजगणितामध्ये बऱ्याच वेळा गुणाकाराचे चिन्ह लिहीत नाहीत.

उदा. $5 \times a$ ही राशी '5a' आणि $a \times b$ ही राशी 'ab' अशी लिहितात.

3.2 चल राशी आणि स्थिर राशी (Variables and (onstants)

इ. स. 2001 सालचे जानेवारी, फेब्रुवारी, मार्च ...... डिसेंबर हे महिने विचारात घ्या. आपण 2001 वर्ष a या अक्षराने दाखवू आणि महिना x या अक्षराने दर्शवू. या परिस्थितीत a (इ. 2001) ही स्थिर राशी आहे. याउलट x म्हणजे जानेवारी, फेब्रुवारी, मार्च .... डिसेंबर यापैकी कोणताही महिना येऊ शकतो. x बदलत असल्यामुळे x ही चल राशी आहे.

त्याचप्रमाणे आपण जेव्हा इयत्ता 10 वीचा वर्ग b या अक्षराने दर्शवितो आणि त्या वर्गातील विद्यार्थी y या अक्षराने दर्शवितो, तेव्हा b (इयत्ता 10 वी) ही स्थिर राशी आणि y (विद्यार्थी) ही चल राशी असते, कारण y म्हणजे वर्गातील कोणताही विद्यार्थी असू शकतो.

आता पुढील परिस्थितीचा विचार करा. एक विद्यार्थी वसतिगृहात राहत आहे आणि त्याच्या खोलीला दरमहा ₹ 1000 भाडे आहे. जेवणाचा एका दिवसाचा खर्च ₹100 आहे. तो जितके दिवस जेवतो तितक्या दिवसाचे पैसे देणे अपेक्षित आहे.

या परिस्थितीत खोलीचे भाडे ही स्थिर राशी व जेवण घेणाऱ्या दिवसांची संख्या ही चल राशी आहे.

आता संख्यांच्या बावतीत विचार करा.

4, ˊ14, $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{4}{15}$, $3x$, $\frac{21}{8}y$, $\sqrt{2}z$

यापैकी 4, ˊ14, $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{4}{15}$ या वास्तव संख्या आहेत, हे आपणास माहिती आहेच कारण प्रत्येक संख्येला एक विशिष्ट किंमत आहे.

$3x$, $\frac{21}{8}y$ आणि $\sqrt{2}\,z$ यामध्ये xy आणि z या अव्यक्त संख्या आहेत. त्यामुळे या संख्यांना 4, 14 यासारखी विशिष्ट किंमत नाही. त्यांची किंमत x, y आणि z वर अवलंबून असते. म्हणून x, y आणि z यांना चल राशी असे म्हणतात.

कोणतेही अक्षर हे चलराशी असून त्याची किंमत वेगवेगळी असू शकते. याउलट अंक ही स्थिर राशी असून त्याची किंमत कायम असते.

सर्व साधारणपणे आपण बीजगणितात a, b, c ही अक्षरे स्थिर राशींकरिता व x, y, z ही अक्षरे चल राशींकरिता मांडतो. अर्थात कोणते अक्षर स्थिर राशी व कोणतेही चल राशी म्हणून वापरतो आहे, हे उदाहरणांवरून लक्षात येते.

3.3 बैजिक राशी आणि बहुपदी (Algebraic Expressions And Polynomials)

ज्यामध्ये अंक, चल पदे आणि गणिती चिन्हे असतात, अशा राशींना 'बैजिक राशी' असे म्हणतात.

$3 + 8$, $8x + 4$, $5y$, $7x$ ˆ $2y + 6$, $\frac{1}{\sqrt{2x}}$, $\frac{x}{\sqrt{y-2}}$, $\frac{ax+by+cz}{x+y+z}$ या सर्व बैजिक राशी आहेत.

$3 + 8$ ही राशी अंकगणितीय तशीच बैजिक देखील आहे, हे ध्यानात घ्या.

बैजिक राशी ही अंक, चल पदे आणि अंकगणितीय प्रक्रिया यांचे एकत्रीकरण आहे.

एक किंवा एकापेक्षा अधिक बेरीज (+) वजाबाकी (–), ही चिन्हे बैजिक राशीमध्ये वापरतात. या चिन्हांमुळे बैजिक राशीचे अनेक भाग होतात. प्रत्येक चिन्हांकित भागास त्या राशीचे पद (term) असे म्हणतात. राशीमधील पहिले पद जर धन असेल तर त्या पदाअगोदर + चिन्ह शक्यतो लिहिले जात नाही. उदा. $+ x - 5y + 4$ ही बहुपदी आपण $x - 5y + 4$ अशीच लिहितो. या राशीमध्ये असणाऱ्या x, $-5y$ आणि 4 यांना त्या राशीची पदे असे म्हणतात.

$1/3\ xy$ या पदामध्ये $1/3$ ला पदाचा अंक सहगुणक असे म्हणतात. तसेच तो xy चाही अंक सहगुणक आहे. x चा सहगुणक $1/3\ y$ आहे. तर y चा सहगुणक $1/3\ x$ आहे. जेव्हा पदाचा अंक सहगुणक $+1$ किंवा -1 असतो, तेव्हा 1 हा अंक लिहित नाहीत. म्हणून x^2y या पदाचा अंक सहगुणक $+1$ तर $-x^2y$ या पदाचा अंक सहगुणक -1 असतो.

ज्या बैजिक राशीमध्ये, छेदस्थानी चल पदे नसतात, चलपदांचे घातांक पूर्णांकसंख्या असतात आणि चल पदांचे सहगुणक वास्तव संख्या असतात. अशा बैजिक राशीला 'बहुपदी' असे म्हणतात.

म्हणजेच,

1. बहुपदीमध्ये, छेदस्थानी चलपदे नसतात.
2. चलपदांचे घातांक धन पूर्णांक संख्या असतात.
3. चलपदांचे सहगुणक वास्तव संख्या असतात.

उदा. 5, $3x - y$, $\frac{1}{3}a - b + \frac{7}{2}$ आणि $\frac{1}{4}x^3 - 2y^2 + xy - 8$ या राशी बहुपदी आहेत.

परंतु $x^3 - \frac{1}{x}$, $\sqrt{x+y}$ आणि $x^{2/3} + 5$ या राशी बहुपदी नाहीत.

$x^2 + 8$ ही एक चल (x) असलेली बहुपदी आहे. $2x^2 + y^3$ ही दोन चले (x आणि y) असेलेली बहुपदी आहे.

आपण फक्त दोन चले असलेल्या बहुपदींचाच अभ्यास करणार आहोत.

एकचल असलेल्या बहुपदीचे सामान्यरूप

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_ax^a$ असे असते. या ठिकाणी $a_0, a_1, a_2 . . . . . a_n$ हे सहगुणक वास्तव संख्या असतात. x हे चल पद असते आणि n पूर्ण संख्या असते.

$a_0, a_1x, a_2x^2, ... a_0x^a$ ही या बहुपदीची $(n + 1)$ पदे असतात.

ज्या बैजिक राशींमध्ये किंवा बहुपदीमध्ये एकच पद असते. तिला 'एकपदी' (monomial) असे म्हणतात.

$-2, 3y, -5x^2, xy, \frac{1}{2}x^2y^3$ या सर्व एकपदी आहेत.

ज्या बैजिक राशींमध्ये किंवा बहुपदीमध्ये दोन पदे असतात. तिला 'द्विपदी' (binomial) असे म्हणतात. $5 + x y^2 - 8x, x^3 - 1$ या सर्व द्विपदी आहेत.

ज्या बैजिक राशींमध्ये किंवा बहुपदीमध्ये तीन पदे असतात. तिला त्रिपदी (trinomial) असे म्हणतात. $x + y + 1, x^2 + 3x + 2, x^2 + 2xy + y^2$ या सर्व त्रिपदी आहेत.

बहुपदीमध्ये समान चलपदे आणि समान घातांक असणाऱ्या सारख्या पदांना 'सरूप पदे' असे म्हणतात.

उदा.

$$3xy + 9x + 8xy - 7x + 2x^2$$

या बहुपदीमध्ये $3xy$ आणि $8xy$ तसेच $9x$ आणि $-7x$ ही सरूप पदे आहेत. परंतु $9x$ आणि $2x^2$ ही पदे मात्र सरूप पदे नाहीत. $3xy$ आणि $-7x$ ही सुद्धा वेगवेगळी पदे आहेत.

संख्यासुद्धा सरूप पदेच असतात. उदा. $x^2 + 2x + 3$ आणि $x^3 - 5$ या बहुपदींमध्ये 3 आणि –5 ही सरूप पदे आहेत. कारण $3 = 3x^0$ आणि $-5 = -5x^0$ होय.

$2x^2 - 3xy + 9y^2 - 7y + 8$ या राशींमध्ये सर्व पदे वेगवेगळी आहे.

कोणतीही दोन पदे सरूप नाहीत.

उदा. 3.1 : $2x^2y + 5$ मधील चल आणि स्थिर पदे सांगा.

उकल : चल पदे x आणि y

स्थिरपदे 2 आणि 5

उदा. 3.2 : $8x^2y^3$ या पदामधील सहगुणक सांगा.

1) $x^2 y^3$ चा 2) x^2 चा 3) y^3 चा

उकल :

1) $8x^2y^3 = 8 \times (x^2y^3)$

$\therefore$ x^2y^3 चा सहगुणक 8 आहे.

2) $8x^2y^3 = 8x^3 \times (x^2)$

$\therefore$ x^2 चा सहगुणक $8y^3$ आहे.

3) $8x^2y^3 = 8x^2 \times (y^3)$

$\therefore$ y^3 चा सहगुणक $8x^2$ आहे.

उदा. 3.3 : $3x^2y - \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}y + 2$ या बहुपदीची पदे सांगा.

उकल : $3x^2y, -\frac{5}{2}x, -\frac{1}{3}y$ आणि 2 ही बहुपदीची पदे आहेत.

उदा. 3.4 : खालीलपैकी कोणत्या राशी बहुपदी आहेत, ते सांगा.

1) $\frac{1}{2} + x^3 - 2x^2 + \sqrt{6}\,x$

2) $x + \frac{1}{x}$

3) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{x} + 6$

4) $5 - x - x^2 - x^3$

उकल : (1) आणि (4)

उदा. (2) मध्ये, दुसरे पद $\frac{1}{x} = x^{-1}$ हे आहे चलाचा घातांक –1 असल्याने ही राशी बहुपदी नाही.

उदा. (3) मध्ये तिसरे पद $-5\sqrt{x} = -5x^{1/2}$ हे आहे. चलाचा घातांक अपूर्णांक असल्याने ही राशी बहुपदी नाही.

उदा. 3.5 : खालील बैजिक राशींमध्ये सरूप पदे असल्यास ती लिहा.

1) $x + y + 2$

2) $x^2 - 2y - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}\,y - 8$

3) $1 - 2xy + 2x^2y - 2xy^2 + 5x^2y^2$

4) $\frac{2}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{3}z + \frac{\sqrt{5}}{3}y + \frac{1}{3}$.

उकल :

1. या बैजिक राशीमध्ये सरूप पदे नाहीत.

2. x^2 आणि $\frac{1}{2}x^2$ ही एक सरूप पदांची व $-2y$ आणि $\sqrt{3}\,y$ ही सरूप पदांची दुसरी जोडी आहे.

3. या बैजिक राशीमद्ये सरूप पदे नाहीत.

4. $\frac{2}{\sqrt{3}}y$ आणि $\frac{\sqrt{5}}{3}y$ ही सरूप पदांची जोडी आहे.

आपली प्रगती तपासा 3.1

1. खाली दिलेल्या उदाहरणांमधील चलपदे व स्थिर पदे सांगा.

1) $1 + y$ 2) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 7$ 3) $\frac{4}{5}x^2y^3$

4) $\frac{2}{5}xy^5 + \frac{1}{2}$ 5) $2x^2 + y^2 - 8$ 6) $x + \frac{1}{x}$

2. सहगुणक सांगा. $-2x^2y$

1) x^2y चा 2) x^2 चा 3) y चा

3. चल पदे आणि गणिती चिन्हे वापरून खालील विधाने बैजिक राशी स्वरूपात लिहा.

1) एका संख्येतून तीन वजा केले असता उत्तर 15 येते.

2) एका संख्येमध्ये पाच मिळविले असता उत्तर 22 येते.

4. खालील राशींमधील पदे लिहा.

1) $2 + abc$ 2) $a + b + c + 2$ 3) $x^2y - 2xy^2 - \frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{8}x^3y^2$

5. खालील बैजिक राशींमध्ये सरूप पदे असल्यास ती लिहा.

1) $-xy^2 + x^2y + y^2 + \frac{1}{3}y^2x$ 2) $6a + 6b - 3ab + \frac{1}{4}a^2b + ab$

3) $ax^2 + by^2 + 2c - a^2x - b^2y - \frac{1}{3}c^2$

6. खालीलपैकी कोणत्या बैजिक राशी बहुपदी आहेत ते, ओळखा.

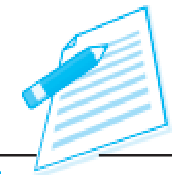
1) $\frac{1}{3}x^3 + 1$ 2) $5^2 - y^2 - 2$ 3) $ax^{-3} + 3y$

4) $5\sqrt{x+y} + 6$ 5) $3x^2 - \sqrt{2}\,y^2$ 6) $y^2 - \frac{1}{y^2} + 4$

7. खालीलपैकी एकपदी, द्विपदी, त्रिपदी बहुपदी ओळखा.

1) $x^3 + 3$ 2) $\frac{1}{3}x^3y^3$ 3) $2y^2 + 3y^2 + z^2$

4) $5 - xy - 3x^2y^2$ 5) $7 - 4x^2y^2$ 6) $-8x^3y^3$



टिपा

3.4 बहुपदीची कोटी (Degree of Polynomial) :

चलपदाच्या घातांकाच्या बेरजेस त्या चलपदाची कोटी असे म्हणतात.

उदा. $\frac{1}{2}x^2y$ ची कोटी 3 आहे कारण x चा घातांक 2 व y चा घातांक 1 यांची बेरीज $(2+1)=3$ आहे.

त्याचप्रमाणे $2x^5$ या पदाची कोटी 5 येईल.

शून्याखेरीज इतर संख्यांची कोटी 0 असते.

उदा. 3 ची कोटी 0 आहे. कारण $3 = 3 \times 1 = 3 \times x^0$ आणि $x^0 = 1$

बहुपदीमध्ये + किंवा – चिन्ह वापरून अनेक पदे लिहिलेली असतात. बहुपदीची कोटी पदाच्या कोटीसारखीच असते. शून्येत्तर सहगुणक असलेल्या आणि सर्वात मोठा घातांक असलेल्या पदाची जी कोटी असते, तीच बहुपदीची कोटी असते.

उदा. खालील बहुपदी विचारात घ्या.

$$3x^4y^3 + 7xy^5 - 5x^3y^2 + 6xy$$

या बहुपदीमधील प्रत्येक पदाची कोटी अनुक्रमे 7, 6, 5 आणि 2 ही आहे. यापैकी सर्वात मोठी संख्या 7 आहे. म्हणून बहुपदीची कोटी 7 आहे.

ज्या बहुपदीची कोटी 2 आहे, तिला वर्ग बहुपदी असेही म्हणतात.

उदा. $3 - 5x + 4x^2$ आणि $x^2 + xy + y^2$ या वर्गबहुपदी आहेत.

शून्येत्तर स्थिर बहुपदीची कोटी शून्य असते. ज्या वेळी बहुपदीमधील सर्व चल पदांचे सहगुणक शून्य असतात, त्यावेळी त्या बहुपदीस शून्य बहुपदी असे म्हणतात.

शून्य बहुपदीची कोटी सांगता येत नाही म्हणजेच अव्याखेय आहे.

3.5 बहुपदीची किंमत काढणे (Evaluation of Polynomials) :

बहुपदीतील चल पदांच्या किंमती दिल्या असता आपल्याला बहुपदीची किंमत काढता येते.

$x = 2$ ही किंमत दिली असता $3x^2 - x + 2$ या बहुपदीची किंमत कशी काढता येते ते पाहू या.

आपण एक चल पद असलेल्या बहुपदीचीच किंमत काढणार आहोत, हे लक्षात घ्या.

पायरी 1 : चल पदाच्या जागी चल पदाची दिलेली किंमत लिहा. येथे $x = 2$

$$\therefore 3 \times (2)^2 - 2 + 2$$

टिपा

पायरी 2 : पहिल्या पायरीत मिळालेल्या अंकसमीकरणाला सरळ रूप द्या.

$3 \times (2)^2 - 2 + 2 = 3 \times 4 = 12$

$\therefore$ $x = 2$ असताना $x^2 - x + 2 = 12$

आता आणखी उदाहरणे पाहू.

उदा. 3.6 : किंमत काढा.

1. $1 - x^5 + 2x^6 + 7x$, $\quad x = 1/2$
2. $5x^3 + 3x^2 - 4x - 4$; $\quad x = 1$

उकल :

1. $x = \frac{1}{2}$ ही किंमत घालून,

$1 - x^5 + 2x^6 + 7x$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 7\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{7}{2}$

$= \frac{9}{2}$

$= 4\frac{1}{2}$

2. $x = 1$ ही किंमत घालून,

$5x^3 + 3x^2 - 4x - 4$

$= 5 \times (1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) - 4$

$= 5(1) + 3(1) - 4(1) - 4$

$= 5 + 3 - 4 - 4$

$= 0$

3.6 बहुपदीची शून्य किंमत (Zero of a Polynomial)

एक चल असलेल्या बहुपदीमध्ये चलाच्या किंमतीमुळे बहुपदीची किंमत शून्य होते त्या किंमतीस बहुपदीची शून्य किंमत असे म्हणतात.

उदा. 3.6 (2) मध्ये $x = 1$ असताना $5x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ या बहुपदीची किंमत शून्य येते. म्हणून $x = 1$ या किंमतीस $5x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ या बहुपदीची शून्य किंमत असे म्हणतात.

आता आणखी उदाहरणे पाहू.

उदा. 3.7 :चलाची दिलेली किंमत बहुपदीची शून्य किंमत आहे. का नाही ते सांगा.

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 2; \quad x = -1$
2. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1; \quad x = 1$

उकल :

1. $x = -1$ ही किंमत घालून,

$x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

$= (-1)^3 + 3\times(-1)^2 + 3\times(-1) + 2$

$= -1 + 3(1) + 3(-1) + 2$

$= -1 + 3 - 3 + 2$

$= 1 (\neq 0)$

$\therefore$ $x = -1$ ही दिलेल्या बहुपदीची शून्य किंमत नाही.

2. $x = 1$ ही किंमत घालून,

$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

$= (-1)^4 - 4(1)^3 + 6\times(1)^2 - 4\times(1) + 1$

$= 1 - 4(1) + 6(1) - 4(1) + 1$

$= 1 - 4 + 6 - 4 + 1$

$= 0$

$\therefore$ $x = 1$ ही दिलेल्या बहुपदीची शून्य किंमत आहे.

आपली प्रगती तपासा 3.2

1. खालील एकपदींच्या कोटी सांगा.

1) $\frac{18}{5}x^7$ 2) $\frac{7}{8}y^3$ 3) $10x$ 4) 27

2. कोटीच्या चढत्या क्रमाने खालील एकपदी लिहा.

$-3x^6, \frac{2}{9}x^2, 9x, -25x^3, 2.5$

3. बहुपदींच्या कोटी सांगा.

1) $5x^6y^4 + 1$ 2) $10^5 + xy^3$

3) $x^2 + y^2$ 4) $x^2y + xy^2 - 3xy + 4$

4. चलाची दिलेली किंमत वापरून बहुपदीची किंमत काढा.

1) $x^2 - 25;\ x = 5$ 2) $x^2 + 3x - 5;\ x = -2$

3) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{7}{5};\ x = -1$ 4) $2x^3 - 3x + 12;\ x = -2$

5. $x^2 - 5x + 6$ या बहुपदीसाठी $x = 2$ आणि $x = 3$ या शून्य किंमती आहेत, याचा पडताळा घ्या.

3.7 बहुपदींची बेरीज आणि वजाबाकी (Addition and Subtraction of Polynomials)

बहुपदींमध्ये सरूप आणि भिन्नरूप पदे असतात, हे आपणास माहीत आहेच. बहुपदींची बेरीज करताना आपण सरूप पदांची बेरीज करतो. तसेच एका बहुपदीमधून दुसरी बहुपदी वजा करताना आपण सरूप पदांचीच वजाबाकी करतो. सरूप पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी कशी करतात? हे आपण पाहू. त्यासाठी एक उदाहरण घेऊ.

समजा आपण 2x आणि 3x या पदांची बेरीज करावयाची आहे. यासाठी अंकगणितात जी पद्धत आहे, तीच पद्धत बीजगणितात वापरतात.

आपणास माहीत आहे की,

$$5 \times 6 + 5 \times 7 = 5 \times (6 + 7)$$

$$6 \times 5 + 7 \times 5 = (6 + 7) \times 5$$

त्याप्रमाणे,

$$\begin{aligned} 2x + 3x &= 2 \times x + 3 \times x \\ &= (2 + 3) \times x \\ &= 5 \times x \\ &= 5x \end{aligned}$$

तसेच, $2xy + 4xy = (2 + 4)\,xy = 6xy$

$3x^2y + 8x^2y = (3 + 8)\,x^2y = 11x^2y$

वरीलप्रमाणेच,

$$7 \times 5 - 6 \times 5 = (7 - 6) \times 5 = 1 \times 5 = 5$$

आणि $9x^2y^2 - 5x^2y^2 = (9 - 5)x^2y^2 = 4x^2y^2$

आतापर्यंतच्या अभ्यासावरून आपणास खालील निष्कर्ष मिळतात.

1. दोन किंवा अधिक सरूप पदांची बेरीज म्हणजे त्यांच्या सहगुणकांची बैजिक बेरीज होय.

2. दोन सरूप पदांची वजाबाकी म्हणजे त्यांच्या सहगुणकांची बैजिक वजाबाकी होय.

म्हणून दोन किंवा अधिक बहुपदींची बेरीज आपण खालील पद्धतीने करतो.

पायरी 1 : बहुपदीतील सरूप पदे एकत्र करा.

पायरी 2 : सरूप पदांची बेरीज करून उत्तर मांडा.

उदा. 3.8 : $-3x + 4$ आणि $2x^2 - 7x - 2$ यांची बेरीज करा.

उकल :

$$= (-3x + 4) + (2x^2 - 7x - 2)$$
$$= 2x^2 + (-3x - 7x) + (4 - 2)$$
$$= 2x^2 + (-3 - 7)x + 2$$
$$= 2x^2 + (-10)x + 2$$
$$= 2x^2 - 10x + 2$$
$$\therefore \quad = (-3x + 4) + (2x^2 - 7x - 2) = 2x^2 - 10x + 2$$

1) दिलेल्या बहुपदींतील सरूप पदे जेव्हा एकाच स्तंभात असतात, तेव्हा बहुपदींची बेरीज करणे सुलभ जाते.

2) एकाच स्तंभातील सहगुणकांची बैजिक बेरीज करणे सुलभ जाते.

उदा. 3.8 : हे उदाहरण आपणास खालील पद्धतीने सोडविता येते.

$$\begin{array}{r} -3x + 4 \\ +\quad 2x^2 - 7x - 2 \\ \hline \end{array}$$

$$2x^2 + (-3 - 7)x + (4 - 2)$$
$$\therefore 2x^2 + (-10)x + (+2)$$
$$\therefore (-3x + 4) + (2x^2 - 7x - 2) = 2x^2 - 10x + 2$$

उदा. 3.9 : $5x + 3y - \frac{3}{4}$ आणि $-2x + y + \frac{7}{4}$ यांची बेरीज करा.

उकल :

$$\begin{array}{rl} & 5x + 3y - \frac{3}{4} \\ + & -2x + y + \frac{7}{4} \\ \hline & 3x + 4y + (\frac{7}{4} - \frac{3}{4}) \\ \hline & = \; 3x + 4y + 1 \end{array}$$

$\therefore (5x + 3y - \frac{3}{4}) + (-2x + y + \frac{7}{4}) = 3x + 4y + 1$

उदा 3.10 : $\frac{3}{2}x^3 + x^2 + x + 1$ आणि $x^4 - \frac{x^3}{2} - 3x + 1$ यांची बेरीज करा.

उकल :

$$\begin{array}{rl} & \frac{3}{2}x^3 + x^2 + x + 1 \\ + & +x^4 - \frac{1}{2}x^3 \qquad\quad - 3x + 1 \\ \hline & x^4 + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2})\, x^3 + x^2 + (1 - 3)\, x + 1 \\ \hline & = x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

$\therefore [\frac{3}{2}x^3 + x^2 + x + 1] + [x^4 - \frac{x^3}{2} - 3x + 1] = x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$

एक बहुपदीमधून दुसरी बहुपदी वजा करताना आपण खालील तीन पायऱ्यांचा वापर करतो.

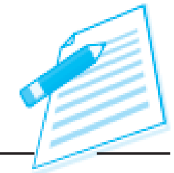
पायरी 1 : दिलेल्या बहुपदीमधील सरूप पदे एका स्तंभात लिहितो.

पायरी 2 : वजा करावयाच्या बहुपदीमधील पदांची चिन्हे बदलतो (+ चे – आणि – चे +)

पायरी 3 : प्रत्येक स्तंभातील सरूप पदांची बेरीज करतो.

खालील उदाहरणावरून ही क्रिया अधिक स्पष्ट होईल.

उदा. 3.11 : $9x^2 - 3x - \frac{2}{7}$ मधून $-4x^2 + 3x + \frac{2}{3}$ वजा करा.



उकल :

$$
\begin{array}{rl}
 & 9x^2 - 3x - \frac{2}{7} \\
- & -4x^2 + 3x + \frac{2}{3} \\
 & + \quad - \quad - \\
\hline
 & (9+4)x^2 + (-3-3)\,x + (-\frac{2}{7} - \frac{2}{3}) \\
\hline
 & = 13x^2 - 6x - \frac{20}{21}
\end{array}
$$

$$\therefore [9x^2 - 3x - \frac{2}{7}] - [-4x^2 + 3x + \frac{2}{3}] = 13x^2 - 6x - \frac{20}{21}$$

उदा. 3.12 : $2x^2 - 5 + 11x - x^3$ मधून $3x - 5x^2 + 7 + 3x^3$ वजा करा.

उकल :

$$
\begin{array}{l}
-x^3 + 2x^2 + 11x - 5 \\
- + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 7 \\
- \quad + \quad - \quad - \\
\hline
(-1-3)\,x^3 + (2+5)\,x^2 + (11-3)\,x + (-5-7) \\
\hline
= -4x^3 + 7x^2 + 8x - 12
\end{array}
$$

$$\therefore (2x^2 - 5 + 11x - x^3) - (3x - 5x^2 - 7 + 3x^3) = -4x^3 + 7x^2 + 8x - 12$$

उदा. 3.13 : $15xy + 6y^2 + 7x^2$ मधून $12xy - 5y^2 - 9x^2$ वजा करा.

उकल :

$$
\begin{array}{rl}
 & 15xy + 6y^2 + 7x^2 \\
- & +12xy - 5y^2 - 9x^2 \\
 & - \quad + \quad + \\
\hline
 & 3xy + 11y^2 + 16x^2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\therefore (15xy + 6y^2 + 7x^2) - (12xy - 5y^2 - 9x^2) = 3xy + 11y^2 + 16x^2$$

बहुपदीमधील सरूप राशी एकाखाली एक न लिहितादेखील आपण अशी उदाहरणे खालील पद्धतीने सोडवू शकतो.

$$(15xy + 6y^2 + 7x^2) - (12xy - 5y^2 - 9x^2)$$

$$= 15xy + 6y^2 + 7x^2 - 12xy - 5y^2 - 9x^2$$

$$= 3xy + 11y^2 + 16x^2$$

याच पद्धतीने आपण दोनपेक्षा अधिक बहुपदींची वेरीजसुद्धा करू शकतो.

उदा. 3.14 : $3x + 4y - 5x^2$, $5y + 9x$ आणि $4x - 17y - 5x^2$ या बहुपदींची बेरीज करा.

उकल :

$$\begin{array}{l} 3x + 4y - 5x^2 \\ + 9x + 5y \\ 4x - 17y - 5x^2 \\ \hline 16x - 8y - 10x^2 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore (3x + 4y - 5x^2) + (5y + 9x) + (4x - 17y - 5x^2) = 16x - 8y - 10x^2$

उदा 3.15 : $3x^2 - 8x + 11$ आणि $-2x^2 + 12x$ व $- 4x^2 + 17$ यांच्या बेरजेतून $x^2 - x - 1$ वजा करा.

उकल : प्रथम आपण $3x^2 - 8x + 11$ आणि $-2x^2 + 12x$ व $- 4x^2 + 17$ यांची बेरीज करू.

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2 & - 8x & + 11 \\ + & - 2x^2 & + 12x & \\ & - 4x^2 & & +17 \\ \hline & -3x^2 & + 4x & + 28 \\ \hline \end{array}$$

यामधून आपण $x^2 - x - 1$ वजा करू.

$$\begin{array}{rrrr} & -3x^2 & + 4x & + 28 \\ - & x^2 & - x & - 1 \\ & - & + & + \\ \hline & -4x^2 & + 5x & + 29 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ उत्तर $= - 4x^2 + 5x + 29$

आपली प्रगती तपासा 3.3

1. खालील बहुपदींची बेरीज करा.

1) $\frac{2}{3} x^2 + x + 1; \quad \frac{3}{7} x^2 + \frac{1}{4} x + 5$

2) $\frac{7}{5} x^3 - x^2 + 1; \quad 2x^2 + x - 3$

3) $7x^2 - 3x + 4y; \quad 3x^3 + 5x^2 - 4x + \frac{7}{3} y$

4) $2x^3 + 7x^2y - 5xy + 7; \quad - 2x^2y + 7x^3 - 3xy - 7$

2. बेरीज करा.

1) $x^2 - 3x + 5$; $5 + 7x - 3x^2$ आणि $x^2 + 7$

2) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{8}x - 5$; $\frac{2}{3}x^2 + 5 + \frac{1}{8}x$ आणि $-x^2 - x$

3) $a^2 - b^2 + ab$; $b^2 - c^2 + bc$ आणि $c^2 - a^2 + ca$

4) $2a^2 + 3b^2$; $5a^2 - 2b^2 + ab$ आणि $-6a^2 - 5ab + b^2$

3. वजाबाकी करा.

1) $x^2 - 5x + 2$ मधून $7x^3 - 3x^2 + 2$

2) $2y^2 - 5 + 11y - y^3$ मधून $3y - 5y^2 + 7 + 3y^3$

3) $5z + 7 - 3z^2 + 5z^3$ मधून $2z^2 + 7z - 5z^2 + 2$

4) $5x^3 + 7x^2 + 2x - 4$ मधून $12x^3 - 3x^2 + 11x + 13$

4. $3a - 5b + 3ab$ आणि $2a + 4b - 5ab$ यांच्या बेरजेतून $4a - b - ab + 3$ वजा करा.

3.8 बहुपदींचा गुणाकार (Multiplication of Polynomials) :

एका एकपदीला दुसऱ्या एकपदीने गुणताना आपण घातांकांच्या आणि चिन्हांच्या नियमांचा वापर करतो.

उदा. : $3a \times a^2b^2c^2 = (3 \times 1)\, a^{2+1}\, b^2\, c^2 = 3a^3\, b^2c^2$

$-5x \times 2xy^3 = (-5 \times 2)\, x^{1+1}\, y^3 = -10x^2y^3$

बहुपदीला एकपदीने गुणताना आपण बहुपदीमधील प्रत्येक पदाला एकपदीने गुणतो. उदा.

$$x^2y \times (-y^2 + 2xy + 1) = x^2y \times (-y^2) + (x^2y) \times 2xy + (x^2y) \times 1$$

$$= -x^2y^3 + 2x^3y^2 + x^2y$$

एक बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने गुणताना आपण पहिल्या बहुपदीमधील प्रत्येक पदाला दुसऱ्या बहुपदीमधील प्रत्येक पदाने गुणतो आणि सरूप पदांची बैजिक बेरीज करून उत्तर मांडतो. गुणाकार करताना दोन्ही बहुपदी घातांकाच्या उतरत्या किंवा चढत्या क्रमाने मांडून घ्याव्यात.

उदा. : $(2n + 3)(n^2 - 3n + 4) = 2n \times n^2 + 2n \times (-3) + 2n \times 4 + 3 \times n^2 + 3 \times (-3n)$

$+ 3 \times 4$

$= 2n^3 - 6n^2 + 8n + 3n^2 - 9n + 12$

$= 2n^3 - 3n^2 - n + 12$

आता आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 3.16 : $(0.2x^2 + 0.7x + 3)$ आणि $(0.5x^2 - 3x)$ यांचा गुणाकार करा.

उकल : $(0.2x^2 + 0.7x + 3) \times (0.5x^2 - 3x)$

$= 0.2x^2 \times 0.5x^2 + 0.2x^2 \times (-3x) + 0.7x \times 0.5x^2 + 0.7x \times (-3x) + 3 \times 0.5x^2 + 3 \times (-3x)$

$= 0.1\,x^4 - 0.60x^3 + 0.35x^3 - 2.1x^2 + 1.5x^2 - 9x$

$= 0.1x^4 - 0.25x^3 - 0.6x^2 - 9x$

उदा. 3.17 : $2x - 3 + x^2$ ला $1 - x$ ने गुणा

उकल : पदे x च्या घातांकाच्या उतरत्या क्रमाने मांडून,

$(x^2 + 2x - 3) \times (-x + 1) = x^2 \times (-x) + x^2 \times (1) + 2x \times (-x) + 2x \times (1) + (-3) \times (-x) + (-3) \times (1)$

$= -x^3 + x^2 - 2x^2 + 2x + 3x - 3$

$= -x^3 - x^2 + 5x - 3$

दुसऱ्या पद्धतीने,

$$\begin{array}{rl}
x^2 + 2x - 3 & \longleftarrow \text{पहिली बहुपदी} \\
\times \quad -x + 1 & \longleftarrow \text{दुसरी बहुपदी} \\
\hline
-x^3 - 2x^2 + 3x \quad\quad & \\
+ x^2 + 2x - 3 & \longleftarrow \text{गुणाकार} \\
\hline
-x^3 - x^2 + 5x - 3 & \longleftarrow \text{उत्तर} \\
\hline
\end{array}$$

3.9 बहुपदींचा भागाकार (Division of Polynomials)

एका एकपदीला दुसऱ्या एकपदीने भागताना आपण सहगुणकांचा भागाकार करतो. आणि घातांकांच्या नियमांचा वापर करून चलपदांचा भागाकार करतो आणि नंतर या भागाकारांनी मिळालेल्या पदांचा गुणाकार उत्तर करून म्हणून मांडतो.

उदा. :

1. $25x^3y^3 \div 5x^2y = \dfrac{25x^3y^3}{5x^2y} = \dfrac{25}{5} \times \dfrac{x^3}{x^2} \times \dfrac{y^3}{y}$

$= 5 \times x^1 \times y^2$

$= 5xy^2$

2. $$-12ax^2 \div 4x = -\frac{12ax^2}{4x} = \frac{-12}{4}\times\frac{a}{1}\times\frac{x^2}{x}$$

$$= -3ax$$

एका बहुपदीला दुसऱ्या एकपदीने भागताना बहुपदीमधील प्रत्येक पदाला एकपदीने भागावे.

उदा. :

1. $$(15x^3 - 3x^2 + 18x) \div 3x = \frac{15x^3}{3x} - \frac{3x^2}{3x} + \frac{18x}{3x}$$

$$= 5x^2 - x + 6$$

2. $$(-8x^2 + 10x) \div (-2x) = \frac{-8x^2}{-2x} + \frac{10x}{-2x}$$

$$= \left(\frac{-8}{-2}\right)\left(\frac{x^2}{x}\right) + \left(\frac{10}{-2}\right)\times\frac{x}{x}$$

$$= 4x - 5$$

एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागताना अंकगणिताच्याच पद्धतीचा वापर करतात.

उजळणीसाठी आपण 20 ला 3 ने भागू.

$$\begin{array}{r}
6 \\
3\overline{)\,20} \\
-18 \\
\hline
2 \\
\hline
\end{array}$$

एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागताना येणाऱ्या पायऱ्या उदाहरणांसहीत स्पष्ट केल्या आहेत.

$2x^2 + 5x + 3$ ला $2x + 3$ ने भागा

पायरी 1 : दोन्ही बहुपदींमध्ये सामाईक असणारी पदे उतरत्या घातांकाच्या क्रमाने मांडा.

$$2x+3\overline{)2x^2+5x+3}$$

पायरी 2 : भागाकारातील पहिले पद मिळविण्यासाठी भाज्यामधील पहिल्या पदाला भाजकातील पहिल्या पदाने भागा.

$$\begin{array}{r} x \\ 2x+3\overline{)2x^2+5x+3} \end{array}$$

पायरी 3 : भाजकातील सर्व पदांना आलेल्या भागाकारातील पहिल्या पदाने गुणा आणि आलेल्या गुणाकार

भाज्यातून वजा करा. उरलेली बाकी म्हणजे पुढील भाज्य होय.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ \hline 2x+3 & 2x^2+5x+3 \\ & 2x^2+3x \\ & -\quad - \\ \hline & \qquad 2x+3 \end{array}$$

पायरी 4 : बाकीतील पहिल्या पदाला भाजकातील पहिल्या पदाने भागा. आलेले उत्तर भागाकाराचे दुसरे पद म्हणून मांडा.

पायरी 5 : भाजकातील सर्व पदांना आलेल्या भागाकरातील दुसऱ्या पदाने गुणा आणि आलेला गुणाकार (उरलेली बाकी) भाज्यातून वजा करा.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x+1 \\ \hline 2x+3 & 2x^2+5x+3 \\ & 2x^2+3x \\ & -\quad - \\ \hline & \qquad 2x+3 \\ & \qquad 2x+3 \\ & \qquad -\quad - \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

पायरी 6 : पायर 4 व पायरी 5 मधील क्रिया बाकी 0 येईपर्यंत करा किंवा बाकी भाजकातील उच्चतम घातांकाच्या पदापेक्षा कमी घातांकाचे पद येईपर्यंत करा.

वरील उदाहरणात भागाकार $x + 1$ आला आणि बाकी 0 उरली.

याप्रकारची काही उदाहरणे आता आपण पाहू.

उदा. 3.18 : $x - 1$ ने $x^3 - 1$ ला भागा.

उकल :

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+1 \\ \hline x-1 & x^3-1 \\ & x^3 - x^2 \\ & -\quad + \\ \hline & x^2 - 1 \\ & x^2 - x \\ & -\quad + \\ \hline & \quad x - 1 \\ & \quad x - 1 \\ & \quad -\quad + \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

भागाकार $= x^2 + x + 1$ बाकी $= 0$

उदा. 3.19 : $2x - 5$ ने $5x - 11 - 12x^2 + 2x^3$ ला भागा.

उकल : भाज्य x च्या उतरत्या घातांकाच्या क्रमाने मांडून,

$2x^3 - 12x^2 + 5x - 11$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{25}{4} \\
\hline
2x-5 & 2x^3 - 12x^2 + 5x - 11 \\
 & -\ 2x^3 - 5x^2 \\
 & -\quad + \\
\hline
 & -7x^2 + 5x - 11 \\
 & - \\
 & -7x^2 + \frac{35}{2}x \\
 & +\quad - \\
\hline
 & -\frac{25}{2}x - 11 \\
 & - \\
 & -\frac{25}{2}x + \frac{125}{4} \\
 & +\quad - \\
\hline
 & -\frac{169}{4} \\
\hline
\end{array}
$$

भागाकार $= x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{25}{4}$ बाकी $= -\frac{169}{4}$

आपली प्रगती तपासा 3.4

1. गुणाकार करा.

   1) $9b^2c^2$ ला $3b$ ने गुणा.

   2) $5x^3y^5$ ला $-2xy$ ने गुणा

   3) $2xy + y^2$ ला $-5x$ ने गुणा

   4) $x + 5y$ ला $x - 3y$ ने गुणा

2. भागाकार करा.

   1) $x^5y^3 \div x^2y^2$

   2) $-28y^7z^2 \div (-4y^3z^2)$

   3) $a^4 + a^3 b^5 \div a^2$

   4) $-15a^5c^6 \div 3b^2c^4$

3. भागाकार आणि बाकी मांडा.

1) $x^2 - 1 \div x + 1$

2) $x^2 - x + 1 \div x + 1$

3) $6x^2 - 5x + 1 \div 2x + 1$

4) $2x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \div x + 1$

तुम्ही काय शिकलात?

- ❖ अव्यक्त संख्या अक्षराने दाखवितात. याला अनेक किंमती असतात. याला चल (संख्या) राशी असे म्हणतात.
- ❖ अंक ही स्थिर राशी असते. तिची किंमत कायम असते.
- ❖ बैजिक राशी ही अंक, चल पदे आणि अंकगणितीय प्रक्रिया यांचे एकत्रीकरण आहे. यामधील दोन पदे + किंवा – या चिन्हाने जोडलेली असतात.
- ❖ $2xy$ या पदामधील 2 या अंकाला पदाचा अंकसहगुणक असे म्हणतात. x चा सहगुणक $2y$ आणि y चा सहगुणक $2x$ हा आहे.
- ❖ x चा अंकसहगुणक 1 असतो तर $-x$ चा -1 असतो.
- ❖ ज्या बैजिक राशीमध्ये छेदस्थानी चलपदे नसतात, चलपदांचे घातांक पूर्णांकसंख्या असतात आणि चलपदांचे सहगुणक वास्तव संख्या असतात, अशा बैजिक राशीला 'बहुपदी' असे म्हणतात.
- ❖ एक चल असलेल्या बहुपदीचे सामान्य रूप $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots\ldots a_ax^a$ असे असते (किंवा याच्या उलट क्रमाने लिहिले तरी चालते.) या ठिकाणी $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$ हे सहगुणक वास्तव संख्या असतात. $n, n-1, n-2, \ldots\ldots\ldots 3, 2, 1$ या पूर्ण संख्या असतात.
- ❖ ज्या बैजिक राशीमध्ये किंवा बहुपदीमध्ये एकच पद असते. तिला 'एकपदी', जिच्यामध्ये दोन पदे असतात, तिला 'द्विपदी' आणि जिच्यामध्ये तीन पदे असतात, तिला 'त्रिपदी' असे म्हणतात.
- ❖ बहुपदीमध्ये समान चलपदे आणि समान घातांक असणाऱ्या सारख्या पदांना 'सरूप पद' असे म्हणतात. जी पदे सरूप नसतात, त्यांना 'भिन्नरूप पदे' असे म्हणतात.
- ❖ चल पदांच्या घातांकाच्या बेरजेस त्या चलपदाची कोटी असे म्हणतात.
- ❖ शून्येतर सहगुणक असलेल्या आणि सर्वात मोठा घातांक असलेल्या पदाची जी कोटी असते, तीच बहुपदीची कोटी असते.
- ❖ शून्येत्तर स्थिर बहुपदीची कोटी शून्य असते.

- बैजिक राशी किंवा बहुपदीमध्ये चलाची अंकी किंमत घालून त्या राशीची किंवा बहुदीची किंमत काढता येते.
- चलाच्या ज्या किंमतीमुळे बहुपदीची किंमत शून्य होते, त्या किंमतीस बहुपदीची शून्य किंमत असे म्हणतात.
- दोन सरूप पदांची बेरीज म्हणजे त्यांच्या सहगुणकांची बैजिक बेरीज होय.
- दोन सरूप पदांची वजावाकी म्हणजे त्यांच्या सहगुणकांची बैजिक वजावाकी होय.
- एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने गुणताना किंवा भागताना आपण घातांकांच्या आणि चिन्हांच्या नियमांचा वापर करून एका बहुपदीच्या प्रत्येक पदाला दुसऱ्या बहुपदीच्या प्रत्येक पदाने गुणतो किंवा भागतो.
- एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने गुणताना आपण पहिल्या बहुपदीमधील प्रत्येक पदाला दुसऱ्या बहुपदीमधील प्रत्येक पदाने गुणतो आणि सरूप पदांची बेरीज करून उत्तर मांडतो.
- एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागताना आपण दोन्ही बहुपदींमध्ये समाईक असणारी पदे उतरत्या घातांकांच्या क्रमाने मांडतो आणि अंकगणितामध्ये आपण संख्यांच्या भागाकार ज्या पद्धतीने करतो, त्याच पद्धतीने बहुपदींचा भागाकार करतो.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. अचूक उत्तरावर बरोबरची खूण (✓) करा.

   1. $6x^4y^2$ मध्ये x^4 चा सहगुणक .... आहे.

      (A) 6 (B) y^2 (C) $6y^2$ (D) 4

   2. $-x^2y^4$ या एकपदीचा अंक सहगुणक .... आहे.

      (A) 2 (B) 6 (C) 1 (D) –1

   3. खालीलपैकी बहुपदी असणारी बैजिक राशी .... आहे.

      (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{8} + 3.7x$ (B) $2x + \frac{1}{2x} - 4$

      (C) $(x^2 - 2y^2) \div (x^2 + y^2)$ (D) $6 + \sqrt{x} - x - 15x^2$

   4. $1 - \sqrt{2}\, a^2b^3 - (7a)(2b) + \sqrt{3}\, b^2$ या राशीमध्ये .... पदे आहेत.

      (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

5. खालीलपैकी द्विपद राशी .... आहे.

(A) $2x^2y^2$ (B) $x^2 + y^2 – 2xy$

(C) $2 + x^2 + y^2 2x^2y^2$ (D) $1 – 3xy^3$

6. खालीलपैकी सरूप पदांची जोडी .... आहे.

(A) 2a, 2b (B) $2xy^3, 2x^3y$

(C) $3x^2y, \frac{1}{\sqrt{2}} yx^2$ (D) 8, 16a

7. $x^2 – 2x – 15$ या बहुपदीची शून्य किंमत .... आहे.

(A) $x = –5$ (B) $x = – 3$

(C) $x = 0$ (D) $x = 3$

8. $x^3y^4 + 9x^6 – 8y^5 + 17$ ची कोटी .... आहे.

(A) 7 (B) 17 (C) 5 (D) 6

2. चलपदे आणि गणिती चिन्हे वापरून खालील विधाने बैजिक राशी स्वरूपात लिहा.

1. एका संख्येत तीन संख्या मिळविली असता उत्तर 6 येते.
2. एका संख्येची तिप्पट करून चार वजा केले असता उत्तर 11 येते.
3. दोन क्रमागत विषय संख्यांचा गुणाकार 35 आहे.
4. एका संख्येचा 1/3 हा त्याच संख्येच्या 1/5 पेक्षा 2 ने मोठा आहे.

3. बहुपदीची कोटी सांगा.

1. 3^{27}
2. $x + 7x^2y^2 – 6xy^3 – 18$
3. $ax^4 + bx^3$, a आणि b हे स्थिरांक आहेत.
4. $c^6 – a^3b^2y^2 – b^2x^3y$ a,b आणि c हे स्थिरांक आहेत.

4. वहु पदीमधील चलाची दिलेली किंमत त्या वहुपदीची शून्य किंमत आहे का? ते ठरवा.

1. $x^2 + 3x – 40$ $x = 8$
2. $x^6 – 1$ $x = –1$

5. चलाची दिलेली किंमत वापरून बहुपदीची किंमत काढा.

1. $2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{5}x^5 + 7x^3$; $x = 1/2$

2. $\frac{4}{5}y^3 + \frac{1}{5}y^2 - 6y - 65$ $y = -5$

6. $n = 10$ असताना $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ या बहुपदीची किंमत काढा. आलेले उत्तर पहिल्या दहा नैसर्गिक संख्यांची बेरीज आहे, हे सिद्ध करा.

7. बेरीज करा.

1. $\frac{7}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 3x + \frac{7}{5}$ आणि $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - 3x + \frac{3}{5}$

2. $x^2 + y^2 4xy$ आणि $2y^2 - 4xy$

3. $x^3 + 6x^2 + 4xy$ आणि $7x^2 + 8x^3 + y^2 + y^3$

4. $2x^5 + 3x + \frac{2}{3}$ आणि $-3x^5 + \frac{2}{5}x - 3$

8. वजाबाकी करा.

1. 0 मधून $-x^2 + y^2 - xy$

2. $a - b + c$ मधून $a + b - c$

3. $y^2x - x^2 - y$ मधून $x^2 - y^2x + y$

4. $3m^2 - 3mn + 8$ मधून $- m^2 + 3$

9. $x^2 + xy + y^2$ मध्ये कोणती राशी मिळवावी, म्हणजे उत्तर $2x^3 + 3xy$ येईल?

10. $-13x + 5y - 8$ मधून कोणती राशी वजा करावी, म्हणजे उत्तर $11x - 16y + 7$ येईल?

11. दोन बहुपदींची बेरीज $x^2 - y^2 - 2xy + y - 7$ आहे. त्यापैकी एक बहुपदी $2x^2 + 3y^2 - 7$ ही आहे. तर दुसरी बहुपदी काढा.

12. जर, $A = 3x^2 - 7x + 8$, $B = x^2 + 8x - 3$ आणि $C = - 5x^2 - 3x + 2$

तर $B + C - A$ ची किंमत काढा.

13. $3x - y + 2$ आणि $- y - xy$ यांच्या बेरजेतून $3x - y - xy$ वजा करा.

उत्तरातील x ची कोटी सांगा.

14. गुणाकार करा.

1. $a^2 - 5a - 6$ ला $2a + 1$ ने गुणा

2. $4x^2 + 16x + 15$ ला $x - 3$ ने गुण

3. $a^2 - 2a + 1$ ला $a - 1$ ने गुणा

4. $a^2 + 2ab + b^2$ ला $a - b$ ने गुणा

5. $x^2 - 1$ ला $2x^2 + 1$ ने गुणा

6. $x^2 - x + 1$ ला $x + 1$ ने गुणा

7. $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$ ला $x - \frac{7}{4}$ ने गुणा

8. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{4}x - 3$ ला $3x^2 + 4x + 1$ ने गुणा

15. $(x^2 + xy + y^2)$ आणि $(x - y)$ यांच्या गुणाकारातून $(x^2 - xy + y^2)$ आणि $(x + y)$ यांचा गुणाकार वजा करा.

16. भागाकार करा.

प्रत्येक उदाहरणात भागाकार आणि बाकी मांडा.

1. $8x^3 + y^3 \div 2x + y$

2. $7x^3 + 18x^2 + 18x - 5 \div 3x + 5$

3. $20x^2 - 15x^3y^6 \div 5x^2$

4. $35a^3 - 21a^4b \div (-7a^3)$

5. $x^3 - 3x^2 + 5x - 8 \div x - 2$

6. $8y^2 + 38y + 35 \div 2y + 7$

आपली प्रगती तपासा – उत्तरे

3.1

1. 1) $y ; 1$ 2) $x, y ; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 7$ 3) $x, y, \frac{4}{5}$

4) $x, y, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}$ 5) $x, y; 2, -8$ 6) x ; एकही नही.

2. 1) 2 2) $2y$, 3) $2x^2$

3. 1) $x - 3 = 15$, 2) $x + 5 = 22$

4. 1) 2, abc 2) a, b, c, z 3) $x^2y, -2xy^2, -\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{8}x^3y^2$

5. 1) $-xy^2, +\frac{1}{3}y^2x$ 2) $-3ab, +ab$ 3) सरूप पदे नाहीत.

6. 1), 2) आणि 5) 7. एकपदी (2) आणि (4)

द्विपदी (1) आणि (5) त्रिपदी (3) आणि (4)

3.2

1. 1) 7, 2) 3, 3) 1, 4) 0

2. 2.5, 9x, $\frac{2}{9}x^2, -25x^3, -3x^6$

3. 1) 10, 2) 4, 3) 2, 4) 3

4. 1) 0, 2) ʿ7, 3) $-\frac{19}{15}$ 4) 6

3.3

1. 1) $\frac{23}{11}x^2 + \frac{5}{4}x + 6$ 2) $\frac{7}{5}x^3 + x^2 + x - 2$

   3) $3x^3 + 12x^2 - 7x + \frac{19}{3}y$ 4) $9x^3 + 5x^2y - 8xy$

2. 1) $-x^3 + 4x + 7$ 2) 0

   3) $ab + bc + ca$ 4) $a^2 + 2b^2 - 4ab$

3. 1) $-7x^3 + 4x^2 - 5x$ 2) $-4y^3 + 7y^2 + 8y - 12$

   3) $3z^3 + 2z^2 - 2z + 5$ 4) $-7x^3 + 10x^2 - 9x - 17$

4. $a - ab = 3$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह – उत्तरे

1. 1) C, 2) D, 3) A, 4) B, 5) D,
   6) C, 7) B, 8) A

2. 1) $y + y = 6$ 2) $3y - 4 = 11$ 3) $z(z + 2) = 35$ 4) $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 2$

3. 1) 0 2) 6 3) 3 4) 4

4. 1) नाही 2) होय

5. 1) $\frac{37}{24}$ 2) 0

6. 55

7. 1) $3x^3 + x^2 - 6x + 2$ 2) $x^2 + 3y^2$

3) $9x^3 + 13x^2 + 4xy + y^2 + y^3$ 4) $-x^5 + \frac{17}{5}x - \frac{7}{3}$

8. 1) $x^2 - y^2 + xy$ 2) $2c - 2b$

3) $2y^2x - 2x^2 - 2y$ 4) $4m^2 - 6mn + 8$

9. $x^2 + 2xy - y^2$

10. $-24x + 21y - 15$

11. $-x^2 - 4y^2 - 2xy + 8y - 8$

12. $-7x^2 + 12x - 9$

13. $2xy - y,\ 2y$

14. 1) $2a^3 + 11a^2 - 7a - 6$ 2) $4x^3 + 4x^2 - 33x - 45$

3) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$ 4) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

5) $2x^4 - x^2 - 1$ 6) $x^3 + 1$

7) $x^3 - \frac{13}{12}x^2 - \frac{x}{3} - \frac{35}{24}$ 8) $2x^4 + \frac{77}{12}x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{43}{4}x - 3$

15. $-2y^3$

16. 1) $4x^2 - 2xy + y^2$; 0 2) $9x^2 - 9x + 21$; -110

3) $4 - 3xy^6$; 0 4) $-5 + 3ab$; 0

5) $x^2 - x - 3$; -2 6) $4y + 5$; 0

❖ ❖ ❖

4

सूत्रे आणि अवयव

बैजिक राशी विशेषत: बहुपदी यांचा गुणाकार कसा करावा, हे आपण मागील प्रकरणात पाहिले आहेच. बीजगणितातील उदाहरणे सोडविताना काही पदांचे गुणाकार वारंवार येत असतात. आपण या गुणाकारांकडे नीट लक्ष दिल्यास गुणाकाराच्या सर्व पायऱ्या न मांडतासुद्धा या गुणाकारांची उत्तरे आपणास मांडता येतात. त्यामुळे आकडेमोड आणि वेळसुद्धा वाचतो.

जर आपल्याला $(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b), (a+b)^3$ या गुणाकारांची उत्तरे माहित असतील तर 108×108, 104×96, $99 \times 99 \times 99$ या गुणाकारांची उत्तरे आपण सहजपणे मांडू शकतो. $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $(a+b)^3$ या गुणाकाराच्या उत्तरांना सूत्रे असे म्हणतात.

(a^2-b^2), (a^3+8b^3) यासारख्या बहुपदींचे अवयव शोधण्याच्या प्रक्रियेस अवयव पाडणे असे म्हणतात. ज्या बहुपदींचे सहगुणक पूर्णांक संख्या आहेत, अशाच बहुपदींचे अवयव आपण पाहणार आहोत.

या पाठात आपण काही बहुपदींचे विशिष्ट गुणाकार (सूत्रे) आणि काही बहुपदींचे अवयव पाहणार आहोत. याशिवाय बहुपदींचा अवयव पद्धतीने लसावि आणि मसावि कसा काढतात हेही पाहणार आहोत. शेवटी परिमेय बैचिक राशी व त्यावरील मूलभूत प्रक्रियाही पाहणार आहोत.

उद्दिष्टे :

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणा खालील बाबींचे ज्ञान होईल.

- ❖ $(a+b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $(x+a)$, $(x+b)$, $(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $(a+b)^3$ आणि $(ax+b)(cx+d)$ या सूत्रांचे विस्तार लिहिता येतील.
- ❖ सूत्रांचा वापर करून संख्यांचे वर्ग किंवा घन लिहिता येतील.
- ❖ बहुपदींचे तसेच a^2-b^2, a^3-b^3 यासारख्या राशींचे अवयव पाडता येतील.
- ❖ मधल्या पदाची फोड करून ax^2+bx+c $(a \neq 0)$, यासारख्या त्रिपदींचे अवयव पाडता येतील.

- ❖ अवयव पद्धतीने बहुपदींचे लसावि मसावि काढता येतील.
- ❖ एकचल आणि द्विचल बैजिक राशींची उदाहरणे देता येतील.
- ❖ बैजिक राशींवर चार मूलभूत गणिती प्रक्रिया करता येतील.

अपेक्षित पूर्वज्ञान :

- ❖ संख्याप्रणाली व त्यावरील चार मूलभूत प्रक्रिया
- ❖ घातांकाचे नियम
- ❖ बैजिक राशी
- ❖ बहुपदींवरील चार मूलभूत गणिती प्रक्रिया.
- ❖ संख्यांचा लसावि आणि मसावि.
- ❖ प्राथमिक इयत्तांमध्ये अभ्यासलेले भूमिती आणि मोजमाप यांचे प्राथमिक संबोध

4.1 विशेष प्रकारचे गुणाकार किंवा सूत्रे (Special Products)

बीजगणितामध्ये विशेष प्रकारचे गुणाकार वारंवार येत असतात. त्यांना आपण सूत्रे म्हणतो.

1) $(a + b)^2$ चा वर्गविस्तार पाहू.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$= a(a + b) + b(a + b) \quad \text{वितरणाचा नियम}$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

वरील वर्गाची भौतिक सिद्धता–शेजारील आकृतीकडे वारकाईने लक्ष द्या.

1) $(a + b)^2$ = चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ

= चौरस AEFG चे क्षेत्रफळ +

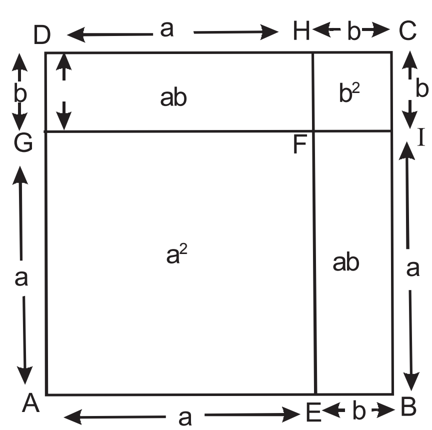
आयत EBIF चे क्षेत्रफळ +

आयत DGFH चे क्षेत्रफळ +

चौरस CHFI चे क्षेत्रफळ

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$



$\therefore \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2$ चा वर्गविस्तार पाहू.

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$= a(a-b) - b(a-b)$ वितरणाचा नियम

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

दुसरी पद्धत – या पद्धतीत आपण $(a+b)^2$ च्या सूत्राचा वापर करू

आपण $a-b$ हे $a+(-b)$ असेही लिहू शकतो.

$(a-b)^2 = [a-b) - (b\ )]^2$

$= (a-b)^2 = a(a-b) - b(a-b)$

$= a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

वरील वर्गाची भौतिमितिक सिद्धता– शेजारील आकृतीकडे बारकाईने लक्ष द्या.

$(a-b)^2$ = चौरस PQRS चे क्षेत्रफळ

= चौरस STVX चे क्षेत्रफळ –

(आयत RTVW चे क्षेत्रफळ +

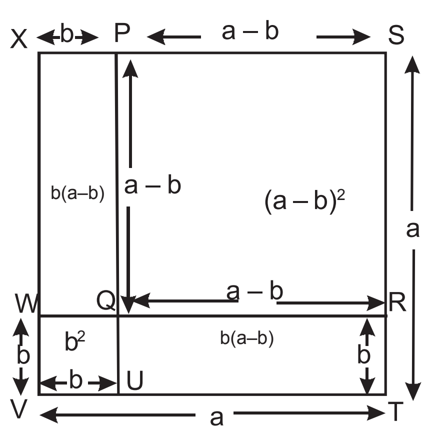
आयत PUVX चे क्षेत्रफळ

– चौरस QUVW चे क्षेत्रफळ)

$= a^2 - (ab + ab - b^2)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$



$\therefore \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

निष्कर्ष :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b2$ .... (1)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .... (2)

(1) आणि (2) यांची बेरीज केली असता,

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

(1) मधून (2) वजा केले असता,

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

आता $(a + b)(a - b)$ या गुणाकाराचे उत्तर काढू.

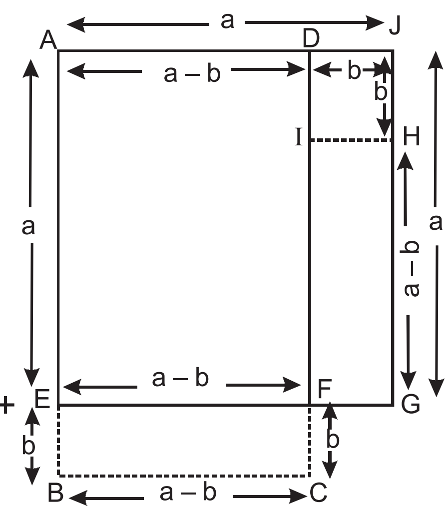
$(a + b) + (a - b) = a(a - b) + b(a - b)$ वितरणाचा नियम

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

वरील गुणाकाराची भौमितिक सिध्दता :

शेजारील आकृतीकडे बारकाईने लक्ष द्या.



$(a + b)(a + b) =$ आयत ABCD चे क्षेत्रफळ

= आयत AEFD चे क्षेत्रफळ +

आयत EBCF चे क्षेत्रफळ

= आयत AEFD चे क्षेत्रफळ +

आयत FGHI चे क्षेत्रफळ

= (आयत AEFD चे क्षेत्रफळ +

आयत FGHI चे क्षेत्रफळ

– चौरस DIHJ चे क्षेत्रफळ – आयत – DIHJ चे क्षेत्रफळ

= चौरस AEGJ चे क्षेत्रफळ –

– आयत DIHJ चे क्षेत्रफळ

$= a^2 - b^2$

$\therefore \quad (a + b)(a + b) = a^2 - b^2$

अंकगणितीमध्ये दोन संख्यांच्या बेरजेला त्याच दोन संख्यांच्या वजाबाकीने गुणून उत्तर काढण्यासाठी ही पद्धती उपयुक्त आहे.

उदा. $64 \times 56 = (60 + 4) \times (60 - 4)$

$$= 60^2 - 4^2$$

$$= 3600 - 16$$

$$= 3584$$

(4) $(x + a)(x + b)$ चे उत्तर काढा.

$(x + a) \times (x + b) = x(x + b) + a\,(x + b)$ वितरणाचा नियम

$$= x^2 + bx + ax + ab$$

$$= x^2 + (a + b)\,x + ab$$

$\therefore \quad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$

निष्कर्ष : (i) $(x - a)\,(x - b) = x^2 - (\,a + b)\,x + ab$

(ii) $(x - a)\,(x + b) = x^2 + (\,b - a)\,x - ab$

विद्यार्थ्यांनी वरील निष्कर्षांचा पडताळा घ्यावा.

(5) आता $(ax + b)(cx + d)$ या गुणाकाराचे उत्तर काढू.

$$(ax + b)(cx + d) = ax\,(cx + d) + b\,(x + d)$$

$$= acx^2 + adx + bcx + bd$$

$$= acx^2 + (ad + bc)\,x + bd$$

$$\therefore \quad (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)\,x + bd$$

निष्कर्ष : (i) $(ax - b)(cx - d) = acx^2 - (ad + bc)\,x + bd.$

(ii) $(ax - b)(cx + d) = acx^2 - (bc - ad)\,x - bd.$

विद्यार्थ्यांनी वरील निष्कर्षांचा पडताळा घ्यावा.

वरील सूत्रांवर आधारित काही उदाहरणे सोडवू या.

उदा. 4.1 : खालील गुणाकार करा.

1) $(2a + 3b)^2$ 2) $\left[\frac{3}{2}a - 6b\right]^2$

3) $(3x + y)\,(3x - y)$ 4) $(x + 9)\,(x + 3)$

5) $(a + 15)\,(a - 7)$ 6) $(5x - 8)\,(5x - 6)$

7) $(7x - 2a)\,(7x + 3a)$ 8) $(2x + 5)\,(3x + 4)$

टिपा

उकल :

1) वरील उदाहरणामध्ये a च्या जागी 2a आणि b च्या जागी 3b मांडू.

$$(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$$
$$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

2) निष्कर्ष (2) चा वापर करून,

$$\left(\frac{3}{2}a - 6b\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}a\right)(6b) + (6b)^2$$
$$= \frac{9}{4}a^2 - 18ab + 36b^2$$

3) $(3x + y)(3x - y) = (3x)^2 - y+2$ (निष्कर्ष (3) वरून)
$$= 9x^2 - y^2$$

4) $(x + 9)(x + 3) = x^2 + (9 + 3)x + 9 \times 3$ (निष्कर्ष (4) वरून)
$$= x^2 + 12x + 27$$

5) $(a + 15)(a - 7) = a^2 + (15 - 7)a - 15 \times 7$
$$= a^2 + 8a - 105$$

6) $(5x - 8)(5x - 6) = (5x)^2 - (8 + 6)(5x) + 8 \times 6$
$$= 25x^2 - 70x + 48$$

7) $(7x - 2a)(7x + 3a) = (7x)^2 + (3a - 2a)(7x) - (3a)(2a)$
$$= 49x^2 + 7ax - 6a^2$$

8) $(2x + 5)(3x + 4) = (2 \times 3)x^2 + (2 \times 4 + 5 \times 3)x + 5 \times 4$
$$= 6x^2 + 23x + 20$$

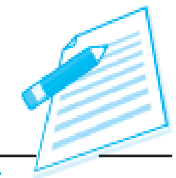
सूत्रांच्या साहाय्याने अंकगणितातील गुणाकार सोप्या पद्धतीने करता येतात.

यासाठी खालील उदाहरणे पहा.

उदा. 4.2 : सूत्रांच्या साहाय्याने खालील उदाहरणे सोडवा.

1) 101×101 2) 98×98 3) 68×72

4) 107×103 5) 56×48 6) 94×99



उकल :

1) $101 \times 101 = (101)^2 = (100 + 1)^2$
$= 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2$
$= 10000 + 200 + 1$
$= 10201$

2) $98 \times 98 = 98^2 = (100 - 2)^2$
$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$
$= 9604$

3) $68 \times 72 = (70 - 2)(70 + 2)$
$= 70^2 - 2^2$
$= 4900 - 4$
$= 4896$

4) $107 \times 103 = (100 + 7)(100 + 3)$
$= 100^2 + (7 + 3) \times 100 + 7 \times 3$
$= 10000 + 1000 + 21$
$= 11021$

5) $56 \times 48 = (50 + 6)(50 - 2)$
$= 50^2 + (6 - 2) \times 50 - 6 \times 2$
$= 2500 + (4) \times 50 - 12$
$= 2500 + 200 - 12$
$= 2688$

6) $94 \times 99 = (100 - 6)(100 - 1)$
$= 100^2 - (6 + 1) \times 100 + 6 \times 1$
$= 10000 - 700 + 6$
$= 9306$

आपली प्रगती तपासा 4.1

(1) उत्तरे काढा.

1) $(5x + y)^2$ 2) $(x - 3)^2$ 3) $(ab + cd)^2$

4) $(2x - 5y)^2$ 5) $\left(\frac{x}{3} + 1\right)^2$ 6) $\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{3}\right)^2$

टिपा

7) $(a^2 + 5)(a^2 - 5)$ 8) $(xy - 1)(xy + 1)$ 9) $\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

10) $\left(\frac{2}{3}x^2-3\right)\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}\right)$ 11) $(2x + 3y)(3x + 2y)$ 12) $(7x + 5y)(3x - y)$

(2) सोपे रूप द्या.

1) $(2x^2 + 5)^2 - (2x^2 - 5)^2$ 2) $(a^2 + 3)^2 + (a^2 - 3)^2$

3) $(ax + by)^2 + (ax - by)^2$ 4) $(p^2 + 8q^2)^2 - (p^2 - 8q^2)^2$

(3) सूत्रांचा वापर करून खालील उदाहरणे सोडवा.

1) 102×102 2) 108×108 3) 69×69 4) 998×998

5) 84×76 6) 157×143 7) 306×294 8) 508×492

9) 105×109 10) 77×73 11) 94×95 12) 993×996

4.2 आणखी काही सूत्रे (Some other special products)

(6) $(a + b)$ या द्विपदीचा घन करा.

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$ घातांकाचे नियम वापरून

$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$ वितरणाचा नियम

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

$\therefore (a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

(7) आता $(a - b)$ चा घन करू.

$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$

$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$ घातांकाचे नियम वापरून

$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$ वितरणाचा नियम

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3ab(a - b) - b^3$

$\therefore (a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$

टीप : $(a + b)^3 = a^3 + 3ab\,(a + b) + b^3$ या बहुपदीमध्ये b ऐवजी –b घेतले तर $(a - b)^3$ चे उत्तर बदलत नाही.

(8) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$ वितरणाचा नियम

$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 + b^3$

$\therefore (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

(9) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$ वितरणाचा नियम

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3$

$\therefore (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

वरील सूत्रांवरून आधारित काही उदाहरणे पाहू.

उदा. 4.3 ः सोडवा.

1) $(7x + 9y)^3$ 2) $(px - yz)^3$ 3) $(x - 4y^2)^3$

4) $(2a^2 + 3b^2)$ 5) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b\right)^3$ 6) $\left(1 + \frac{4}{3}c\right)^3$

उकल :

1) $(7x + 9y)^3 = (7x)^3 + (7x)(9y)(7x + 9y) + (9y)^3$

$= 343x^3 + 189xy\,(7x + 9y) + 729\,y^3$

$= 343x^3 + 1323\,x^2y + 1701\,xy^2 + 729\,y^3$

2) $(px - yz)^3 = (px)^3 - 3\,(px)\,(yz)\,(px - yz) - (yz)^3$

$= p^3x^3 - 3pxyz\,(px - yz) - y^3z^3$

$= p^3x^3 - 3p^2x^2yz + 3pxy^2z^2 - y^3z^3$

3) $(x - 4y^2)^3 = x^3 - 3x\,(4y^2)(x - 4y^2) - (4y^2)^3$

$= x^3 - 12xy^2\,(x - 4y^2) - 64y^6$

$= x^3 - 12x^2y^2 + 48\,xy^4 - 64y^6$

4) $(2a^2 + 3b^2) = (2a^2)^3 + 3(2a^2)(3b^2)(2a^2 + 3b^2) + (3b^2)^3$

$= 8a^6 + 18a^2b^2\,(2a^2 + 3b^2) + 27\,b^6$

$= 8a^6 + 36a^4b^2 + 54a^2b^4 + 27\,b^6$

टिपा

5) $$\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right)^3 = \left[\frac{2}{3}a\right]^3 - 3\left[\frac{2}{3}a\right]\left[\frac{5}{3}b\right]\left[\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right] - \left[\frac{5}{3}b\right]^3$$

$$= \frac{8}{27}a^3 - \frac{10}{3}ab\left[\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right] - \frac{125}{27}b^3$$

$$= \frac{8}{27}a^3 - \frac{20}{9}a^2b + \frac{50}{9}ab^2 - \frac{125}{27}b^3$$

6) $$\left(1+\frac{4}{3}c\right)^3 = (1)^3 + 3(1)\left(\frac{4}{3}c\right)\left(1+\frac{4}{3}c\right) + \left(\frac{4}{3}c\right)^3$$

$$= 1 + 4c\left(1+\frac{4}{3}c\right) + \frac{64}{27}c^3$$

$$= 1 + 4c + \frac{16}{3}C^2 + \frac{64}{27}C^3$$

उदा. 4.4 : सूत्रांचा वापर करून खालील संख्यांचे घन काढा.

1) 19 2) 101 3) 54 4) 47

उकल : 1) $19^3 = (20-1)^3$

$= 20^3 - 3 \times 20 \times 1\,(20-1) - 1^3$

$= 8000 - 60\,(20-1) - 1$

$= 8000 - 1200 + 60 - 1$

$= 6859$

2) $101^3 = (100+1)^3$

$= 100^3 + 3 \times 100 \times 1\,(100+1) + 1^3$

$= 1000000 + 300 \times 100 + 300 + 1$

$= 1030301$

3) $54^3 = (50+4)^3$

$= 50^3 + 3 \times 50 \times 4\,(50+4) + 4^3$

$= 125000 + 600\,(50+4) + 64$

$= 1,57,464$

4) $47^3 = (50-3)^3$

$= 50^3 - 3 \times 50 \times 3\ (50 - 3) - 3^3$

$= 125000 - 450\ (50 - 3) - 27$

$= 125000 - 22500 + 1350 - 27$

$= 1{,}03{,}823$

उदा. 4.5 : प्रत्यक्ष गुणाकार न करता खालील उदाहरणांची उत्तरे सांगा.

1) $(2a + 3b)\ (4a^2 - 6ab + 9b^2)$

2) $(3a - 2b)\ (9a^2 + 6ab + 4b^2)$

उकल : 1) $(2a + 3b)\ (4a^2 - 6ab + 9b^2)$

$= (2a + 3b)\ [(2a)^2 - (2a)\ (3b) + (3b)^2]$

$= (2a)^3 + (3b)^3$

$= 8a^3 + 27b^3$

2) $(3a - 2b)\ (9a^2 + 6ab + 4b^2)$

$= (3a - 2b)\ [(3a)^2 + (3a)\ (2b) + (2b)^2]$

$= (3a)^3 - (2b)^3$

$= 27a^3 - 8b^3$

उदा. 4.6 : सोपे रूप द्या.

1) $(3x - 2y)^2 + 3(3x - 2y)^2(3x + 2y) + 3\ (3x - 2y)\ (3x + 2y)^2 + (3x + 2y)^3$

2) $(2a - b)^3 + 3\ (2a - b)\ (2b - a)\ (a + b) + (2b - a)^3$

उकल : 1) $(3x - 2y)^2 + 3(3x - 2y)^2(3x + 2y) + 3\ (3x - 2y)\ (3x + 2y)^2 + (3x + 2y)^3$

$(3x - 2y) = a$ आणि $(3x + 2y) = b$ मानू

$\therefore$ दिलेला राशी $= a^3 + 3\ a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= (a + b)^3$

किंमती घालून,

$(3x - 2y + 3x + 2y)^3$

$= (6x)^3$

$= 216x^3$

2) $(2a - b)^3 + 3\ (2a - b)\ (2b - a)\ (a + b) + (2b - a)^3$

$(2a - b) = x$ आणि $(2b - a) = y$ मानू

$\therefore$ दिलेला राशी $= x^3 + 3\,xy\,(x + y) + y^3$

$= (x + y)^3$

किंमती घालून,

$= (2a - b + 2b - a)^3$

$= (a + b)^3$

$= a^3 + 3a^2\,b + 3ab^2 + b^3$

उदा. 4.7 सोपे रूप द्या.

1) $\dfrac{857 \times 857 \times 857 - 537 \times 537 \times 537}{857 \times 857 + 857 \times 537 + 537 \times 537}$

2) $\dfrac{674 \times 674 \times 674 + 326 \times 326 \times 326}{674 \times 674 - 674 \times 326 + 326 \times 326}$

उकल :

1) $\dfrac{857 \times 857 \times 857 - 537 \times 537 \times 537}{857 \times 857 + 857 \times 537 + 537 \times 537}$

वरील बहुपदी अशीही मांडता येईल.

$$= \frac{857^3 - 537^3}{857^2 + 857 \times 537 + 537^2}$$

$857 = a$ आणि $537 = b$ मानू

$\therefore$ दिलेला राशी $= \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$

$$= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a^2 + ab + b^2)}$$

$= a - b$

किंमती घालून,

$= 857 - 537$

$= 320$

2) $$\frac{674\times674\times674+326\times326\times326}{674\times674-674\times326+326\times326}$$

वरील बहुपदी अशीही मांडता येईल.

$$=\frac{674^3+326^3}{674^2-674\times326+326^2}$$

$$=\frac{(674+326)(674^2-674\times326+326^2)}{(674^2-674\times326+326^2)}$$

$= 674 + 326$

$= 1000$

आपली प्रगती तपासा 4.2

(1) खालील राशींचा विस्तार लिहा.

1) $(3x + 4y)^3$ 2) $(p - qr)^3$ 3) $\left(a+\frac{b}{3}\right)^3$

4) $\left(\frac{a}{3}-b\right)^3$ 5) $\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}b^2\right)^3$ 6) $\left(\frac{1}{2}a^2x^3-2b^3y^2\right)^3$

(2) सूत्रांचा वापर करून संख्यांचे घन मांडा.

1) 8 2) 12 3) 18 4) 23

5) 53 6) 48 7) 71 8) 69

9) 97 10) 99

(3) प्रत्यक्ष गुणाकार न करता खालील उदाहरणांची उत्तरे सांगा.

1) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$ 2) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

3) $(1 + x)(1 - x + x^2)$ 4) $(2y - 3z^2)(4y^2 + 6yz^2 + 9z^4)$

5) $(4x + 3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$ 6) $\left(3x-\frac{1}{7}y\right)^3\left(9x^2+\frac{3}{7}xy+\frac{1}{49}y^2\right)^3$

टिपा

(4) किंमती काढा.

1) जर $a + 2b = 10$ आणि $ab = 15$ तर, $a^3 + 8b^3$ ची किंमत काढा.

$[(a + 2b)^3 = a^3 + 8b^3 + 6ab\ (a + 2b) \Rightarrow a^3 + 8b^3 = (a + 2b)^3 - 6ab\ (a + 2b)]$

2) जर $x - y = 5$, आणि $xy = 66$ तर $x^3 - y^3$ ची किंमत काढा.

(5) 1) $4x - 5z = 16$ आणि $xz = 12$ असताना $64x^3 - 125\ t^2$ ची किंमत काढा.

तसेच 2) $4x - 5z = \frac{3}{5}$ आणि $xz = 6$ असताना $64x^3 - 125z^3$ ची किंमत काढा.

(6) सोपे रूप द्या.

1) $(2x + 5)^3 - (2x - 5)^3$

2) $(7x + 5y)^3 - (7x - 5y)^3 - 30y\ (7x + 5y)\ (7x - 5y)^3$

(टीप : $7x + 5y = a$ आणि $7x - 5y = b$ घ्या म्हणजे $a - b = 10y$ होईल)

3) $(3x + 2y\ )\ (9x^2 - 6xy + 4y^2) - (2x + 3y)\ (4x^2 - 6xy + 9y^2)]$

4) $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25\ ) - (5x + 1)\ (25x^2 - 5x + 1)$

(7) सोपे रूप द्या.

1) $\dfrac{857 \times 857 \times 857 + 125 \times 125 \times 125}{875 \times 875 - 875 \times 125 + 125 \times 125}$ 2) $\dfrac{678 \times 678 \times 678 - 234 \times 234 \times 234}{678 \times 678 + 678 \times 234 + 234 \times 234}$

4.3 बहुपदींचे अवय पाडणे (Factorization of Polynomials)

अंकगणितामध्ये $3 \times 4 = 12$ या गुणाकारात 3 आणि 4 हे 12 चे अवयव आहेत, असे आपण म्हणतो. बीजगणितामध्ये $(x + y)$ $(x - y) = x^2 - y^2$ या गुणाकारात $(x + y)$ आणि $(x - y)$ हे $(x^2 - y^2)$ अवयव आहेत असे आपण म्हणतो.

बहुपदीचे अवयव पाडणे म्हणजे दिलेली बहुपदी दोन किंवा अधिक बहुपदींचा गुणाकार आहे, हे दाखविणे होय. गुणाकारातील प्रत्येक बहुपदीला मूळ बहुपदीचा अवयव असे म्हणतात.

पूर्णांक सहगुणक असलेल्या बहुपदींचेच अवयव पाडणे ही आपली अवयव पाडण्याची मर्यादा आहे. या ठिकाणी आलेल्या गुणकातदेखील

पूर्णांक सहगुणकच असणे आवश्यक आहे. $2x^2 - y^2$ या प्रकारच्या बहुपदींचे अवयव पाडणे आपण विचारात घेणार नाही कारण या बहुपदीचे अवयव$(\sqrt{2}\,x + y)(\sqrt{2}\,x - y)$ हे पडतात व या अवयव बहुपदी पूर्णांक सहगुणक बहुपदी नाहीत.

दिलेल्या बहुपदीचे दोन किंवा अधिक पडलेले अवयव लहानात लहान कोटीचे असतील, त्या अवयवांचे अजून अवयव पडत नसतील आणि अवयवांचे पूर्णांक सहगुणकामध्ये 1 किंवा –1 यापेक्षा दुसरे समाईक अवयव नसतील तर दिलेल्या बहुपदींचे पूर्ण अवयव पडले आहेत, असे मानतात.

या व्याख्येनुसार $(x^2 - 4x)$ चे $x(x - 4)$ हे पूर्ण अवयव पडलेले आहे. या उलट $(16x^4 - 1)$ या बहुपदीचे $(4x^2 + 1)(4x^2 - 1)$ हे पूर्ण अवयव पडलेले नाहीत. कारण या अवयवांमधील $(4x^2 - 1)$ या बहुपदीचे $(2x + 1)(2x - 1)$ असे अवयव पडतात. म्हणून $(16x^4 - 1)$ या बहुपदीचे पूर्ण अवयव $(2x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 1)$ हे आहेत.

या पाठात शिकलेल्या सर्व सूत्रांचा वापर आणि अवयव पाडण्यासाठी करणार आहोत. बहुपदींचे अवयव पाडण्याच्या निरनिराळ्या पद्धती आपण उदाहरणांद्वारे समजावून घेऊ.

1. वितरणाचा नियम वापरून अवयव पाडणे (Factorization by Distributive Property)

उदा. 4.8 : अवयव पाडा.

1) $10a - 25$ 2) $x^2y^3 + x^3y^2$

3) $5ab(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2)$ 4) $a(b - c)^2 + b(b - c)$

उकल :

1) $10a - 25 = 5 \times 2a - 5 \times 5$

$= 5(2a - 5)$

(दोन्ही पदांमधील समाईक अवयव 5)

$\therefore$ $10a - 25$ चे $5(2a - 5)$ हे गुणक आहेत.

2) $x^2y^3 + x^3y^2$ या बहुपदीमद्ये दोन्ही पदांमध्ये x^2y^2 ही उच्चतम कोटी असलेली पदे सामाईक आहेत.

$\therefore$ $x^2y^3 + x^3y^2 = x^2y^2(y + x)$

$\therefore$ $x, x^2, y, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2$ आणि $(y + x)$ हे $x^2y^3 + x^3y^2$ या बहुपदींचे अवयव आहेत.

3) $5ab(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2)$

या बहुपदीमध्ये $ax^2 + y^2$ही बहुपदी समाईक आहे.

$\therefore$ $5ab(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2) = (ax^2 + y^2)(5ab - 6mn)$

4) $a(b - c)^2 + b(b - c) = (b - c) \times [a(b - c)] + (b - c) \times b$

$= (b - c) \times [a(b - c) + b]$

$= (b - c) \times [ab - ac + b]$

2) दोन वर्गाच्या वजाबाकीचे सूत्र वापरून अवयव पाडणे. [Factorization Involving Difference of Two square]

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ हे आपणास माहिती आहेच.

म्हणून $(x + y)\ (x - y)$ हे $x^2 - y^2$ चे अवयव आहेत.

उदा. 4.9 : अवयव पाडा.

1) $9x^2 - 16y^2$ 2) $x^4 - 81y^4$

3) $a^4 - (2b - 3c)^2$ 4) $x^2 - y^2 + 6y - 9$

उकल : 1) $9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2$ दोन वर्गांची वजाबाकी

$= (3x + 4y)\ (3x - 4y)$

2) $x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)^2$

$= (x^2 + 9y^2)(x^2 - 9y^2)$

परंतु $x^2 - 9y^2 = (x)^2 - (3y)^2$ ही दोन वर्गांची वजाबाकी आहे.

$\therefore\ x^4 - 81y^4 = (x^2 + 9y^2)[(x)^2 - (3y)^2]$

$= (x^2 + 9y^2)\ (x + 3y)\ (x - 3y)$

3) $a^4 - (2b - 3c)^2 = (a^2)^2 - (2b - 3c)^2$

$= [a^2 + (2b - 3c)][a^2 - (2b - 3c)]$

$= (a^2 + 2b - 3c)\ (a^2 - 2b + 3c)$

4) $x^2 - y^2 + 6y - 9 = x^2 - (y^2 - 6y + 9)$ ही पायरी ध्यानात घ्या.

$= (x)^2 - [(y)^2 - 2 \times y \times 3 + (3)^2]$

$= (x)^2 - (y - 3)^2$

$= [x + (y + 3)]\ [x - (y - 3)]$

$= [x + y - 3][x - y + 3]$

3. पूर्ण वर्गाच्या त्रिपदीचे अवयव पाडणे (Factorization of a Perfect Square Trinomial)

उदा. 4.10 : अवयव पाडा.

1) $9x^2 + 24xy + 16y^2$ 2) $x^6 - 8x^3 + 16$

उकल : 1) $9x^2 + 24xy + 16y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= (3x + 4y)^2$

$= (3x + 4y)\ (3x + 4y)$

टिपा

या बहुपदीचे दोन्ही अवयव समान म्हणजे प्रत्येकी $(3x + 4y)$ हेच आहेत.

2) $x^6 - 8x^3 + 16 \quad = (x^3)^2 - 2(x^3)(4) + (4)^2$

$= (x^3 - 4)^2$

$= (x^3 - 4)\,(x^3 - 4)$

या बहुपदीचे दोन्ही अवयव समान म्हणजे प्रत्येकी $(x^3 - 4)$आहेत.

4. बहुपदीचे रूपांतर दोन वर्गांच्या वजाबाकीच्या स्वरूपात करून अवयव पाडणे

(Factorization of a Polynomial Reducible to the Difference of two squares)

उदा. 4.9 : अवयव पाडा.

1) $x^4 + 4y^4$ 2) $x^4 + x^2 + 1$

उकल : 1) $x^4 + 4y^4 \quad = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2\,(x^2)\,(2y^2) - 2(x^2)\,(2y^2)$

[$(x^2)\,(2y^2)$हे पद मिळविले आणि वजा केले]

$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$

$= (x^2 + 2y^2 + 2xy)\,(x^2 + 2y^2 - 2xy)$

2) $x^4 + x^2 + 1 \quad = (x^2)^2 + (1)^2 + 2x^2 - x^2$

[x^2हे पद मिळविले आणि वजा केले]

$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2$

$= (x^2 + 1 + x)\,(x^2 + 1 - x)$

$= (x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1)$

आपली प्रगती तपासा 4.3

(1) $10xy - 15\,xz$ (2) $abc^2 - ab^2c$

(3) $6p^2 - 15pq + 27q^2$ (4) $a^2\,(b - c) + b\,(c - b)$

(5) $2a\,(4x - y)^3 - b(4x - y)^2$ (6) $x\,(x + y)^3 - 3xy\,(x + y)$

(7) $100 - 25\,p^2$ (8) $1 - 256\,y^2$

(9) $(2x + 1)^2 - 9x^2$ (10) $(a^2 + bc)^2 - a^2\,(b + c)^2$

(11) $25x^2 - 10x + 1 - 36y^2$ (12) $49x^2 - 1 - 14xy + y^2$

(13) $m^2 + 14\,m + 49$ (14) $4x^2 - 4x + 1$

टिपा

(15) $36a^2 + 25 + 60a$ (16) $x^6 - 8x^3 + 16$

(17) $a^8 - 47a^4 + 1$ (18) $4a^4 + 81b^4$

(19) $x^4 + 4$ (20) $9a^4 - a^2 + 16$

(21) x पुढील उदाहरणातील n च्या किंमती काढा.

(i) $6n = 23 \times 23 - 17 \times 17$ (ii) $536 \times 536 - 36 \times 36 = 5n$

5. पूर्ण घन संख्येचे अवयव (Factorization of perfect cube Polynomials)

उदा. 4.12 : अवयव पाडा.

1) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ 2) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

उकल : 1) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

$= (x)^3 + 3x^2 (2y) + 3x (2y)^2 + (2y)^3$

$= (x + 2y)^3$

वहुपदीचे तीनही अवयव समान म्हणजे प्रत्येकी $(x + 2y)$ हे आहेत.

2) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

$= (x^2)^3 - 3x^2y^2 (x^2 - y^2) - (y^2)^3$

$= (x^2 - y^2)^3$

$= [(x + y) (x - y)]^3$ $[\therefore x^2 - y^2 = (x + y) (x - y)]$

$= (x + y)^3 (x - y)^3$

6. पूर्ण घन असलेल्या पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी असलेल्या बहुपदींचे अवय पाडणे.

(Factorization of Polynomials Involving sum or Difference of two cubes)

आपणास माहीतच आहे की,

$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^2 + y^2$

$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^2 - y^2$

$\therefore$ $x^3 + y^3$ चे अवयव $x + y$ आणि $x^2 - xy + y^2$

आणि $x^3 - y^3$ अवयव $x - y$ आणि $x^2 + xy + y^2$

आता खालील उदाहरणे लक्षात घ्या.

उदा. 4.13 : अवयव पाडा.

1) $64a^3 + 27b^3$ 2) $8x^3 - 125y^3$

3) $8(x + 2y)^3 - 343$ 4) $a^4 - a^{13}$

उकल :

1) $64a^3 + 27b^3 = (4a)^3 + (3b)^3$

$= (4a + 3b)\,[(4a)^2 - (4a)(3b) + (3b)^2]$

$= (4a + 3b)\,(16a^2 - 12ab + 9b^2)$

2) $8x^3 - 125y^3 = (2x)^3 - (5y)^3$

$= (2x - 5y)\,[(2x)^2 + (2x)(5y) + (5y)^2]$

$= (2x - 5y)\,(4x^2 + 10xy + 25\,y^2)$

3) $8(x + 2y)^3 - 343 = [2(x + 2y)]^3 - (7)^3$

$= [2\,(x + 2y) - 7]\,[2^2\,(x + 2y)^2 + 2\,(x + 2y) + 7^2]$

$= (2x + 4y - 7)(4x^2 + 16xy + 16y^2 + 14x + 28y + 49)$

4) $a^4 - a^{13} = a^4\,(1 - a^9)$ (a^4 ही दोन्ही पदांमधील समाईक संख्या)

$= a^4\,[(1)^3 - (a^3)^3]$

$= a^4\,(1 - a^3)\,(1 + a^3 + a^6)$

$= a^4\,(1 - a)\,(1 + a + a^2)\,(1 + a^3 + a^6)$

(ज्याअर्थी $1 - a^3 = (1 - a)(1 + a + a^2)$]

आपली प्रगती तपासा 4.4

अवयव पाडा.

(1) $a^3 + 216b^3$ (2) $a^3 - 343$

(3) $x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3$ (4) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

(5) $8x^3 - 125y^3 - 60x^2y + 150xy^2$ (6) $64k^3 - 144k^2 + 108\,k - 27$

(7) $729x^6 - 8$ (8) $x^2 + x^2y^6$

(9) $16a^7 - 54ab^6$ (10) $27b^3 - a^3 - 3a^2 - 3a - 1$

(11) $(2a - 3b)^3 + 64\,c^3$ (12) $64x^3 - (2y - 1)^3$

7. त्रिपदीच्या मधल्या पदाची फोड करून अवयव पाडणे.

(Factorizing trinomials by splitting the Middle term)

आपल्याला माहितच आहे की,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$$

$$= 1.x^2 + (a + b)\,x + ab.$$

आणि $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)\,x + bd$

सर्वसाधारणपणे उजव्या बाजूला दिलेल्या बहुपदी $Ax^2 + Bx + C$ या स्वरूपात दिलेली असते. या बहुपदीचे अवयव पाडण्यासाठी आपण x चा सहगुणक (A) आणि तिसरे पद (C) यांचा गुणाकार करतो. आणि या गुणाकारांचे असे दोन अवयव पाडतो, की त्यांची बैजिक बेरीज मधल्या पदाच्या सहगुणकाएवढी (B) यावी. थोडक्यात आपण AC चे असे दोन अवयव पाडू की त्यांची बैजिक बेरीज B यावी.

खालील उदाहरणांमुळे अवयव पाडण्याचीही पद्धती अधिक स्पष्ट होईल.

उदा. 4.14 अवयव पाडा.

1) $x^2 + 3x + 2$ 2) $x^2 - 10xy + 24y^2$

3) $5x^2 + 13x - 6$ 4) $3x^2 - x - 2$

उकल : 1) $x^2 + 3x + 2$

या बहुपदी मध्ये $A = 1, B = 3$ आणि $C = 2$.

2 चे असे अवयव पाडू, की ज्याची बैजिक बेरीज 3 येईल.

$\therefore 2 \times 1 = 2$

$2 + 1 = 3$

(AC = 2 चे अवयव 2 आणि 1 आहेत. याची बैजिक बेरीज 3 आहे.)

आपणास ही बहुपदी खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$\therefore x^2 + (1 + 2)\,x + 2$

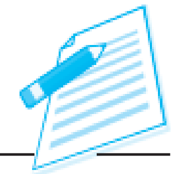
$= x^2 + 1x + 2x + 2$

$= x\,(x + 1) + 2\,(x + 1)$

$= (x + 1)\,(x + 2)$

2) $x^2 - 10xy + 24y^2$

या बहुपदीमध्ये $AC = 24\,y^2$ आणि $B = -10y$ ज्याची बैजिक बेरीज -10 आणि गुणाकार $(1 \times 24 = 24)$ येईल असे अवयव म्हणजे -6 आणि -4 हे होत.



$\therefore$ आपणास ही बहुपदी खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$\therefore x^2 - 4xy - 6xy + 24y^2$

$= x(x - 4y) - 6y(x - 4y)$

$= (x - 4y)(x - 6y)$

3) $5x^2 + 13x - 6$

या बहुपदीमध्ये $AC = 5 \times (-6) = -30$ आणि $B = 13$ आहे.

$\therefore$ -30 चे दोन अवयव 15 आणि -2 हे आहेत. कारण यांची बैजिक बेरीज $+13$ (B मधल्या पदाइतकी) आहे.

$\therefore$ आपणास ही बहुपदी खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$\therefore 5x^2 + 15x - 2x - 6$

$= 5x(x + 3) - 2(x + 3)$

$= (x + 3)(5x - 2)$

4) $3x^2 - x - 2$

या बहुपदीमध्ये $AC = 3 \times -2 = -6$ आणि $B = -1$ आहे.

-6 चे दोन अवयव -3 आणि 2 हे आहेत. यांची बैजिक बेरीज -1 आहे.

$\therefore$ आपणास ही बहुपदी खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$\therefore 3x^2 - 3x + 2x - 2$

$= 3x(x - 1) + 2(x - 1)$

$= (x - 1)(3x + 2)$

आपली प्रगती तपासा 4.5

अवयव पाडा.

(1) $x^2 + 11x + 24$ (2) $x^2 - 15xy + 54x$

(3) $2x^2 + 5x - 3$ (4) $6x^2 - 10xy - 4y^2$

(5) $2x^4 - x^2 - 1$ (6) $x^2 + 13xy - 30y^2$

(7) $2x^2 + 11x + 14$ (8) $10y^2 + 11y - 6$

(9) $2x^2 - x - 1$ (10) $(m - 1)(1 - m) + m + 109$

(11) $(2a - b)^2 - (2a - b) - 30$ [टीप $(2a - b) = x$ माना.]

(12) $(2x + 3y)^2 - 2(2x + 3y)(3x - 2y) - 3(3x - 2y)^2$

टीप $2x + 3y = a$ आणि $3x - 2y = b$ माना

4.4 बहुपदींचा म.सा.वि. आणि ल.सा.वि. [HCF and LCM of Polynomials]

(1) बहुपदींचा म.सा.वि. (महत्तम साधारण विभाजक)

अंकगणितामध्ये नैसर्गिक संख्यांचा म.सा.वि. कसा काढतात हे आपणास माहिती आहेच.

म.सा.वि. म्हणजे अशी मोठ्यात मोठी संख्या की जी दिलेल्या प्रत्येक संख्येचा अवयव असेल.

उदा. 8 आणि 12 यांचा म.सा.वि. 4 आहे. कारण 8 आणि 12 यांचे सामाईक अवयव 1, 2 आणि 4 आहेत. आणि 4 ही त्यांच्यामधील सर्वात मोठी संख्या आहे.

त्याचप्रमाणे बीजगणितामध्येदेखील दिलेल्या दोन किंवा अधिक बहुपदींचा म.सा.वि. म्हणजे दिलेल्या बहुपदींमध्ये समाईक असणाऱ्या पदांचा मोठ्यात मोठा घात व समाईक असणाऱ्या सहगुणकातील मोठ्यात मोठी संख्या यांचा गुणाकार होय.

उदा. $4(x + 1)^2$ आणि $6(x + 1)^3$ चा म.सा.वि. $2(x + 1)^2$ आहे.

एकपदींचा म.सा.वि. म्हणजे समाईक असणाऱ्या सहगुणकातील मोठ्यात मोठी संख्या व समाईक असणाऱ्या चलांचा मोठ्यात मोठा घात यांचा गुणाकार होय.

उदा. $12x^2y^3$, $18xy^4$ आणि $24x^3y^5$ यांचा म.सा.वि. $6xy^3$ आहे. कारण 12, 18,24 यांचा म.सा.वि. 6 आणि समाईक असणाऱ्या चलांचा मोठ्यात मोठा घात x आणि y^3 हा आहे आणि यांचा गुणाकार म्हणजे म.सा.वि. $6xy^3$ आहे.

आपा आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 4.15 : म.सा.वि. काढा.

1) $4x^2y$ आणि x^3y^2 2) $(x - 2)^3(2x - 3)$ आणि $(x - 2)^2(x - 3)^3$

1. सहगुणक 4 आणि 1 यांचा मसावि 1 आहे.

दिलेल्या पदामध्ये x हा अवयव कमीतकमी 2 वेळा आणि y हा अवयव कमीत कमी 1 वेळा येतो.

$\therefore$ मसावि $= 1 \times x^2 \times y = x^2y$.

2) $(x - 2)^3(2x - 3)$ आणि $(x - 2)^2(x - 3)^3$ सहगुणक 1 आणि 1 यांचा मसावि 1 आहे.

दिलेल्या बहुपदींमध्ये ($x - 2$) हा अवयव कमीत कमी 2 वेळा आणि ($2x - 3$) हा अवयव कमीत कमी 1 वेळा येतो.

$\therefore$ दिलेल्या बहुपदींचा मसावि =

$1 \times (x - 2)^2 \times (2x - 3) = (x - 2)^2 (2x - 3)$

4.15 (2) या उदाहरणावरून आपल्या असे लक्षात येते की, ज्या बहुपदींचे अवयव सहजपणे पडतात, अशा बहुपदी आपण अवयवांच्या गुणाकाराच्या स्वरूपात मांडतो आणि अशा बहुपदींचा म.सा.वि. म्हणजे सर्व बहुपदींचा सहगुणकांचा म.सा.वि. आणि सर्व बहुपदींमध्ये समाईक असणाऱ्या (कंसाचा) गुणकांचा मोठ्यात मोठा घात यांचा गुणाकार होय.

अधिक खुलाशासाठी उदा. क्र. 4.16 बारकाईने अभ्यासा.

उदा. 4.16 : म.सा.वि. काढा.

1) $x^2 - 4$ आणि $x^2 + 4x + 4$

2) $4x^4 - 16x^3 + 12x^2$ आणि $6x^3 + 6x^2 - 72x$

उकल :

1) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

सहगुणकांचा म.सा.वि. = 1

बहुपदींचा म.सा.वि. $= (x + 2)^1 = x + 2$

$\therefore$ म.सा.वि. $= x + 2$

2) $4x^2 - 16x^3 + 12x^2 = 4x^2 (x^2 - 4x + 3)$

$= 4x^2 (x - 1)(x - 3)$

$6x^3 + 6x^2 - 72x = 6x (x^2 + x - 12)$

$= 6x (x + 4)(x - 3)$

$\therefore$ म.सा.वि. $= 2x (x - 3)$ (सहगुणकांचा मसावि 2 आहे.)

$= 2x^2 - 6x$

2. बहुपदींचा ल.सा.वि. (लघुत्तम साधारण विभाज्य)

मसावि प्रमणेच अंकगणितामध्ये नैसर्गिक संख्याचा लसावि कसा काढतात, हे आपणास माहिती आहेच.

लसावि म्हणजे अशी लहानात लहान संख्या की जी दिलेल्या प्रत्येक संख्येचा गुणक असेल.

उदाहरणार्थ : 8 आणि 12 या संख्यांचा लसावि 24 आहे.

कारण 8 आणि 12 यांच्या गुणकांमध्ये 24 ही सर्वात लहान समाईक संख्या आहे.

8 चे गुणक	=	$8, 16, \underline{24}, 32, 40, \underline{48}, 56, 64, \underline{72}, 80, \ldots\ldots$
12 चे गुणक	=	$12, \underline{24}, 36, \underline{48}, 60, \underline{72}, 84, 96, \ldots\ldots$
8 आणि 12 चे समाईक गुणक	=	$24, 48, 72, \ldots\ldots$

अंकगणिताप्रमाणेच बीजगतितदेखील दोन किंवा अधिक बहुपदींचा लसावि म्हणजे सर्वात लहान अंकगुणक व सर्वात कमी कोटी असलेली बहुपदी यांचा गुणाकार असतो. अंकगुणक आणि सर्वात कमी कोटी असलेली बहुपदी यांचा गुणाकार हा सर्व संगत बहुपदींचा गुणक असतो.

उदा. $4(x+1)^2$ आणि $6(x+1)^3$ यांचा लसावि $12(x+1)^3$ हा आहे.

एकपदींचा लसावि म्हणजे एकपदींच्या सहगुणकांचा लसावि आणि एकपदींमधील सर्व चलांच्या पदांचा मोठ्यात मोठा घात यांचा गुणाकार होय.

उदाहरणार्थ $12x^2y^2z$, $18x^2yz$ यांचा लसावि $36x^2y^2z$ हा आहे. कारण 12 आणि 18 या सहगुणकांचा लसावि 36 आणि x,y,z या चलांचा मोठ्यात मोठा घातांक अनुक्रमे x^2, y^2 आणि z हा आहे आणि यांचा गुणाकार म्हणजेच लसावि $36x^2y^2z$ हा आहे.

आता आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 4.17 : लसावि काढा.

1) $4x^2y$ आणि x^3y^2 2) $(x-2)^3(2x-3)$ आणि $(x-2)^3(2x-3)^3$

उकल :

1) $4x^2y$ आणि x^3y^2

सहगुणक 4 आणि 1 यांचा लसावि = 4

x चा मोठ्यात मोठा घातांक x^3 आणि

y चा मोठ्यात मोठा घातांक y^2

$\therefore$ लसावि $= 4x^3y^2$

2) $(x-2)^3(2x-3)$ आणि $(x-2)^3(2x-3)^3$

अंकसहगुणक 1 आणि 1 यांचा लसावि 1 येईल.

दिलेल्या बहुपदींमध्ये $(x-2)$या बहुपदीचा मोठ्यात मोठा घातांक $(x-2)^3$

आणि $(2x-3)$ मोठ्यात मोठा घातांक $(2x-3)^3$ आहे.

$\therefore$ दिलेल्या बहुपदींचा लसावि. $= 1 \times (x-2)^3 \times (2x-3)^3$

4.17 2) या उदाहरणावरून आपल्या असे लक्षात येईल की, ज्या बहुपदींचे अवयव सहजपणे पडतात अशा बहुपदी आपण अवयवांच्या गुणाकारांच्या स्वरूपात मांडतो आणि अशा बहुपदींचा लसावि म्हणजे अंकसहगुणकांचा लसावि आणि उरलेल्या सर्व बहुपदींचा मोठात मोठा घातांक यांचा गुणाकार होय.

अधिक खुलाशासाठी उदा. 4.18 बारकाईने अभ्यासा

उदा. 4.18: लसावि काढा.

1) $(x-2)(x^2-3x+2)$ आणि x^2-5x+6

2) $8(x^3-27)$ आणि $12(x^5+27x^2)$

उकल : 1) $(x-2)(x^2-3x+2)$ आणि x^2-5x+6

$(x-2)(x^2-3x+2) = (x-2)(x-2)(x-1)$

$= (x-2)^2(x-1)$

$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

अंकसहगुणकांचा लसावि $= 1$

उरलेल्या पदांचा लसावि $= (x-2)^2(x-1)(x-3)$

$\therefore$ दिलेल्या बहुपदींचा लसावि $= (x-2)^2(x-1)(x-3)$

2) $8(x^3-27)$ आणि $12(x^5+27x^2)$

$8(x^3-27) = 8(x-3)(x^2+3x+9)$

$12(x^5+27x^2) = 12x^2(x^3+27)$

$= 12x^2(x+3)(x^2-3x+9)$

अंकसहगुणक 8 आणि 12 यांचा लसावि $= 24$

उरलेल्या पदांचा लसावि $= x^2(x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

दिलेल्या वह ुपदींचा लसावि. $= 24x^2(x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

आपली प्रगती तपासा 4.6

1. खालील वहुपदींचा मसावि काढा.

1) $27x^4y^2$ आणि $3xy^3$

2) $48y^7x^9$ आणि $12y^3x^5$

3) $(x+1)^3$ आणि $(x+1)^2(x-1)$

4) x^2+4x+4 आणि $x+2$

5) $18\,(x+2)^3$ आणि $24\,(x^3+8)$

6) $(x+1)^2(x+5)^3$ आणि $x^2+10x+25$

7) $(2x-5)^2(x+4)^3$ आणि $(2x-5)^3(x-4)$

8) x^2-1 आणि x^4-1

9) x^3-y^3 आणि x^2-y^2

10) $6\,(x^2-3x+2)$ आणि $18\,(x^2-4x+3)$

2. खालील बहुपदींचा लसावि काढा.

1) $25x^3y^2$ आणि $15xy$

2) $30xy^2$ आणि $48x^3y^4$

3) $(x+1)^2$ आणि $(x+1)^2\,(x-1)$

4) x^2+4x+4 आणि $x+2$

5) $18\,(x+2)^3$ आणि $24\,(x^3+8)$

6) $(x+1)^2(x+5)^3$ आणि $x^2+10x+25$

7) $(2x-5)^2\,(x+4)^2$ आणि $(2x-5)^3(x-4)$

8) x^2-1 आणि x^4-1

9) x^3-y^3 आणि x^2-y^2

10) $6\,(x^2-3x+2)$ आणि $18\,(x^2-4x+3)$

4.5 परिमेय राशी (Rational Expressions)

आपल्याला पूर्णांक संख्या आणि परिमेय संख्या यांची माहिती आहेच.

p आणि q या पूर्णांक संख्या आणि $q \neq 0$, असे असताना जी संख्या p/q या स्वरूपात सांगता येते, त्या संख्येस परिमेय संख्या असे म्हणतात.

P आणि Q या शून्येत्तर बहुपदी असताना जी राशी P/Q या स्वरूपात सांगता येते, त्या राशीस परिमेय राशी म्हणतात.

खाली एक किंवा दोन चलातील परिमेय राशी दिलेल्या आहेत.

$$\frac{x+1}{x-1},\ \frac{x^2-3x+5}{x^2-5},\ \frac{\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{5}{6}}{a+b},\ \frac{x^2+\sqrt{2}y^2}{\sqrt{3}x-y}$$

टीप :

(1) x^2+1 ही बहुपदी परिमेय राशी आहे, कारण ही बहुपदी $\frac{x^2+1}{1}$ या स्वरूपात लिहिता येते. छेदस्थानी असलेला स्थिरांक 1 ही शून्य कोटीची बहुपदी आहे, हे आपणास माहीत आहेच.

(2) बहुपदी 7 हीसुद्धा परिमेय राशी आहे. कारण ती आपणास $\frac{7}{1}$ अशी लिहिता येते. 7 आणि 1 या शून्य कोटीच्या बहुपदी आहेत.

(3) परिमेय राशी ही बहुपदी असलीच पाहिजे असे नाही. उदा. $\frac{1}{x}$ $= x^{-1}$) ही बहुपदी नाही. परंतु परिमेय राशी आहे. याउलट प्रत्येक बहुपदी ही परिमेय राशी असते.

$$\frac{\sqrt{x}+2}{1-x},\ x^2+2\sqrt{x}\ +3,\ \frac{a^{2/3}-\frac{1}{b}}{a^2+ab+b^2}$$

या परिमेय राशी आहेत.

आपली प्रगती तपासा 4.7

(1) खालील बैजिक राशींपैकी कोणत्या राशी परिमेय राशी आहेत, ते सांगा.

1) $\frac{2x-3}{4x-1}$ 2) $\frac{8}{x^2+y^2}$

3) $\frac{2\sqrt{3}x^2+\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ 4) $\frac{2x^2-\sqrt{x}+3}{6x}$

5) $200+\sqrt{11}$ 6) $\left[a+\frac{1}{b}\right]\div b^{1/3}$

7) $y^3+3y^2(y+z)+z^3$ 8) $5\div(a+3b)$

(2) प्रत्येकाची दोन उदाहरणे सांगा.

1) एकपदीय परिमेय राशी

2) द्विपदीय परिमेय राशी

3) ज्या परिमेय राशीचा अंश द्विपदी आणि छेद त्रिपदी आहे, अशी राशी

4) ज्या परिमेय राशीचा अंश स्थिरपदी आणि छेद वर्ग बहुपदी आहे, अशी राशी

5) ज्या परिमेय राशीमध्ये दोन चलपदे आहेत आणि जिचा अंश तिसऱ्या कोटीची बहुपदी आणि छेद पाचव्या कोटीची बहुपदी आहे, अशी राशी

6) अशी राशी की बैजिक राशी आहे, परंतु परिमेय राशी नाही.

4.6 परिमेय राशींवरील क्रिया (Operations on Rational Expressions)

गणितातील चार मूलभूत प्रक्रिया आपण ज्या पद्धतीने परिमेय संख्यांवर करतो. त्याच पद्धतीने त्याच प्रक्रिया आपण परिमेय राशींवरदेखील करू शकतो.

1. परिमेय राशींमधील बेरीज आणि वजाबाकी :

परिमेय राशींमधील बेरीज ही परिमेय संख्यांमधील बेरजेप्रमाणेच असते. त्याची काही उदाहरणे पाहू. परिमेय संख्या आणि परिमेय राशी यांच्यामध्ये वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या प्रक्रियांमध्येसुद्धा साम्य असते, हे लक्षात घ्या.

उदा. 4.19 : बेरीज करा.

1) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$ 2) $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}$

उकल :

1) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8} = \frac{5\times4+3\times3}{24}$ 6 आणि 8 यांचा लसावि.

$= \frac{20+9}{24}$

$= \frac{29}{24}$

2) $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}$

$= \frac{(2x+1)(x+1)+(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$ (x + 1) आणि =(x – 1) यांचा लसावि.

$= \frac{(2x^2+2x+x+1)+(x^2-x+2x-2)}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{2x^2+3x+1+x^2+x-2}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{3x^2+4x-1}{x^2-1}$

उदा. 4.20 : $\frac{3x-2}{3x+1}$ मधून $\frac{x-1}{x+1}$ वजा करा.

उकल : $\frac{3x-2}{3x+1}-\frac{x-1}{x+1}$

$= \frac{(x+1)(3x-2)-(x-1)(3x+1)}{(3x+1)(x+1)}$

$= \frac{(3x^2-2x+3x-2)-(3x^2+x-3x-1)}{(3x+1)(x+1)}$

$$= \frac{(3x^2 + x - 2) - (3x^2 - 2x - 1)}{(3x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{3x^2 + x - 2 - 3x^2 + 2x + 1}{(3x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{3x - 1}{(3x+1)(x+1)}$$

टीप : दोन परिमेय राशींची बेरीज आणि वजाबाकी करून येणारी राशीदेखील परिमेय राशीच असते.

ज्या अर्थी दोन परिमेय राशींची बेरीज आणि वजाबाकी परिमेय राशीच असते आणि x व $\frac{1}{x}$ या परिमेय राशी आहे, त्याअर्थी

$x + \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ आणि $x - \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ यादेखील परिमेय राशींच होतील.

त्याचप्रमाणे $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x^3 - \frac{1}{x^3}$

या देखील परिमेय राशीच आहेत.

$x + \frac{1}{x}$ किंवा $x - \frac{1}{x}$ या राशींची किंमत दिली असता.

आपण $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ या राशींच्या किंमती काढू शकतो. काही वेळा या उलटही प्रक्रिया आपण करू शकतो.

खालील उदाहरणांकडे बारकाईने लक्ष द्या.

उदा. 4.21 : किंमत काढा.

1) जर $x - \frac{1}{x} = 1$, तर $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

2) जर $x + \frac{1}{x} = 4$, तर $x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

3) जर $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$, तर $x - \frac{1}{x} = ?$

4) जर $x + \frac{1}{x} = 3$, तर $x^3 + \frac{1}{x^3} = ?$

5) जर $x - \frac{1}{x} = 5$, तर $x^3 - \frac{1}{x^3} = ?$

उकल : 1) जर $x - \frac{1}{x} = 1$, तर $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

$$x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 + 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

2) जर $x + \frac{1}{x} = 4$, तर $x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (4)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (14)^2$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 196$$

$$\Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 196 - 2$$

$$\therefore x^4 + \frac{1}{x^4} = 194$$

3) जर $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$, तर $x - \frac{1}{x} = ?$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$$

$$\Rightarrow (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 2 = 119 + 2$$

$$\Rightarrow (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 2 = 119 + 2 = 121$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2 = (11)^2$$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$ (x^2 आणि $\frac{1}{x^2}$ ही धन पदे आहेत.)

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 11 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 9$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (3)^2$$

$$x + \frac{1}{x} = \pm 3$$

4) जर $x + \frac{1}{x} = 3$, तर $x^3 + \frac{1}{x^3} = ?$

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (3)^3$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} \times 3 \times x + \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times (3) = 27$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 = 27$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

5) जर $x - \frac{1}{x} = 5$, तर $x^3 - \frac{1}{x^3} = ?$

$$x - \frac{1}{x} = 5$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = (5)^3$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \times x \times \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 125$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3(5) = 125$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} - 15 = 125$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = 140$$

आपली प्रगती तपासा 4.8

1. खालील बैजीक राशींची बेरीज करा.

1) $\frac{x^2+1}{x-2}$ आणि $\frac{x^2-1}{x-2}$ 2) $\frac{x+2}{x+3}$ आणि $\frac{x-1}{x-2}$

3) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ आणि $\dfrac{1}{x+1}$ 4) $\dfrac{3x+2}{x^2-16}$ आणि $\dfrac{x-5}{(x+4)^2}$

5) $\dfrac{x-2}{x+3}$ आणि $\dfrac{x+2}{x+3}$ 6) $\dfrac{x+2}{x-2}$ आणि $\dfrac{x-2}{x+2}$

7) $\dfrac{x+1}{x+2}$ आणि $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 8) $\dfrac{3\sqrt{2}x+1}{3x^2}$ आणि $\dfrac{-2\sqrt{2}x+1}{2x^2}$

2. वजावाकी करा.

1) $\dfrac{x+4}{x+2}$ मधून $\dfrac{x-1}{x-2}$ 2) $\dfrac{2x+1}{2x-1}$ मधून $\dfrac{2x-1}{2x+1}$

3) x मधून $\dfrac{1}{x}$ 4) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ मधून $\dfrac{2}{x}$

5) $\dfrac{2x^2+3}{x-4}$ मधून $\dfrac{x^2+1}{x-4}$ 6) $\dfrac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$ मधून $\dfrac{1}{x^2+2}$

7) $\dfrac{x-2}{(x+3)^2}$ मधून $\dfrac{x+2}{2(x^2-9)}$ 8) $\dfrac{4x}{x^2-1}$ मधून $\dfrac{x+1}{x-1}$

3. किंमत काढा.

1) जर $a+\dfrac{1}{a}=2$, तर $a^2+\dfrac{1}{a^2}=?$ 2) जर $a-\dfrac{1}{a}=2$, तर $a^2+\dfrac{1}{a^2}=?$

3) जर $a+\dfrac{1}{a}=2$, तर $a^3+\dfrac{1}{a^3}=?$ 4) जर $a+\dfrac{1}{a}=5$, तर $a^3+\dfrac{1}{a^3}=?$

5) जर $a-\dfrac{1}{a}=\sqrt{5}$, तर $a^3-\dfrac{1}{a^3}=?$ 6) जर $2a+\dfrac{1}{3a}=5$, तर $8a^3+\dfrac{1}{27a^3}=?$

7) जर $a+\dfrac{1}{a}=\sqrt{3}$, तर $a^3+\dfrac{1}{a^3}=?$ 8) जर $a^2+\dfrac{1}{a^2}=7 (a>0)$, तर $a^3+\dfrac{1}{a^3}=?$

9) जर $a^4+\dfrac{1}{a^4}=727$, तर $a-\dfrac{1}{a}=?$ 10) जर $a^4+\dfrac{1}{a^4}=34 \ (a>0)$, तर $a^3-\dfrac{1}{a^3}=?$

2. परिमेय राशींचा गुणाकार आणि भागाकार

दोन परिमेय संख्यांचा गुणाकार, समजा $\dfrac{2}{3}$ आणि $\dfrac{5}{7}$, $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{2\times5}{3\times7}=\dfrac{10}{21}$ या पद्धतीने करतात.

त्याचप्रमाणे दोन परिमेय राशींचा गुणाकार, समजा $\dfrac{P}{Q}$ आणि $\dfrac{R}{S}$

[P, Q, R, S या बहुपदी आणि $Q, S \neq 0$) $\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$ या पद्धतीने करतात.

दोन परिमेय राशींचा गुणाकार करून मिळणारा राशीदेखील परिमेय राशीच असतो.

उदा. 4.22 : गुणाकार करा.

1) $\frac{5x+3}{5x-1} \times \frac{2x-1}{x+1}$. 2) $\frac{2x+1}{x-1} \times \frac{x-1}{x+3}$

3) $\frac{x^2-7x+10}{(x-4)^2} \times \frac{x^2-7x+12}{x-5}$

उकल : 1) $\frac{5x+3}{5x-1} \times \frac{2x-1}{x+1}$. $= \frac{(5x+3)(2x-1)}{(5x-1)(x+1)}$

$$= \frac{10x^2+x-3}{5x^2+4x-1}$$

2) $\frac{2x+1}{x-1} \times \frac{x-1}{x+3} = \frac{(2x+1)}{(x-1)} \times \frac{(x-1)}{(x+3)}$

$= \frac{2x+1}{x+3}$ अंशस्थानी आणि छेदस्थनी समाईक असलेला

(x – 1) राशी काढून टाकून

3) $\frac{x^2-7x+10}{(x-4)^2} \times \frac{x^2-7x+12}{x-5} = \frac{(x^2-7x+10)(x^2-7x+12)}{(x-4)^2(x-5)}$

$$= \frac{(x-2)(x-5)(x-4)(x-3)}{(x-4)^2(x-5)}$$

$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x-4)}$ (अंशस्थानी आणि छेदस्थानी समाईक

असलेले (x – 4) (x – 5) राशी काढून टाकून)

$$= \frac{x^2-5x+6}{x-4}$$

टीप : आलेल्या उत्तरातील अंशस्थान आणि छेदस्थानातील मसावि काढून टाकला असता उरलेले उत्तर अतिसंक्षिप्त रूपात येते.

परिमेय संख्यांचा भागाकार आपणास माहिती आहेच. $\frac{2}{3}$ या परिमेय संख्येला $\frac{5}{7}$ ने भागले असता,

$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ या ठिकाणी $\frac{7}{5}$ हा $\frac{5}{7}$ चा व्यस्तांक आहे.

त्याचप्रमाणे $\frac{P}{Q}$ या बैजिक राशीला शून्य किंमत नसणाऱ्या $\frac{R}{S}$ या बैजिक राशीने भागले असता,

$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$ या ठिकाणी P, Q, R, S या बहुपदी आहेत. $\frac{S}{R}$ हा $\frac{R}{S}$ चा व्यस्तांक आहे.

उदा. 4.23 : खालील परिमेय राशींचे व्यस्तांक लिहा.

1) $\frac{x^2+20}{x^2+5x+6}$ 2) $-\frac{2y}{y^2-5}$ 3) x^3+8

उकल : 1) $\frac{x^2+20}{x^2+5x+6}$ चा व्यस्तांक $\frac{x^2+5x+6}{x^2+20}$

2) $-\frac{2y}{y^2-5}$ चा व्यस्तांक $-\frac{y^2-5}{2y} = \frac{5-y^2}{2y}$

3) $x^3+8 = \frac{x^3+8}{1}$ म्हणून व्यस्तांक $\frac{1}{x^3+8}$

उदा. 4.24 : भागाकार करा.

1) $\frac{x^2+1}{x-1}$ ला $\frac{x-1}{x+2}$ ने भागा.

2) $\frac{x^2-1}{x^2-25}$ ला $\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ ने भागा. आलेले उत्तर अतिसंक्षिप्त रुपात लिहा.

उकल : 1) $\frac{x^2+1}{x-1} \div \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2+1}{x-1} \times \frac{x+2}{x-1}$

$$= \frac{(x^2+1)(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-2x+1}$$

2) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25} \div \dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{(x^2-1)(x^2+4x-5)}{(x^2-25)(x^2-4x-5)}$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+5)(x+1)(x-5)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)}$$ [(x + 1) (x + 5)

हा मसावि काढून टाकून]

$$= \frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$$

आलेले उत्तर $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$ हे अतिसंक्षिप्त रूप आहे.

आपली प्रगती तपासा 4.9

1. खालील गुणाकार करा आणि उत्तर अतिसंक्षिप्त रूपात मांडा.

1) $\dfrac{7x+2}{2x^2+3x+1} \times \dfrac{x+1}{7x^2-5x-2}$

2) $\dfrac{x^3+1}{x^4+1} \times \dfrac{x^3-1}{x^4-1}$

3) $\dfrac{3x^2-15x+18}{2x-4} \times \dfrac{17x+3}{x^2-6x+9}$

4) $\dfrac{5x-3}{5x+2} \times \dfrac{x+2}{x+6}$

5) $\dfrac{x^2+1}{x-1} \times \dfrac{x+1}{x^2-x+1}$

6) $\dfrac{x^3+1}{x-1} \times \dfrac{x-1}{2x}$

7) $\dfrac{x-3}{x-4} \times \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$

8) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3} \times \dfrac{x^2-2x-24}{x^2-16}$

2. खालील परिमेय राशींचे व्यस्तांक मांडा.

1) $\dfrac{x^2+2}{x-1}$

2) $-\dfrac{3a}{1-a}$

3) $-\dfrac{7}{1-2x-x^2}$

4) $x^4 + 1$

3. भागाकार करून उत्तर परिमेय राशींच्या अतिसंक्षिप्त रूपात मांडा.

1) $\dfrac{x^2+11x+18}{x^2-4x-117} \div \dfrac{x^2+7x+10}{x^2-12x-13}$

2) $\dfrac{6x^2+x-1}{2x^2-7x-15} \div \dfrac{4x^2+4x+1}{4x^2-9}$

3) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-9} \div \dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$

4) $\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} \div \dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$

5) $\dfrac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2} \div \dfrac{3x^2+2x-1}{3x^2-3x-2}$

6) $\dfrac{2x^2+x-3}{(x-1)^2} \div \dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-1}$

तुम्ही काय शिकलात?

- बीजगणितामध्ये खालील सूत्रांचा उपयोग नेहमी केला जातो.

  1) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

  2) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

  3) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

  4) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

  5) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 +(ad + bc)x + bd$

  6) $(x + y)^3 = x^3 + 3xy(x + y) + y^3$

  7) $(x - y)^3 = x^3 - 3xy(x - y) - y^3$

  8) $(x + y)(x^2 -xy + y^2) = x^3 + y^3$

  9) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

- बहुपदीचे अवयव पाडणे म्हणजे दिलेली बहुपदी दोन किंवा अधिक बहुपदींचा गुणाकार आहे, हे दाखविणे होय. गुणाकारातील प्रत्येक बहुपदीला मूळ बहुपदीचा अवयव असे म्हणतात.

- बहुपदींच्या पाडलेल्या अवयवांचे अजून अवयव पडत नसतील, पडलेल्या अवयवांचे त्याचा ऋण अवयव, 1 किंवा –1 यापेक्षा दुसरे अवयव नसतील, तर दिलेल्या बहुपदीचे पूर्ण अवयव पडलेले आहेत, असे म्हणतात.

- सूत्रांवरून अवयव पाडण्याच्या पद्धतीखेरीज आपण वितरणाचा नियम वापरून दिलेल्या बहुपदींमधील काही बहुपदींमध्ये सामाईक असणारी किंवा सर्व बहुपदींमध्ये समाईक असणारी पदे (म्हणजेच एकपदी) वेगळी काढून अवयव पाडू शकतो.

- दिलेल्या दोन किंवा अधिक बहुपदींचा मसावि म्हणजे दिलेल्या बहुपदींमध्ये समाईक असणाऱ्या पदाचा मोठ्यात मोठा घात व समाईक असणाऱ्या सहगुणकातील मोठात मोठी संख्या यांचा गुणाकार होय.

- दोन किंवा अधिक बहुपदींचा लसावि हा सर्वात लहान अंकगुणक आणि सर्वात कमी कोटी असलेल्या बहुपदींचा गुणाकार असतो.

- P आणि Q या बहुपदी आणि Q शून्येत्तर बहुपदी असताना जी बैजिक राशी $\frac{P}{Q}$ या स्वरूपात लिहिता येते, त्या बैजिक राशीस परिमेय राशी असे म्हणतात.
- गणितातील चार मूलभूत प्रक्रिया आपण ज्या पद्धतीने परिमेय संख्यांवर करतो, त्याच पद्धतीने त्याच प्रक्रिया आपण परिमेय राशींवर देखील करू शकतो.

  परिमेय राशींची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार करून आलेले उत्तर परिमेय राशीच असते.
- परिमेय राशींच्या अंशस्थानी आणि छेदस्थानी असलेली समान पदे काढून टाकून परिमेय राशीला अतिसंक्षिप्त रूप देता येते.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. योग्य पर्यायाला √ ही खूण करा.

1) जर $120^2 - 20^2 = 25\,p$ तर $p =$

(A) 16 (B) 140 (C) 560 (D) 14000

2) $(2a^2 + 3)^2 - (2a^2 - 3)^2 =$

(A) $24a^2$ (B) $24a^4$ (C) $72a^2$ (D) $72a^4$

3) $(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 =$

(A) $2(a^2 + b^2)$ (B) $4(a^2 + b^2)$ (C) $4(a^4 + b^4)$ (D) $2(a^4 + b^4)$

4) जर $m - \frac{1}{m} = -\sqrt{3}$, तर $m^3 - \frac{1}{m^3} =$

(A) 0 (B) $6\sqrt{3}$ (C) $-6\sqrt{3}$ (D) $-3\sqrt{3}$

5) $\frac{327 \times 327 - 323 \times 323}{327 + 323} =$

(A) 650 (B) 327 (C) 323 (D) 4

6) $8m^3 - n^3 =$

(A) $(2m - n)(4m^2 - 2mn + n^2)$ (B) $(2m - n)(4m^2 + 2mn + n^2)$

(C) $(2m - n)(4m^2 - 4mn + n^2)$ (D) $(2m - n)(4m^2 + 4mn + n^2)$

7) $\dfrac{467\times467\times467+533\times533\times533}{467\times467-467\times533+533\times533}=$

(A) 66 (B) 198 (C) 1000 (D) 3000

8) $36a^5b^2$ आणि $90a^3b^4$ यांचा मसावि.

(A) $36a^3b^2$ (B) $18a^3b^2$ (C) $90a^3b^4$ (D) $180a^5b^4$

9) x^2-1 आणि x^2-x-2 यांचा लसावि.

(A) $(x^2-1)(x-2)$ (B) $(x^2-1)(x+2)$

(C) $(x-1)^2(x+2)$ (D) $(x+1)^2(x-2)$

10) खालीलपैकी कोणता राशी परिमेय राशी नाही.

(A) $\sqrt{33}$ (B) $x+\dfrac{1}{\sqrt{5x}}$

(C) $8\sqrt{x}+6\sqrt{y}$ (D) $\dfrac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{5}}$

2. गुणाकार करा.

1) $(a^m+a^n)(a^m-a^n)$ 2) $(x+y+2)(x-y+2)$

3) $(2x+3y)(2x+3y)$ 4) $(3a-5b)(3a-5b)$

5) $(5x+2y)(25x^2-10xy+4y^2)$ 6) $(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

7) $\left(a+\dfrac{5}{4}\right)\left(a+\dfrac{4}{5}\right)$ 8) $(2z^2+3)(2z^2-5)$

9) $99\times99\times99$ 10) $103\times103\times103$

11) $(a+b-5)(a+b-6)$ 12) $(2x+7z)(2x+5z)$

3. जर $x=a-b$ आणि $y=b-c$ तर, $(a-c)(a+c-2b)=x^2-y^2$ हे दाखवा.

4. जर $4x-5z=16$ आणि $xz=12$ तर, $64x^2-125z^3$ या बहुपदीची किंमत काढा.

5. अवयव पाडा.

1) $x^7y^6+x^{22}y^{20}$ 2) $3a^5b-243ab^5$

3) $3a^6+12a^4b^2+12a^2b^4$ 4) $a^4-8a^2b^3+16b^6$

5) $3x^4+12y^4$ 6) x^8+14x^4+81

7) $x^2 + 16x + 63$ 8) $x^2 - 12x + 27$

9) $7x^2 + xy - 6y^2$ 10) $5x^2 - 8x - 4$

11) $x^6 - 729y^6$` 12) $12a^6 + 64b^6$

6. मसावि काढा.

1) $x^3 - x^5$ आणि $x^4 - x^7$ 2) $30(x^2 - 3x + 2)$ आणि $50(x^2 -2x + 1)$

7. लसावि काढा.

1) $x^3 + y^3$ आणि $x^2 - y^2$ 2) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ आणि $x^2 + xy + y^2$

8. सोडवा.

1) $\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$ 2) $\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}-\frac{x-1}{x-2}$

3) $\frac{x-1}{x-2}\times\frac{3x+1}{x^2-4}$ 4) $\frac{x^2-1}{x^2-25}\div\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$

9. सोपे रूप द्या.

$$\frac{2}{a-1}-\frac{2}{a+1}-\frac{4}{a^2+1}-\frac{8}{a^4+1}$$

(टीप : $\frac{2}{a-1}-\frac{2}{a+1}=\frac{4}{a^2-1}$ आता यापुढील पद मिळवा. आणि तीच प्रक्रिया पुढे करा.)

10. जर, $m = \frac{x+1}{x-1}$ आणि $n = \frac{x-1}{x+1}$ तर, $m^2 + n^2 - mn$ ची किंमत काढा.

आपली प्रगती तपासा – उत्तरे

4.1

1. 1) $25x^2 + 20xy + y^2$ 2) $x^2 - 6x + 9$ 3) $a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2$

4) $4x^2 - 20xy + 5y^2$ 5) $\frac{x^2}{9}+\frac{2}{3}x+1$ 6) $\frac{z^2}{4}-\frac{1}{3}z+\frac{1}{9}$

7) $a^4 - 25$ 8) $x^2y^2 - 1$ 9) $x^2+\frac{25}{12}x+1$

10) $\frac{4}{9}x^4-\frac{25}{9}x^2-1$ 11) $6x^2 + 13xy + 6y^2$ 12) $21x^2 + 8xy - 5y^2$

टिपा

2. 1) $40x^2$ 2) $2a^6 + 18$ 3) $2(a^2x^2 + b^2y^2)$
4) $32p^2q^2$

3. 1) 10404 2) 11664 3) 4761
4) 996004 5) 6384 6) 22451
7) 89964 8) 249936 9) 11445
10) 5621 11) 8930 12) 989028

4.2

1. 1) $27x^3 + 36x^2y + 36xy^2 + 64y^3$ 2) $p^3 - 3p^2qr + 3pq^2r^2 - q^3r^3$

3) $a^3 + a^2b + \frac{ab^2}{3} + \frac{b^3}{27}$ 4) $\frac{a^3}{27} - \frac{a^2b}{3} + ab^2 - b^3$

5) $\frac{a^6}{8} + \frac{1}{2}a^4b^2 + \frac{2}{3}a^2b^4 + \frac{8}{27}b^6$ 6) $\frac{a^6x^9}{27} - \frac{2}{3}a^4b^3x^6y^2 + 4a^2b^6x^3y^4 - 8b^9y^6$

2. 1) 512 2) 1728 3) 5832
4) 12167 5) 148877 6) 110592
7) 357911 8) 328509 9) 912663
10) 970299

3. 1) $8x^3 + y^6$ 2) $x^3 - 8$ 3) $x^3 + 1$
4) $8y^3 - 27z^2$ 5) $64x^3 + 27y^3$ 6) $27x^3 - \frac{1}{343}y^3$

4. 1) 100 2) 1115

5. 1) 15616 2) $\frac{27027}{125}$

6. 1) $120x^2 + 250$ 2) $100y^3$ 3) $19x^3 - 19y^3$
4) $-117x^3 - 126$

7. 1) 1000 2) 444

4.3

1) $5x(2y - 3z)$ 2) $abc\,(c - b)$
3) $3p(2p - 5q + 9)$ 4) $(b - c)\,(a^2 - b)$
5) $(4x - y)^2(8ax - 2ay - b)$ 6) $x(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

टिपा

7) $25(2 + 5p)(2 - 5p)$ 8) $(1 + 16y^4)(1 + 4y^2)(1 + 2y)(1 - 2y)$

9) $(5x + 1)(1 - x)$ 10) $(a^2 + bc + ab + ac)(a^2 + bc - ab - ac)$

11) $(5x + 6y - 1)(5x - 6y - 1)$ 12) $(7x - y + 1)(7x - y - 1)$

13) $(m + 7)^2$ 14) $(2x - 1)^2$

15) $(6a + 5)^2$ 16) $(x^3 - 4)^2$

17) $(a^4 + 7a^2 + 1)(a^2 + 3a + 1)(a^2 - 3a + 1)$

18) $(2a^2 + 6ab + 9b^2)(2a^2 - 6ab + 9b^2)$

19) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ 20) $(3a^2 + 5a + 4)(3a^2 - 5a + 4)$

21) 1) 40 (2) 57200

4 . 4

1) $(a + 6b)(a^2 - 6ab + 36b^2)$ 2) $(a - 7)(a^2 + 7a + 49)$

3) $(x + 4y)^3$ 4) $(2x - 3y)^3$

5) $(2x - 5y)^3$ 6) $(4k - 3)^3$

7) $(9x^2 - 2)(81x^4 + 18x^2 + 4)$ 8) $x^2 (1 + y^2)(1 - y^2 + y^4)$

9) $2a(2a^2 - 3b^2)(4a^2 + 6a^2b^2 + 9b^4)$

10) $(3b - a - 1)(9b^2 + 3ab + 3b + a^2 + a + 1)$

11) $(2a - 3b + 4c)(4a^2 + 9b^2 - 6ab - 8ac + 12bc + 16c^2)$

12) $(4x - 2y + 1)(16x^2 + 8xy - 4x + 4y^2 - 4y + 1)$

4 . 5

1) $(x + 3)(x + 8)$ 2) $(x - 6y)(x - 9y)$ 3) $(x + 3)(2x - 1)$

4) $2(x - 2y)(3x + y)$ 5) $(2x^2 + 1))(x + 1)(x - 1)$ 6) $(x + 15y)(x - 2y)$

7) $(x + 2)(2x + 7)$ 8) $(2y - 3)(5y - 2)$ 9) $(x - 1)(2x + 1)$

10) $(12 - m)(m + 9)$ 11) $(2a - b - 6)(2a - b + 5)$ 12) $(9y - 7)(5x + y)$

4 . 6

1. 1) $3xy^2$ 2) $12x^3y^5$ 3) $(x + 1)^2$ 4) $x + 2$ 5) $6(x + 2)$

6) $(x + 5)^2$ 7) $(2x - 5)^2$ 8) $x^2 - 1$ 9) $x - y$ 10) $6(x - 1)$

2. 1) $75x^3y^2$ 2) $240x^3y^4$ 3) $(x - 1)(x + 1)^3$

4) $x^2 + 4x + 4$ 5) $72(x + 2)^3(x^2 - 2x + 4)$ 6) $(x + 1)^2(x + 5)^3$

7) $(x - 4)(x + 4)^2(2x - 5)^3$ 8) $x^4 - 1$ 9) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$

10) $18(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

4 . 7

1. 1), 2), 3), 5), 6) आणि 8)

4 . 8

1. 1) $\frac{2x^2}{x-2}$ 2) $\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$ 3) $\frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$

4) $\frac{4x^2+5x+28}{x^3+4x^2-16x+64}$ 5) $\frac{2x}{x+3}$ 6) $\frac{2x^2+8}{x^2-4}$

7) $\frac{2x^3+3x^2-1}{x^3+2x^2+x+2}$ 8) $\frac{5}{6x^2}$

2. 1) $\frac{x-6}{x^2-4}$ 2) $\frac{8x}{4x^2-1}$ 3) $\frac{x^2-1}{x}$

4) $\frac{2-x}{x^2-x}$ 5) $\frac{x^2+2}{x-4}$ 6) $\frac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$

7) $\frac{x^2-15x+16}{2(x^3+3x^2-9x-27)}$ 8) $\frac{1-x}{1+x}$

3. 1) 2 2) 6 3) 2 4) 110 5) $8\sqrt{15}$

6) 115 7) 0 8) 18 9) ± 5 10) 14

4 . 9

1. 1) $\frac{1}{2x^2-x-1}$ 2) $\frac{x^4+x^2+1}{x^6+x^4+x^2+1}$ 3) $\frac{51x+9}{2x-6}$

4) $\frac{5x^2+7x-6}{5x^2+32x+12}$ 5) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3-2x^2+2x-1}$ 6) $\frac{x^3+1}{2x}$

7) $\frac{x-1}{x+1}$ 8) $\frac{x-6}{x+1}$

2. 1) $\frac{x-1}{x^2+2}$ 2) $\frac{a-1}{3a}$ 3) $\frac{x^2+2x-1}{7}$

4) $\frac{1}{x^4+1}$

3. 1) $\frac{x+1}{x+5}$ 2) $\frac{6x^2-11x+3}{2x^2-9x-5}$ 3) $\frac{1}{x+3}$

4) $\frac{x+6}{x+2}$ 5) $\frac{2x^2+11x+5}{x^2-1}$ 6) 1

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह - उत्तरे

1. 1) C 2) A 3) D 4) A 5) D 6) B 7) C 8) B 9) A 10) C

2. 1) $a^{2m} - a^{2n}$ 2) $x^2 - y^2 + 4x + 4$ 3) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

4) $9a^2 - 30ab + 25b^2$ 5) $125x^2 + 8y^3$ 6) $8x^3 - 125y^3$

7) $a^2 + \frac{41}{20}a + 1$ 8) $4z^4 - 4z^2 - 15$ 9) 970299

10) 1092727 11) $a^2 + 2ab - 11a + 30$ 12) $4x^2 + 24xz + 35z^2$

4. 15616

5. 1) $x^7y^6(1 + x^{15}y^{14})$ 2) $3ab(a - 3b)(a + 3b)(a^2 + 9b^2)$

3) $3a^2(a^2 + 2b^2)^2$ 4) $(a^2 - 4b^3)^2$

5) $3(x^2 + 2xy + 2y^2)$ 6) $(x^4 - 2x^2 + 9)(x^4 + 2x^2 + 9)$

7) $(x + 9)(x + 7)$ 8) $(x - 3)(x - 9)$

9) $(x + y)(7x - 6y)$ 10) $(x - 2)(5x + 2)$

11) $(x - 3y)(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)(x^2 + 3xy + 9y^2)$

12) $(5a^2 + 4b^2)(25a^4 - 20a^2b^2 + 16b^4)$

6. 1) $x^3(1 - x)$ 2) $10(x - 1)$

7. 1) $(x^2 - y^2)(x^2 - xy + y^2)$ 2) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

8. 1) $\frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$ 2) $\frac{x+2}{x+3}$ 3) $\frac{3x^2-2x-1}{x^3+2x^2-4x-8}$ 4) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$

9. $\frac{16}{a^8-1}$

10. $\frac{x^4+14x^2+1}{x^4-2x^2+1}$

❖ ❖ ❖

5

एकरेषीय समीकरणे

स्थिर संख्या आणि चल संख्या यांच्याविषयीचे संबोध आपण अभ्यासले आहेतच. तसेच बैजिक राशी, बहुपदी यांची सुद्धा माहिती आपण घेतली आहे. एका संख्येच्या दुपट्टीमध्ये 6 मिळविले असता उत्तर 20 येते. तर ती संख्या कोणती? यासारखी अनेक उदाहरणे आपण पाहिली आहेत. हे उदाहरण सोडविण्यासाठी आपल्याला ती संख्या x मानावी लागते आणि दिलेल्या माहितीवरून समीकरण तयार करावे लागते व समीकरण सोडवून उत्तर काढावे लागते. चल आणि अचल संख्या वापरून दिलेल्या माहितीचा उपयोग करून समीकरण तयार करण्याविषयी आपण माहिती घेणार आहोत. या पाठात आपण एक चल व दोन चले वापरून समीकरण तयार करण्याच्या पद्धती अभ्यासणार आहोत. एक चल वापरून समीकरण कसे तयार करावे आणि बीजगणिताच्या पद्धतीने ते कसे सोडवावे हे आपण पाहणार आहोत. तसेच दोन चले वापरून ती समीकरणे बीजगणिताच्या साहाय्याने आपण आलेख पद्धतीने कशी सोडविता येतात याचीही माहिती घेणार आहोत.

उद्दिष्टे :

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खालील बाबींचे ज्ञान होईल.

- दिलेल्या समीकरणांच्या समूहामधून एकरेषीय समीकरणे ओळखता येतील.
- एकरेषीय समीकरणांची उदाहरणे देता येतील.
- एकचलीय एकरेषीय समीकरणे तयार करता येतील आणि ती सोडविता येतील.
- द्विचलीय समीकरणांची उदाहरणे देता येतील आणि ती समीकरण रूपात मांडता येतील.
- द्विचलीय समीकरणांचा आलेख काढता येईल.
- द्विचलीय समीकरणे बीजगणिताच्या तसेच आलेखाच्या साहाय्याने सोडविता येतील.
- व्यवहारातील या प्रकारच्या समस्या एक चल आणि दोन चले वापरून मांडता येतील आणि सोडविता येतील.

अपेक्षित पूर्वज्ञान :

- चल आणि स्थिर संख्यांचा संबोध
- बैजिक राशी आणि त्यावरील प्रक्रिया
- बहुपदी, बहुपदीची शून्य किंमत आणि बहुपदींवरील प्रक्रिया

5.1 एकरेषीय समीकरणे (Linear Equations)

आपल्याला बैजिक राशी व बहुपदींची माहिती आहेच. बैजिक राशींमध्ये असलेल्या चल संख्यांच्या किंमतीवरच बैजिक राशींची किंमत अवलंबून असते. एक चल समीकरणे व त्यांची कोटी या गोष्टीसुद्धा आपणास माहिती आहेत. ज्या बहुपदीमध्ये चलाची कोटी एक असते, अशा बहुपदीस एक चल एकरेषीय समीकरण असे म्हणतात. जेव्हा दोन राशींमध्ये = चिन्ह असते, तेव्हा त्या राशींना समीकरण असे म्हणतात. म्हणजेच प्रत्येक समीकरणामध्ये = हे चिन्ह आवश्यक आहे. = हे चिन्ह उजव्या बाजूची राशी डाव्या बाजूच्या राशीबरोबर हे दर्शविते.

(डावी बाजू = उजवी बाजू, डा.बा. = उ.बा.)

उदा. :

$3x + 2 = 14$ ...... (1)

$2y - 3 = 3y + 4$ ...... (2)

$z^2 - 3z + 2 = 0$ ..... (3)

$3x^2 + 2 = 1$ ...... (4)

ही सर्व समीकरणे आहेत, कारण प्रत्येकामध्ये = हे चिन्ह ‘आणि चलराशी आहेत.

समीकरण (1) मध्ये डावी बाजू = $3x + 2$ आणि उजवी बाजू = 14 आहे. यामधील चल संख्या x ही आहे.

समीकरण (2) मध्ये डावी बाजू = $2y - 3$ आणि उजवी बाजू = $3y + 4$ आहे. ही दोन्ही समीकरणे एकचल एकरेषीय समीकरणे आहेत.

समीकरण (3) आणि समीकरण (4) मध्ये डाव्या बाजूला दुसऱ्या कोटीची बहुपदी आणि उजव्या बाजूला संख्या आहेत.

समीकरण (1) हिची डावी बाजू ही एकचल एककोटी बहुपदी आणि उजवी बाजू संख्या आहे, हे आपल्या लक्षात येते.

समीकरण (2) मध्ये डावी बाजू आणि उजवी बाजू या एक चल एकरेषीय समीकरण आहेत. समीकरण (3) आणि समीकरण (4) या वर्ग बहुपदी आहेत. समीकरण (1) आणि समीकरण (2) ही एकरेषीय समीकरणे आहेत. तर समीकरण (3) आणि समीकरण (4) ही एकरेषीय समीकरणे नाहीत.

समीकरणामध्ये असणाऱ्या चलांना अटी पाळाव्या लागतात. समीकरणामध्ये डावी राशी उजव्या राशीबरोबर असणे ही आवश्यक अट आहे. समीकरणाच्या दोनपैकी एका राशीमध्ये चल पद असणे आवश्यक आहे.

$3x - 4 = 4x + 6$ आणि $4x + 6 = 3x - 4$ ही दोन्ही समीकरणे सारखीच आहेत. डावी बाजू आणि उजवी बाजू यांची अदलाबदल केली, तरी समीकरण बदलत नाही. या गुणधर्माचा उपयोग समीकरण सोडविताना होतो.

दोन्ही चल पदे पहिल्या कोटीची आणि चलपदांचा गुणाकार नसणाऱ्या राशींना द्विपदीय रेषीय समीकरणे असे म्हणतात.

उदा. $2x + 3y = 4$ आणि $2 - 2y + 2 = 3x + y + 6$ ही दोन्ही द्विपदीय रेषीय समीकरणे आहेत. परंतु $3x^2 + y = 5$ हे समीकरण द्विपदीय रेषीय समीकरण नाही. कारण x या पदाची कोटी 2 आहे. त्याचप्रमाणे $xy + x = 5$ हे सुद्धा द्विपदीय रेषीय समीकरण नाही कारण यामधील पद xy हे x आणि y या पदांचा गुणाकार आहे.

एकपदीय रेषीय समीकरणाचे सर्वसामान्य स्वरूप, $ax + b = 0$ येथे $a \neq 0$ आणि a आणि b ही स्थिरपदे असे असते.

द्विपदीय रेषीय समीकरणाचे सर्वसामान्य स्वरूप, $ax + by + c = 0$ येथे a, b आणि c या वास्तव संख्या आणि त्यापैकी व्a किंवा b ही शून्येतर संख्या, असे असते.

उदा. 5.1 : खालीलपैकी कोणती समीकरणे एकपदीय रेषीय समीकरणे आहेत? त्यांची डावी बाजू तसेच उजवी बाजू लिहा.

1. $2x + 5 = 8$
2. $3y - z = y + 5$
3. $x^2 - 2x = x + 3$
4. $3x - 7 = 2x + 3$
5. $2 + 4 = 5 + 1$.

उकल :

1. $2x + 5 = 8$

   हे एकपदीय रेषीय समीकरण आहे. चल पद x ची एक कोटी आहे.

   डावी बाजू $= 2x + 5$, उजवी बाजू $= 8$

2. $3y - z = y + 5$

   हे एकपदीय रेषीय समीकरण नाही. कारण y आणि z ही दोन चलपदे आहेत.

   डावी बाजू $= 3y - z$, उजवी बाजू $= y + 5$

3. $x^2 - 2x = x + 3$

हे रेषीय समीकरण नाही, कारण x पदाची कोटी 2 आहे.

डावी बाजू = $x^2 - 2x$, उजवी बाजू = $x + 3$

4. $3x - 7 = 2x + 3$

हे एकपदीय रेषीय समीकरण आहे, कारण डाव्या आणि उजव्या बाजूला असलेल्या चलपदांची x कोटी एक आहे.

डावी बाजू = $3x - 7$, उजवी बाजू = $2x +$

5. $2 + 4 = 5 + 1$

हे रेषीय समीकरण नाही कारण यामध्ये एकही चलपद नाही.

डावी बाजू = $2 + 4$, उजवी बाजू $5 + 1$

उदा 5.2 : खालीलपकी कोणती समीकरणे द्विपदीय रेषीय समीकरणे आहेत?

1. $2x + z = 5$
2. $3y - 2 = x + 3$
3. $3t + 6 = t - 1$

उकल :

1. $2x + z = 5$

हे द्विपदीय रेषीय समीकरण आहे. चलपदे x आणि t

2. $3y - 2 = x + 3$

हे द्विपदीय रेषीय समीकरण आहे चलपदे y आणि x

3. $3t + 6 = t - 1$

हे द्विपदीय रेषीय समीकरण नाही. कारण येथे एक चल पद t आहे.

आपली प्रगती तपासा 5.1

१. खालीलपैकी कोणती समीकरणे एकपदीय रेषीय समीकरणे आहेत?

1) $3x - 6 = 7$

2) $2x - 1 = 3z + 2$

3) $5 - 4 = 1$

4) $y^2 = 2y - 1$

२. खालीलपैकी कोणती समीकरणे द्विपदीय रेषीय समीकरणे आहेत?

1) $3y - 5 = x + 2$

2) $x^2 + y = 2y - 3$

3) $x + 5 = 2x - 3$

5.2 एकपदीय रेषीय समीकरण तयार करणे (Formation of Linear Equations in one variable)

खालील बाबी विचारात घ्या.

1. 11 ही संख्या x पेक्षा 4 ने अधिक आहे.
2. y या संख्येला 7 ने भागले असता भागाकार 2 येतो.
3. रीनाकडे काही सफरचंदे आहेत. त्यापैकी 5 तिने आपल्या बहिणीला दिली. तिच्याकडे 3 सफरचंदे उरली. तर सुरवातीला तिच्याकडे किती सफरचंदे होती?
4. दोन अंकी संख्येत दशकस्थानचा अंक एककस्थानच्या अंकाच्या दुप्पट आहे. अंकांची अदलाबदल केली असता तयार होणारी संख्या मूळ संख्येपेक्षा 18 ने कमी आहे. तर मूळ संख्या कोणती?

1. या ठिकाणी $x + 4 = 11$ हे समीकरण मांडता येते.

   $x = 7$ ने समीकरण सत्य होते. $\therefore$ उत्तर $x = 7$

2. समीकरण $\frac{y}{7} = 2$ $\therefore$ उत्तर $y = 14$

3. जी संख्या शोधावयाची आहे, ती संख्या x माना

   $\therefore$ रीनाकडे x सफरचंदे आहेत, असे मानू.

   त्यापैकी 5 तिने आपल्या बहिणीला दिली.

   $\therefore$ तिच्याकडे x - 5 सफरचंदे उरली

   $\therefore$ समीकरण = $x - 5 = 3$. $\therefore x = 8$

4. एककस्थानचा अंक x आहे, असे मानू.

   $\therefore$ दशकस्थानचा अंक 2x येईल.

   $\therefore$ संख्या = $10(2x) + x = 20x + x = 21x$

   अंकांची अदलाबदल केली. असता एककस्थानचा अंक 2x आणि दशकस्थानचा अंक x येईल.

   नवीन संख्या मूळ संख्येपेक्षा 18 ने कमी आहे.

   $\therefore$ समीकरण =

$21x - 12x = 18$

$\therefore 9x = 18$

$\therefore x = \frac{18}{9} = 2$

$\therefore$ मूळ संख्या	दशकस्थान 2x	एककस्थान x
4	2	

$\therefore$ मूळ संख्या = 42

आपली प्रगती तपासा 5.2

योग्य त्या चल पदांचा वापर करून एकरेषीय समीकरणे तयार करा.

1. 15 मधून एका संख्येची दुप्पट वजा केली असता 7 उरतात

2. एक किलोमीटर अंतर जाण्यासाठी मोटारबोटीला 0.1 लिटर इंधन लागते. एके दिवशी मोटारबोटीने x कि.मी. अंतर कापले. त्यासाठी 10 लिटर इंधन वापरले. याचे समीकरण तयार करा.

3. एका आयताची लांबी रुंदीच्या दुप्पट आहे. आयताची परिमिती 96 मी. आहे. (आयताची रुंदी y मी. माना)

4. आजपासून 15 वर्षानंतर सलमाचे वय तिच्या आजच्या वयाच्या चौपट होईल. (सलमाचे आजचे वय t वर्षे माना)

5.3 एकपदीय रेषीय समीकरण सोडविणे (Solution of Linear Equations in One Variable)

खालील एकपदीय रेषीय समीकरण विचारात घ्या.

$x - 3 = -2$

डावी बाजू = $x - 3$, उजवी बाजू = -2

x च्या काही किंमती गृहीत धरून आपण डावी बाजू आणि उजवी बाजू यांची तुलना करू.

x ची किंमत	डावी बाजू	उजवी बाजू
0	–3	–2
1	–2	–2
3	0	–2
4	1	–2

तक्त्यावरून असे लक्षात येते की, x ची किंमत 1 असतानाच डावी बाजू आणि उजवी बाजू समान येते. x च्या इतर किंमतीला डावी बाजू $\neq$ उजवी बाजू $x = 1$ ही किंमतच समीकरण सत्य करते. म्हणून $x = 1$ ला समीकरणाची उकल असे म्हणतात.

समीकरणामध्ये असलेल्या चलपदाच्या जागी जी संख्या घातल्याने समीकरणाची डावी बाजू उजव्या बाजूबरोबर होते, त्या संख्योस त्या समीकरणाची उकल असे म्हणतात. चलपदाच्या वेगवेगळ्या किंमती घेऊन आपण 'चुका आणि शिका' (trial and error) पद्धतीने समीकरणाची उकल काढू शकतो.

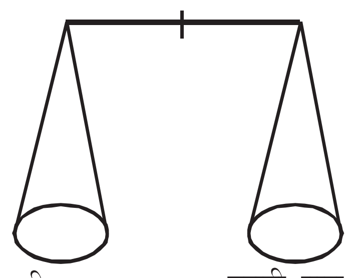
आता आपण गणिती पद्धतीने समीकरणाची उकल कशी काढता येते ते पाहू.

समीकरणाची तुलना आपण तराजुबरोबर करू शकतो. समीकरणाची डावी बाजू आणि उजवी बाजू म्हणजे तराजूची दोन पारडी असल्यासारखी असतात = हे चिन्ह ही दोन्ही पारडी समतोल असल्याचे दर्शवितात.

तराजू समतोल असताना तराजूच्या दोन्ही पारड्यात सारखेच वस्तूमान टाकले किंवा दोन्ही परड्यातून सारखेच वस्तुमान काढून घेतले, तरी तराजू समतोलच राहतो. हीच वस्तुस्थिती समीकरणाच्या बाबतीतही खरी आहे.

1. समीकरणाच्या दोन्ही बाजूस एकच संख्या मिळवा.
2. समीकरणाच्या दोन्ही बाजूतून एकच संख्या वजा करा.
3. समीकरणाच्या दोन्ही बाजूला एकाच शून्येतर संख्येने गुणा.
4. समीकरणाच्या दोन्ही बाजूला एकाच शून्येतर संख्येने भागा.

तरीही समीकरणाची किंमत बदलत नाही.



आकृती 5.1

आता आपण काही उदाहरणे पाहू.

उदा. 5.3 : सोडवा.

$$5 + x = 8$$

उकल : समीकरणाच्या दोन्ही बाजूतून 5 वजा करून,

$$5 + x - 5 = 8 - 5$$

$$\therefore \quad x + 0 = 5$$

$$\therefore \quad x = 5$$

$x = 3$ ही समीकरणाची उकल आहे.

ताळा : $x = 3$, असताना डावी बाजू $5 + x = 5 + 3 = 8$

उजवी बाजू $= 8$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू

उदा. 5.4 : सोडवा.

$$y - 2 = 7$$

उकल : समीकरणाच्या दोन्ही बाजूत 2 मिळवून,

$\therefore \quad y - 2 + 2 = 7 + 2$

$\therefore \quad y = 9$

$\therefore \quad y = 9$ ही समीकराची उकल आहे.

ताळा : $y = 9$ असताना, डावी बाजू $= y - 2 = 9 - 2$

उजवी बाजू $= 7$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू

उदा 5.5 : सोडवा.

$$7x + 2 = 8$$

उकल : समीकरणाच दोन्ही बाजूतून 2 वजा करून,

$7x + 2 - 2 = 8 - 2$

$7x = 6$

$\therefore \quad \frac{7x}{7} = \frac{6}{7}$ (दोन्ही बाजूंना 7 ने भागून)

$\therefore \quad x = \frac{6}{7}$

$\therefore \quad x = \frac{6}{7}$ ही समीकरणाची उकल आहे..

उदा. 5.6 : सोडवा.

$$\frac{3y}{2} - 3 = 9$$

उकल : समीकरणाच्या दोन्ही बाजूस 3 मिळवून,

$$\frac{3y}{2} - 3 + 3 = 9 + 3$$

$$\therefore \quad \frac{3y}{2} = 12$$

$\therefore \quad \frac{3y}{2}\times 2 = 12 \times 2$ (दोन्ही बाजूंना 2 ने गुणून)

$\therefore \quad 3y = 24$

$\therefore \quad \frac{3y}{3} = \frac{24}{3}$ (दोन्ही बाजूंना 3 ने भागून)

$\therefore \quad y = 8$

$y = 8$ ही समीकरणाची उकल आहे.

उदा. 5.7 : समीकरण सोडवा.

$$2(x+3) = 3(2x-7)$$

उकल : हे समीकरण असेही लिहिता येईल.

$2x + 6 = 6x - 21$

$\therefore \quad 6x - 21 = 2x + 6$ (डावी व उजवी बाजू यांची अदलाबदल)

$\therefore \quad 6x - 21 + 21 = 2x + 6 + 21$ (दोन्ही बाजूमध्ये 21 मिळवून)

$\therefore \quad 6x = 2x + 27$

$\therefore \quad 6x - 2x = 2x + 27 - 2x$ (दोन्ही बाजूंमधून 2x वजा करून)

$\therefore \quad 4x = 27$

$\therefore \quad x = \frac{27}{4}$

$\therefore \quad x = \frac{27}{4}$ ही समीकरणाची उकल आहे.

टीप :

1. आपण दोन्ही बाजूंवर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार यासारख्या क्रिया करतो. त्याचा तपशील लिहिणे आवश्यक नाही.
2. या प्रक्रियेला डाव्या बाजूकडून उजव्या बाजूकडे किंवा उजव्या बाजूकडून डाव्या बाजूकडे पदांची अदलाबदल करणे असे म्हणतात.
3. पदाची अदलाबदल करताना चिन्ह बदल होतो. म्हणजेच **+** चे – किंवा – चे **+** असे चिन्ह होते.
4. एकपदीय एकरेषीय समीकरण $ax + b = 0$ या स्वरूपात लिहिताना येते. या ठिकाणी a आणि b हे स्थिरांक तर x हे चल पद असते.

   या समीकरणाची उकल $x = -\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$ ही असते.

उदा. 5.8 : सोडवा.

$$3x - 5 = x + 3$$

उकल : $3x - 5 = x + 3$

$\therefore \quad 3x = x + 3 + 5$

$\therefore \quad 3x - x = 3 + 5$

$\therefore \quad 2x = 8$

$\therefore \quad x = 4$, ही समीकरणाची उकल आहे.

आपली प्रगती तपासा 5.3

खालील समीकरणे सोडवा.

1. $x - 5 = 8$
2. $19 = 7 + y$
3. $3z + 4 = 5z + 4$
4. $\frac{1}{3}y + 9 = 12$
5. $5(x-3) = x + 5$

5.4 शाब्दिक उदाहरणे (Word Problems)

एकपदीय एकरेषीय समीकरण कशी तयार करतात, हे आपण पाहिले आहेच. एकरेषीय समीकरणाचे उपयोजन कसे करतात, हे आता आपण पाहू.

उदा 5.9 : जॅकोबच्या आजच्या वयाच्या तीनपट जॅकोबच्या वडिलांचे वय आहे. पाच वर्षांनंतर त्या दोघांच्या वयातील अंतर 30 वर्षे होईल. तर दोघांची आजची वये काढा.

उकल : जॅकोबचे आजचे वय x वर्षे आहे, असे मानू.

$\therefore$ जॅकोबच्या वडिलांचे आजचे वय 3x वर्षे होईल.

पाच वर्षांनंतर

जॅकोबचे वय = $(x+5)$ वर्षे

जॅकोबच्या वडिलांचे वय = $(3x + 5)$ वर्षे

पाच वर्षांनंतर त्यांच्या वयातील अंतर

$= (3x+5)- (x+5) = 30$ वर्षे होईल.

$\therefore$ समीकरण =

$\therefore (3x + 5) – (x+5) = 30$

$\therefore 3x + 5 – x – 5 = 30$

$\therefore 3x – x = 30$

$\therefore 2x = 30$

$\therefore x = 15$

$\therefore$ जॅकोबचे आजचे वय $= x = 15$ वर्षे

$\therefore$ जॅकोबच्या वडिलांचे आजचे वय $= 3x = 3 \times 15 = 45$ वर्षे

ताळा : पाच वर्षानंतर,

जॅकोबचे वय $15 + 5 = 20$ वर्षे

जॅकोबच्या वडिलांचे $45 + 5 = 50$ वर्षे

$\therefore$ त्यांच्या वयातील अंतर $= 50 – 20 = 30$ वर्षे

उदा. 5.10 : तीन क्रमवार सम संख्यांची बेरीज 36 आहे. तर त्या संख्या कोणत्या?

उकल : सर्वात लहान सम संख्या x आहे, असे मानू

$\therefore$ त्यापुढील दोन क्रमवार समसंख्या $x +2$ आणि $x + 4$ येतील.

त्याची बेरीज 36 आहे.

$\therefore$ समीकरण =

$x + (x+2) + (x+4) = 36$

$\therefore x + x + 2 + x + 4 = 36$

$\therefore 3x + 6 = 36$

$\therefore 3x = 36 – 6$

$\therefore 3x = 30$

$\therefore x = 10$

$\therefore$ त्या संख्या $x = 10 = 10$

$x +2 = 10 +2 = 12$

$x +4 = 10 +4 = 14$

$\therefore$ त्या संख्या 10, 12, 14 आहेत.

उदा. 5.11 : एका आयताची लांबी रुंदीपेक्षा 3 सेमी ने जास्त आहे. आयताची परिमिती 34 सेमी असल्यास, आयताची लांबी व रुंदी काढा.

उकल : आयताची रुंदी x सेमी आहे, असे मानू

∴ आयताची लांबी $x + 3$ सेमी येईल.

∴ आयताची परिमिती 34 सेमी आहे.

∴ समीकरण =

$2(x + 3 + x) = 34$

∴ $2x + 6 + 2x = 34$

∴ $4x = 34 - 6$

∴ $4x = 28$

∴ $x = 7$

∴ आयताची रुंदी = x = 7 = 7 सेमी.

∴ आयताची लंबी = $x + 3 = 7 + 3 = 10$ सेमी.

आपली प्रगती तपासा 5.4

1. दोन संख्यांची बेरीज 85 आहे. एक संख्या दुसरीपेक्षा 7 ने मोठी आहे. तर त्या संख्या काढा.
2. वडिलांचे आजचे वय मुलाच्या आजच्या वयाच्या दुपटीपेक्षा 20 ने जास्त आहे. त्यांच्या वयांची बेरीज 63 आहे. तर त्यांची आजची वये काढा.
3. एका आयताची लांबी रुंदीच्या दुप्पट आहे. आयताची परिमिती 66 सेंमी आहे. तर आयताची लांबी व रुंदी काढा.
4. एका वर्गात मुलींच्या $\frac{2}{5}$ पट मुले आहेत. जर वर्गामध्ये 10 मुलगे असतील, तर वर्गामधील मुलींची संख्या काढा.

5.5 द्विपदीय रेषीय समीकरणे (Linear Equations in Two Variables)

नेहा पेन्सिल आणि पेन आणण्यासाठी बाजारात गेली. एका पेन्सिलची किंमत ₹ 2 व एका पेनची किंमत ₹ 4 आहे. त्यासाठी तिने ₹ 50 खर्च केले. तर तिने किती पेन्सिली व किती पेन्स खरेदी केली, ते काढा.

तिने किती पेन्सिली व किती पेन्स खरेदी केली, ते काढावयाचे आहे.

तिने x पेन्सिली आणि y पेन्स खरेदी केली, असे मानू

$\therefore$ x पेन्सिलींची एकूण किंमत = ₹ 2x

$\therefore$ y पेन्सची एकूण किंमत = ₹ 4y

एकूण किंमत = ₹ 50.

$\therefore 2x + 4y = 50$ .... (1)

हे द्विपदीय रेषीय समीकरण आहे. यामध्ये चल पदे x आणि y ही आहेत. हे $ax + by + c = 0$ या स्वरूपातील समीकरण आहे.

समीकरण (1) ची उकल काढण्यासाठी आपण x आणि y च्या वेगवेगळ्या किंमती घेऊ.

1. जर $x = 1, y = 12$ तर डावी बाजू $= 2 \times 1 + 4 \times 12 = 2 + 48 = 50$ आणि उजवी बाजू = 50

   $\therefore x = 1$ आणि $y = 12$ ही समीकरणाची उकल आहे.

2. जर $x = 3, y = 12$ तर डावी बाजू $= 2 \times 3 + 4 \times 11 = 6 + 44 = 50$ आणि उजवी बाजू 50

   $\therefore x = 3$ आणि $y = 11$ हीसुद्धा समीकरणाची उकल आहे.

3. जर $x = 4, y = 10$ तर डावी बाजू $= 2 \times 4 + 4 \times 10 = 8 + 40 = 48$ आणि उजवी बाजू = 50

   $\therefore x = 4$ आणि $y = 10$ ही समीकरणाची उकल नाही.

दोन चलपदे असलेल्या रेषीय समीकरणाला एकापेक्षा जास्त उकली असू शकतात.

एक चलपद म्हणजे x असलेले रेषीय समीकरण $ax + b = 0$ आणि $a \neq 0$ या स्वरूपात असते. या समीकरणाला फक्त एकच उकल असते. ती म्हणजे $x = -\frac{b}{a}$

दोन चलपदे, म्हणजे x आणि y असलेले रेषीय समीकरण

$ax + by + c = 0$ ..... (1)

येथे a, b आणि c स्थिरांक आणि a किंवा b यापैकी एक शून्येत्तर संख्या या स्वरूपात असते.

$\therefore$ समीकरण (1) खालील प्रकारे मांडता येते.

$ax = - by - c$

किंवा $x = \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$

या समीकरणामध्ये y च्या प्रत्येक किंमतीसाठी x वेगळी किंमत मिळते. अशा तऱ्हेने दोन चलपदे असलेल्या रेषीय समीकरणाला अनंत उकली असतात.

टीप : $ax + c = 0$, $a \neq 0$, हे रेषीय समीकरण दोन पदे असलेल्या रेषीय समीकरणाच्या रूपात देखील मांडता येते.

$$ax + 0y + c = 0$$

येथे y चा सहगुणक 0 घ्यावा लागतो. या समीकरणासदेखील अनंत उकली असतात. उदा.

$$x = -\frac{c}{a}, y = 0; x = \frac{c}{a}, y = 1 \text{ इ.}$$

या समीकरणात y च्या प्रत्येक किंमतीसाठी x ची किंमत – $-\frac{c}{a}$ येईल.

उदा. 5.12 : दोन पूर्णांक संख्यांची बेरीज 15 आहे.

यासाठी दोन चल पदे वापरून रेषीय समीकरण तयार करा.

उकल : ती चल पदे x आणि y आहेत असे मानू.

$\therefore$ त्यांची बेरीज = $x + y$

परंतु त्याची बेरीज 15 दिलेली आहे.

$\therefore$ समीकरण =

$x + y = 15$

उदा. 5.13 : $4x - 5y = 2$ या समीकरणाच्या

(i) $x = 3, y = 2$ आणि (ii) $x = 4, y = 1$ या उकली आहेत का ते सांगा.

उकल :

1. $4x - 5y = 2$

समीकरणामध्ये $x = 3$ आणि $y = 2$ या किंमती घालून,

डावी बाजू = $4x - 5y$

$= 4(3) - 5(2)$

$= 12 - 10$

$= 2$

= उजवी बाजू

$\therefore$ $x = 3$ आणि $y = 2$ या दिलेल्या समीकरणाच्या उकली आहेत.

2. $4x - 5y = 2$

समीकरणामध्ये $x = 4$ आणि $y = 1$ या किंमती घालून,

डावी बाजू $= 4 -5$

$= 4(4) - 5(1)$

$= 11$

परंतु उजवी बाजू $= 2$

$\therefore$ डावी बाजू $\neq$ उजवी बाजू

$\therefore$ $x = 4$ आणि $y = 1$ या दिलेल्या समीकरणाच्या उकली नाहीत.

आपली प्रगती तपासा 5.5

1. अव्यक्त संख्येसाठी योग्य ती चल पदे वापरून द्विपदीय समीकरण तयार करा.

   1. एका आयताची परिमिती 98 सेंमी. आहे. (लांबी x व रुंदी y धरा.)

   2. वडिलांचे वय मुलाच्या वयाच्या दुपीपेक्षा 10 ने अधिक आहे.

   3. एक संख्या दुसऱ्या संख्येपेक्षा 10 ने मोठी आहे.

   4. 2 किलो सफरचंदे आणि 3 किलो मोसंबी यांची किंमत ₹120 आहे.

   (1 किलो सफरचंदांची किंमत ₹. x आणि 1 किलो मोसंबीची किंमत ₹.y आहे, असे मानू)

2. खालील विधाने सत्य का असत्य ते सांगा.

   1. $3x + 2y - 6 = 0$, या समीकरणाची $x = 0, y = 3$ ही उकल आहे.

   2. $5x + 2y = 10$, या समीकरणाची $x = 2, y = 5$ ही उकल आहे.

5.6 द्विपदीय रेषीय समीकरणांचा आलेख (Gvaph of Linear Equation in Two Variables)

दोन चल पदे असलेल्या रेषीय समीकरणाचा आलेख कसा काढावा, हे आता आपण पाहणार आहोत.

$2x + 3y = 12$ हे समीकरण विचारात घ्या.

हे समीकरण पुढीलप्रमाणेही लिहिता येते.

$2x = 12 - 3y$ किंवा $3y = 12 - 2x$

$\therefore x = \frac{12 - 3y}{2}$ किंवा $y = \frac{12 - 2x}{3}$

प्रत्येक y च्या किंवा x च्या किंमतीसाठी आपल्याला संबंधित दिलेल्या समीकरणाच्या x आणि y च्या उकली असलेले कोष्टक आपण तयार करू.

$2x + 3y = 12$

x	0	6	3	9	-3
y	4	0	2	- 2	6

$x = 0, y = 4; x = 6 , y = 0; x = 3, y = 2; x = 9 ; y = -2;$ आणि $x = -3, y = 6$ या सर्व किंमती समीकरणाच्या उकली आहेत.

या सर्व उकली जोडी रूपात मांडा.

$(0,4),\ (6,0),\ (3, 2),\ (9, -2)$ आणि $(-3,6)$

कंसातील पहिली किमंत x चलाची आणि दुसरी किंमत संबंधित y या चलाची आहे. आलेखकागदावर या किंमती घेऊन बिंदू स्थापन करा. आणि बिंदू जोडा. $2x = 3y = 12$ या समीकरणाच्या आलेखात जे बिंदू उकल असतात, असेच बिंदू आलेखरेषेवर येतात. जे बिंदू उकल नसतात, असे बिंदू मात्र आलेखरेषेवर येत नाहीत. प्रत्येकी बिंदूच्या किंमतीची समाईक जोडी असते. आलेखरेषेवरील बिंदू समीकरणाची उकल असतात. रेषेवर नसणारे बिंदू समीकरणाची उकल नसतात.

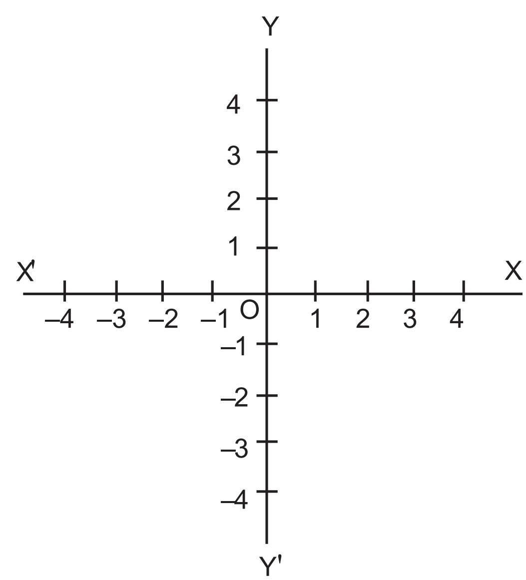
दोन चले असणाऱ्या रेषीय समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी हे बिंदू आपणास प्रतलावर घ्यावे लागतील त्यासाठी पुढील कृती करू.

पायरी 1 : परस्परांस काटकोनात O बिंदूत छेदणाऱ्या X' O X आणि Y' O Y या रेषा काढा. O बिंदू शून्य समजून आणि दोन्ही रेषा संख्यारेषा आहेत, असे समजून संख्यारेषांचे सारखे भाग करा. (आकृती. क्र. 5.2 पहा).

या दोन रेषांमुळे प्रतलाचे चार भाग होतात. प्रत्येक भागास चरण असे म्हणतात हे भाग प्रथम चरण, द्वितीय चरण, तृतीय चरण आणि चतुर्थ चरण म्हणून ओळखले जातात. संख्यारेषा X' O X ला X अक्ष आणि संख्यारेषा Y' O Y ला Y अक्ष असे म्हणतात.

परस्परांना लंब असणारे X अक्ष आणि Y अक्ष ज्या प्रतलात असतात, त्या प्रतलाला निर्देशक प्रतल असे म्हणतात.

प्रतलात बिंदू स्थापन करून आलेख काढण्याची पद्धत फ्रेंच गणिततज्ञ कार्टे

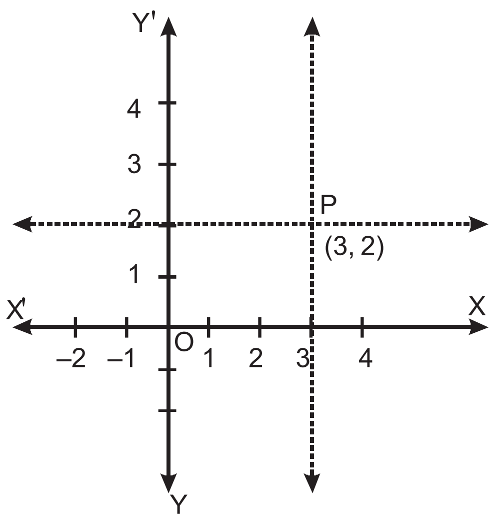


आकृती 5.2

शिअन डेसकार्टेस याने शोधून काढली. त्याच्या सन्मानार्थ या प्रतलास कार्टेशिअन प्रतल असेही म्हणतात.

पायरी 2 : समजा (3, 2) हा बिंदू स्थापन करावयाचा आहे. X अक्षावरील 3 या बिंदूतून X अक्षाला काटकोनात छेदणारी (आणि Y अक्षाला समांतर असणारी) रेषा l काढा.

Y अक्षावरील 2 या बिंदूतून Y अक्षाला काटकोनात छेदणारी (आणि X अक्षाला समांतर असणारी) रेषा m काढा. ही रेषा रेषा l ला P बिंदूत मिळेपर्यंत वाढवा. बिंदू P हा प्रतलातील बिंदू (3,2) चे स्थान दर्शवितो.



आकृती 5.3

टीप :

1. बिंदू निर्देशक क्रमान्वित जोडी (a, b) मधील a ला X निर्देशक आणि b ला Y निर्देशक असे म्हणतात.

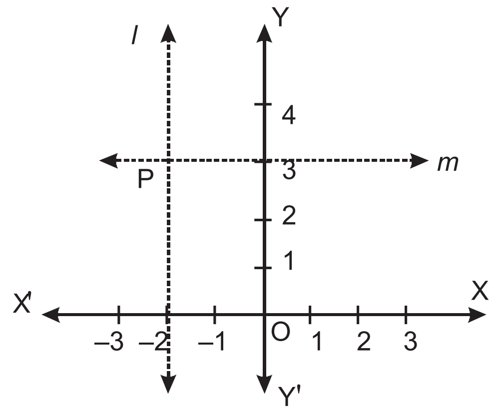
2. X अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचा Y निर्देशक O असल्याने तो आपण (a,O) असा लिहितो. तसेच Y अक्षावरील प्रत्येक बिंदूचा X निर्देशक O असल्याने तो आपण (O, b) असा लिहितो. बिंदू O चे निर्देशक (0, 0) असतात.

3. प्रथम चरणात X आणि Y निर्देशक धन असतात. द्वितीय चरणात X निर्देशक ऋण आणि Y निर्देशक धन असतो. तृतीय चरणात X आणि Y निर्देशक ऋण असतात. चतुर्थ चरणात X निर्देशक धन आणि Y निर्देशक ऋण असतो.

उदा. 5.14 : (–2, 3) हा बिंदू निर्देशक प्रतलात स्थापन करा.

उकल : एका प्रतलावर X - अक्ष आणि Y - अक्ष काढा. अक्षावर बिंदू (1, 2, 3 .....) स्थापन करा.

x अक्षावरील –2 या विंदूतून जाणारी आणि y अक्षाला समांतर असणारी रेषा *l* काढा. y अक्षावरील 3 या विंदूतून जाणारी आणि x अक्षाला समांतर असणारी रेषा b काढा. ही रेषा रेषा *l* ला P विंदूत मिळेपर्य 'त वाढवा. विंदू P हा प्रतलातील विंदू (–2, 3) चे स्थान दर्शवितो. (–2, 3) हे विंदू P चे निर्देशक आहेत.



आकृती 5.4

आता आपण दोन चल पदे असणाऱ्या रेषीय समीकरणाचा आलेख कसा काढतात ते पाहू..

दोन चल पदे असणाऱ्या रेषीय समीकरणाचा आलेख सरळ रेषा असते. आणि रेषेवरील प्रत्येक विंदूचे निर्देशक हे समीकरणाचे उकलसंच असतात. जर एखादा विंदू आलेखरेषेवर नसेल तर तो त्या समीकरणाचा उकलसंच नसतो.

दिलेल्या दोन विंदूतून जाणारी फक्त एक आणि एकच सरळ रेषा काढता येते, हे आपणास माहीत आहेच. त्यामुळे x आणि y च्या उकली असणारे दोन विंदूंचे निर्देशक घेतले तरी चालतील.

विंदू स्थापन करून काढलेले रेषीय समीकरण चुकू नये म्हणून दोन ऐवजी तीन विंदू घ्यावेत.

उदा. 5.15 : $2x - 3y = 6$ या समीकरणाचा आलेख काढा.

उकल : $2x - 3y = 6$ या समीकरणाच्या उकली असणारे विंदू x आणि संबंधित विंदू y च्या किंमती घ्या.

खालील पद्धतीने समीकरण मांडले असता किंमती काढणे आपणास सोयीचे जाते.

$2x = 3y + 6$ किंवा $3y = 2x - 6$

$\Rightarrow x = \dfrac{3y+6}{2}$ किंवा $y = \dfrac{2x-6}{3}$

आता विंदू x चा निरनिराळ्या किंमती घेऊन त्याच्याशी संगत असणाऱ्या y विंदूच्या किंमती काढा.

आपण x च्या निरनिराळ्या किंमती $y = \dfrac{2x-6}{3}$ या समीकरणात घातल्यास आपणास त्याच्याशी संगत y विंदूची किंमत मिळते. जर $x = 0$ तर त्याच्याशी संगत y विंदूची किंमत $y = -2$ मिळते.

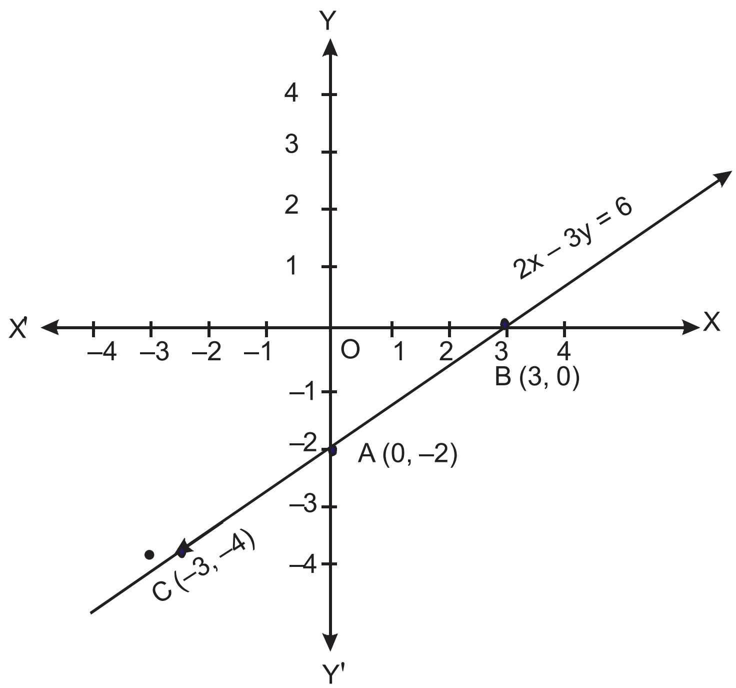
$x = 2$ घेतल्यास $y = 0$ आणि $x = -3$ घेतल्यास $y = -4$ ही किंमत मिळते.

या किंमती आपण कोष्टकात मांडू.

x	0	3	- 3
y	- 2	0	- 4

प्रतलातील बिंदूंची किंमत (0, –2), (3, 0) आणि (–3, –4) आहे. बिंदू स्थापन केल्यानंतर हे बिंदू जोडून आपणास सरळ रेषा मिळते. ही रेषा $2x - 3y = 6$ हे समीकरण दर्शविते.

तीनही बिंदू रेषेवरच आहेत हे ध्यानात घ्या.



आकृती 5.5

उदा. 5.16 : $x = 3$ या समीकरणाचा आलेख काढा.

उकल : $x = 3$, हे एक चल असणारे रेषीय समीकरण असले, तरी आपण ते दोन चल असलेले रेषीय समीकरण म्हणून पुढीलप्रमाणे मांडू शकू.

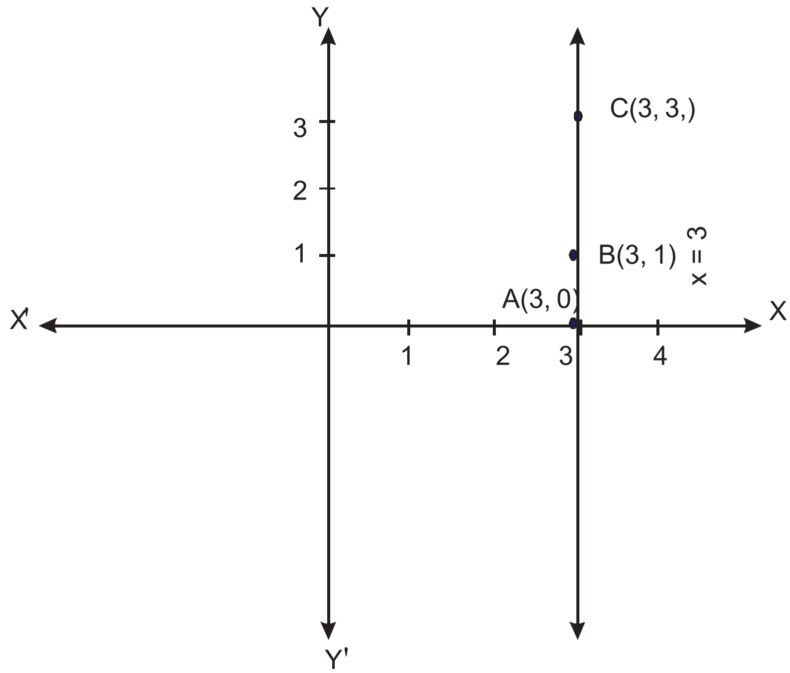
$$x + oy = 3$$

आता x आणि y च्या किंमती मांडून कोष्टक तयार करा.

x	3	3	3
y	3	0	1

y च्या कोणत्याही किंमतीसाठी x ची किंमत 3 हीच कायम आहे. हे लक्षात घ्या.

स्थापन करावयाच्या बिंदूचे निर्देशक (3, 3), (3, 0), (3, 1) हे आहेत.



आकृती 5.6

आपली प्रगती तपासा 5.6

1. कार्टेशिअन प्रतलात खालील बिंदू स्थापन करा.

   1) (3, 4), 2) (–3, –2), 3) (–2, 1),

   4) (2, –3), 5) (4, 0), 6) (0, –3)

2. दोन चल असलेल्या रेषीय समीकरणांचे आलेख काढा.

   1) $x + y = 5$ 2) $3x + 2y = 6$

   3) $2x + y = 6$ 4) $5x + 3y = 4$

5.7 दोन चल असलेली रेषीय समीकरण प्रणाली (System of Linear Equations in Two Variables)

नेहाने 2 पेन्सिली आणि 3 पेन्स ₹19 ला खरेदी केली.

मेरीने 2 पेन्सिली आणि 2 पेन्स ₹16 ला खरेदी केली.

तर पेन्सिल व पेन यांची प्रत्येकी किंमत किती?

एका पेन्सिलची किंमत ₹x आणि एक पेनची किंमत ₹y मानू.

म्हणून नेहाच्या बाबतीत $2x + 3y = 19$ आणि

मेरीच्या बाबतीत $3x + 2y = 16$

अशी समीकरणे तयार होतील.

1 पेन्सिल आणि 1 पेन यांची किंमत काढण्यासाठी समीकरणे सोडवून दोन्ही समीकरणे सत्य होतील. अशा x आणि y या चलाच्या किंमती काढाव्या लागतील.

$$2x + 3y = 19$$

$$3x - 2y = 16$$

या दोन समीकरणांना दोन चले असलेली रेषीय समीकरण प्रणाली आणि दोन्ही समीकरणे सत्य होतील. अशा x आणि y या चलाच्या किंमतींना उकल असे म्हणतात.

ही समीकरणे सोडविण्याच्या अनेक पद्धती आहेत. आलेख पद्धती आणि बैजिक पद्धती या दोन पद्धती आहे. सुरवातीला आपण आलेख पद्धती व नंतर बैजिक पद्धती पाहणार आहोत.

5.7.1 आलेख पद्धती

या पद्धतीत दोन्ही रेषीय समीकरणाचे आलेख एकाच आलेख कागदावर काढावे लागतात. हे आलेख तीनप्रकारचे असून शकतात–

1. **परस्परांना छेदणाऱ्या रेषा :** या दोन्ही रेषांचा छेदनबिंदू म्हणजे दोन्ही समीकरणांची उकल असते. छेदनबिंदूचा x निर्देशक समीकरणातील x ची किंमत दर्शवितो आणि छेदन बिंदूचा y निर्देशक समीकरणातील y ची किंमत दर्शवितो.

   या प्रणालीत समीकरणांची एक अणि एकच उकल असते.

2. **एकरूप रेषा :** या ठिकाणी दोन्ही रेषा एकच असतात. त्यामुळे या प्रणालीत समीकरणांच्या अनंत उकली असतात.

3. **समांतर रेषा :** या ठिकाणी दोन्ही रेषा परंस्परांना समांतर असतात. दोन्ही समीकरणांमध्ये कोणताही बिंदू सामाईक नसतो. त्यामुळे या प्रणालीत समीकरणाची उकल नसते.

उदा. 5.17 : खालील एकसामाईक समीकरण प्रणाली सोडवा.

$$x - 2y = 0 \qquad \ldots\ldots. (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad \ldots\ldots(2)$$

उकल : या समीकरणांचे आलेख काढा. त्यासाठी प्रत्येक समीकरणाच्या x आणि y किंमतीच्या कमीतकमी दोन क्रमित जोड्या घ्या.

त्या किंमत कोष्टकात मांडा.

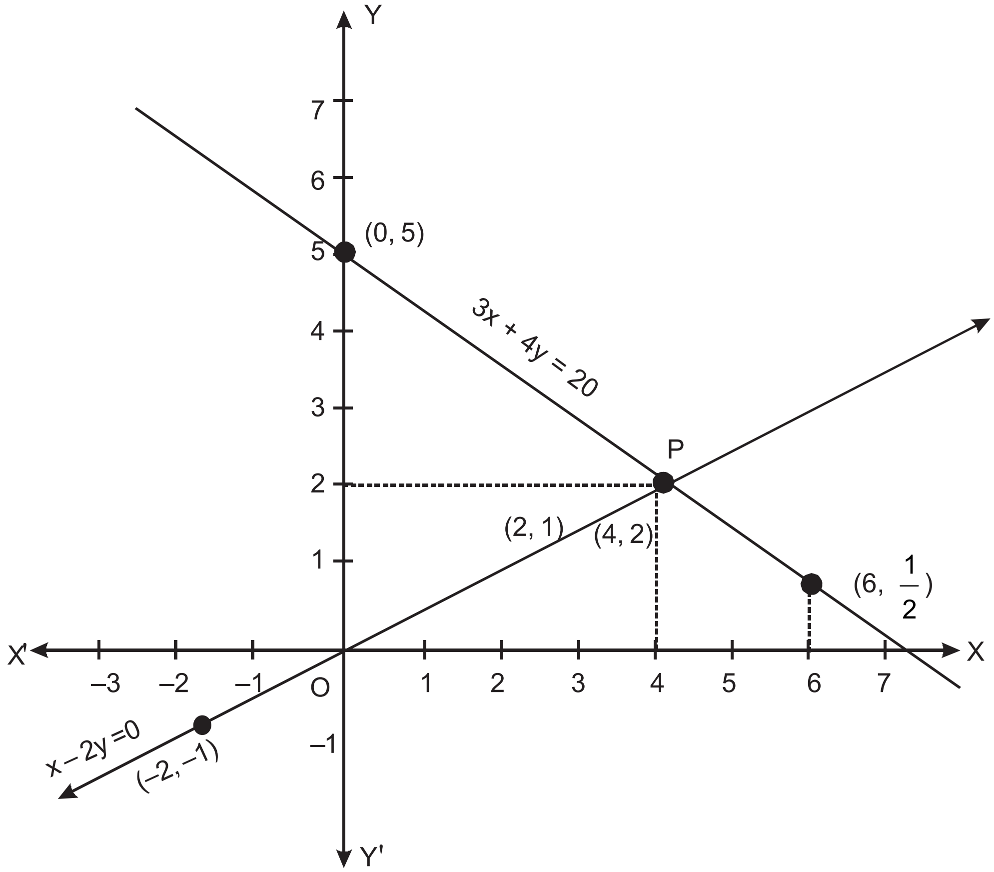
$x - 2y = 0$

X	0	2	-2
y	0	1	-1

$3x + 4y = 20$

x	0	4	6
y	5	2	$\frac{1}{2}$

हे बिंदू एकाच आलेख कागदावर स्थापित करा. हे दोन आलेख P या बिंदूमध्ये छेदतात. P बिंदूचे निर्देशक $(4, 2)$ हे आहेत. म्हणून समीकरणाची उकल $x = 4, y = 2$ दोन्हीं समीकरणामध्ये $x = 4, y = 2$ या किमती घातल्यास दोन्ही समीकरणे सत्य होतात, याचा पडताळा घ्या.



आकृती 5.7

उदा. 5.18 : खालील एकसामायिक समीकरण प्रणाली सोडवा.

$x + y = 8$ .....(1)

$2x - y = 1$ ....(2)

उकल : आलेख काढण्यासाठी दोन समीकरणांच्या x आणि y च्या किंमतीचा तक्ता तयार करा.

$x + y = 8$ $\qquad$ $2x - y = 1$

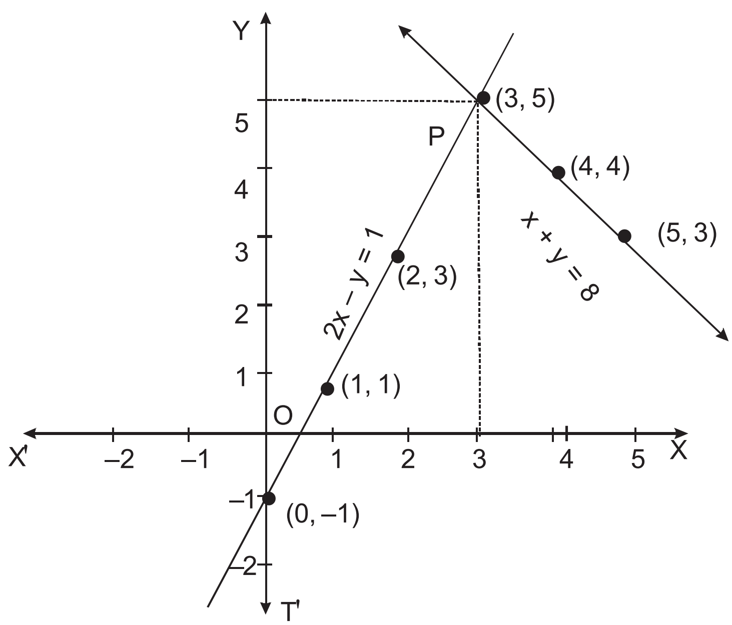
X	3	4	5
y	5	4	3

X	0	1	2
y	-1	1	3

$x + y = 8$ या समीकरणाचा आलेख मिळविण्यासाठी (3, 5), (4, 4), (5, 3) हे बिंदू आलेखकागदावर स्थापन करा. व ते जोडून रेषा काढा. $2x - y = 1$ चा आलेख मिळविण्यासाठी (0, –1), (1, 1), (2, 3) हे बिंदू त्याच आलेख कागदावर स्थापन करा. व ते जोडून रेषा काढा. या दोन रेषा P या बिंदूत परस्परांना छेदतात. बिंदू P चे निर्देशक (3, 5) हे आहेत.

$\therefore$ $x = 3, y = 5$ हा या समीकरण प्रणालीचा उकलसंच आहे.

$x = 3, y = 5$ या किंमतीमुळे दोन्ही समीकरणे सत्य होतात. याचा पडताळा घ्या.



आकृती 5.8

उदा. 5.19 : खालील एकसामाईक समीकरण प्रणाली सोडवा.

$x + y = 2$ .....(1)

$2x + 2y = 4$ .....(2)

उकल : दोन्ही समीकरणांच्या x आणि y च्या किंमतीची कोष्टके तयार करा.

$x + y = 2$

x	0	2	1
y	2	0	1

$2x + 2y = 4$

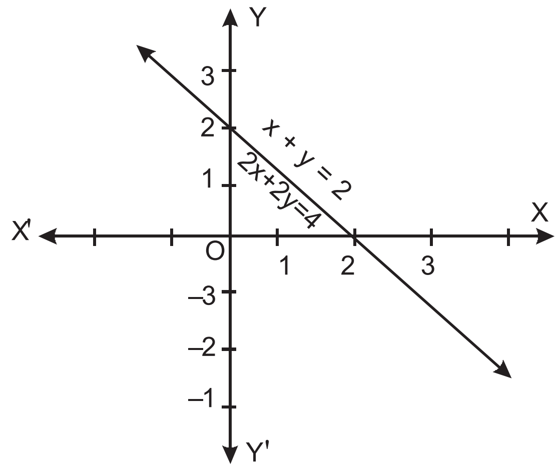
X	0	2	1
y	2	0	1

आता बिंदू स्थापन करून आलेख काढा.

दोन्ही समीकरणाचा आलेख एकच रेषा आली आहे, हे आपल्या लक्षात आले असेलच.

म्हणून या समीकरणांना अनंत उकली आहेत.

उदा. x = 0, y = 2 ; x = 1, y = 1 ; x = 2, y = 0 इ. ही दोन्ही समीकरणे सारखीच समीकरणे आहेत. हेही लक्षात घ्या.



आकृती 5.9

उदा. 5.20 : खालील एकसामायिक समीकरण प्रणाली सोडवा.

$2x - y = 4$ .....(1)

$4x - 2y = 6$ .....(2)

उकल : दोन्ही समीकरणांच्या x आणि y किंमतीच्या क्रमीत जोड्या घेऊन आलेख काढा.

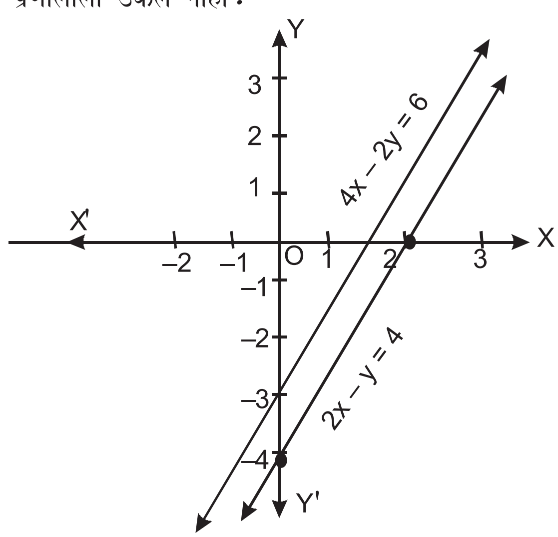
$2x - y = 4$

x	0	2	- 1
y	- 4	0	-6

$4x - 2y = 6$

x	0	1.5	2
y	- 3	0	1

दोन्ही समीकरणांचे आलेख परस्परांना समांतर आहेत. त्यांच्यामध्ये एकही बिंदू सामाईक नाही. म्हणून या समीकरण प्रणालीला उकल नाही.



आकृती. 5.10

आपली प्रगती तपासा 5.7

आलेखाच्या साहाय्याने खालील एकसामायिक समीकरणप्रणाली सोडवा तसेच समीकरण प्रणालीला एक आणि एकच किंवा अनंत उकली आहेत किंवा एकही उकल नाही ते सांगा.

1. $x - y = 3$

   $x + y = 5$

2. $2x + 3y = 1$

   $3x - y = 7$

3. $x + 2y = 6$

   $2x + 4y = 12$

4. $3x + 2y = 6$

   $6x + 4y = 18$

5. $2x + y = 5$

   $3x + 2y = 8$

5.7.2 बैजिक पद्धती (Algrebraic Method)

दोन चलपदे असणारी रेषीय समीकरण प्रणाली सोडविण्याच्या पुष्कळ पद्धती आहेत. यापैकी आपण आलेख पद्धती पाहिली आहेच. आता आपण दोन पद्धती पाहणार आहोत. या बैजिक पद्धती आहेत. त्या म्हणजे,

1. एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात काढणे (Substitution Method)
2. निरसन पद्धती (Elimination Method)

टीप : ज्या वेळेस समीकरण प्रणालीला एक आणि एकच उकल असते, त्यावेळी यापद्धती उपयुक्त ठरतात.

1. या पद्धतीत आपण पहिल्या समीकरणावरून एका चलाची किंमत काढतो आणि ती किंमत दुसऱ्या समीकरणात घालतो. त्यामुळे दुसरे समीकरण एका चलातील रेषीय समीकरण होते. ते आपण सोडवून किंमत काढू शकतो.

   काही उदाहरणांरून ही पद्धती समजावून घेऊ.

उदा. 5.21 : खालील एकसामायिक समीकरण प्रणाली एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात काढून सोडवा.

$$5x + 2y = 8 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$3x - 5y = 11 \qquad \ldots\ldots (2)$$

उकल : समी. (1) वरून,

$5x + 2y = 8$

$\therefore \quad 2y = 8 - 5x$

$\therefore \quad y = \frac{1}{2}(8-5x)$ ....(3)

y ची किंमत समी. (2) मध्ये घालून,

$3x - 5y = 11$

$\therefore 3x - \frac{5}{2}(8-5x) = 11$

$\therefore 6x - 5\ (8 - 5x) = 22$ [दोन्ही बाजूंना 2 ने गुणून]

$\therefore 6x - 40 + 25x = 22$

$\therefore 31x - 40 = 22$

$\therefore 31x = 22 + 40$

$\therefore x = \frac{62}{31} = 2$

x ची 2 ही किंमत समी. (3) मध्ये घालून,

$y = \frac{1}{2}(8-5x)$

$= \frac{1}{2}(8-5\times 2)$

$= \frac{1}{2}(8-10)$

$= \frac{1}{2}(-2)$

$= \frac{-2}{2}$

-1

$\therefore$ उकलसंच $x = 2, y = -1$

उदा. 5.22 : खालील एकसामायिक समीकरण प्रणाली एकचलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात काढून सोडवा.

$2x + 3y = 7$ .....(1)

$3x + y = 14$ .....(2)

उकल : समी. (2) वरून,

$3x + y = 14$

$\therefore \quad y = 14 - 3x$ .....(3)

y ची किंमत समी. (1) मध्ये घालून,

$2x + 3y = 7$

$2x + 3(14 - 3x) = 14$

$2x + 42 - 9x = 14$

$\therefore \quad 2x - 9x = 7 - 42$

$\therefore \quad -7x = -35$

$\therefore \quad x = \dfrac{-35}{-7}$

$\therefore \quad x = 5$

x ची 5 ही किंमत समी. (3) मध्ये घालून,

$y = 14 - 3x$

$\therefore \quad y = 14 - 3(5)$

$\therefore \quad y = 14 - 15$

$\therefore \quad y = -1$

उकलसंच $x = 5, y = -1$

ताळा : $x = 5, y = -1$ या किंमती घालून दोन्ही समीकरणे सत्य होतात. याचा पडताळा घ्या.

अपाली प्रगती तपासा 5.8

खालील एकसमायिक समीकरण प्रणाली एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात काढून सोडवा.

1) $x + y = 14$
$x - y = 2$

2) $2x + 3y = 11$
$2x - 4y = -24$

टिपा

3) $3x + 2y = 11$

$2x + 3y = 4$

4) $7x - 2y = 1$

$3x + 4y = 15$

निरसन पद्धती [Elimination Method]

या पद्धतीत आपण एका चलपदाचा लोप करतो. यासाठी आपण दोन्ही समीकरणांना योग्य त्या शून्येत्तर स्थिरांकाने गुणतो आणि एका चलपदाचा सहगुणक समान करतो. नंतर आपण जरूरीनुसार समीकरणांची बेरीज किंवा वजाबाकी करतो. आणि एक चलपदाचा लोप करतो. त्यामुळे एकच चलपद असलेले समीकरण शिल्लक राहते व आपल्याला चलपदाची किंमत काढता येते.

काही उदाहरणांवरून ही पद्धती समजावून घेऊ.

उदा. 5.23 : निनरसन पद्धतीने एकसामायिक समीकरण प्रणाली सोडवा.

$3x - 5y = 4$ ......(1)

$9x - 2y = 7$ ......(2)

उकल : x चा लोप करण्यासाठी समीकरण (1) ला 3 ने गुणा

त्यामुळे x चे सहगुणक समान होतील.

$\therefore \quad 9x - 15y = 12$ .....(3)

$9x - 2y = 7$ .....(4)

समीकरण (4) मधून (3) वजा करून,

$9x - 15y - (9x - 2y) = 12 - 7$

$\therefore \quad 9x - 15y - 9x + 2y = 5$

$\therefore \quad -13y = 5$

$\therefore \quad y = -\frac{5}{13}$

$y = -\frac{5}{13}$ ही किंमत समीकरण (1) मध्ये घालून,

$3x - 5y = 4$

$\therefore \quad 3x - 5\times\left(-\frac{5}{13}\right) = 4$

$\therefore \quad 3x + \frac{25}{13} = 4$

$\therefore \quad 3x = \frac{4}{1} - \frac{25}{13}$

$\therefore \quad 3x = \dfrac{27}{13}$

$\therefore \quad x = \dfrac{27}{13} \times \dfrac{1}{3}$

$\therefore \quad x = \dfrac{9}{13}$

उकलसंच = $x = \dfrac{9}{13}, y = -\dfrac{5}{13}$

उदा. 5.24 : लोप पद्धतीने एकसामायिक समीकरण प्रणाली सोडवा.

$2x + 3y = 13 \qquad .....(1)$

$5x - 7y = -11 \qquad ......(2)$

उकल : y या चलपदाचा लोप करण्यासाठी समीकरण (1) ला 7 ने आणि समीकरण (2) ला 3 ने गुणून,

$14x + 21y = 91 \qquad .....(3)$

$15x - 21y = -33 \qquad .....(4)$

समीकरण (3) व समीकरण (4) यांची बेरीज करून,

$29x = 58$

$\therefore \quad x = \dfrac{58}{29}$

$\therefore \quad x = 2$

x ची 2 ही किंमत समीकरण (1) मध्ये घालून,

$2x + 3y = 13$

$\therefore \quad 2(2) + 3y = 13$

$\therefore \quad 4 + 3y = 13$

$\therefore \quad 3y = 13 - 4$

$\therefore \quad 3y = 9$

$\therefore \quad y = \dfrac{9}{3}$

$\therefore \quad y = 3$

उकलसंच = $x = 2, \qquad y = 3$

आपली प्रगति तपासा 5.9

खालील एकसामायिक समीकरण प्रणाली निरसन पद्धतीने सोडवा.

1) $3x + 4y = -6$
$3x - y = 9$

2) $x + 2y = 5$
$2x + 3y = 8$

3) $x - 2y = 7$
$3x + y = 35$

4) $3x + 4y = 15$
$7x - 2y = 1$

5) $2x + 3y = 4$
$3x + 2y = 11$

6) $3x - 5y = 23$
$2x - 4y = 16$

5.8 शाब्दिक उदाहरणे [Word Problems]

उदा. 5.25 : एका आयताकृति बागेची परिमिती 20 मी आहे. बागेची लांबी रुंदीपेक्षा 4 मी ने जस्त असल्यास बागेची लांबी व रुंदी काढा.

उकल : बागेची लांबी x मी. आहे असे मानू,

∴ बागेची रुंदी $(x - 4)$ मी येईल. बागेची परिमिती 20 मी आहे.

∴ समीकरण =

$2[x + (x - 4)] = 20$

∴ $2(2x - 4) = 20$

∴ $2x - 4 = \frac{20}{2}$

∴ $2x - 4 = 10$

∴ $2x = 10 + 4$

∴ $2x = 14$

∴ $x = 7$

बागेची लांबी $= x = 7 = 7$ मी

बागेची रुंदी $= x - 3 = 7 - 3 = 4$ मी.

हेच उदाहरण आपण दोन चलांचा वापर करूनसुद्धा सोडवू शकतो. ते पुढीलप्रमाणे

बागेची लांबी x मी व बागेची रुंदी y मी आहे, असे मानू

समीकरण =

$x = y + 4$ ......(1)

बागेची परिमिती 20 मी आहे.

$\therefore \quad 2(x + y) = 20$

$\therefore \quad x + y = \dfrac{20}{2}$

$\therefore \quad x + y = 10 \qquad \ldots\ldots\ (2)$

समीकरण (1) व समीकरण (2)

$x = y + 4$

$\therefore \quad x - y = 4$

$x + y = 10$

$\therefore \quad 2x = 14$

$\therefore \quad x = \dfrac{14}{2} = 7$

$\therefore \quad y = 10 - 7 = 3$

$\therefore$ लांबी = 7 मी रुंदी = 3 मी

उदा. 5.26 : आशा रॉवर्टपेक्षा 5 वर्षांनी मोठी आहे. पाच वर्षापूर्वी, आशाचे वय रॉवर्टच्या त्या वेळच्या वयाच्या दुप्पट होते. तर त्यांची आजची वये काढा.

उकल : आशाचे आजचे वय x वर्षे आणि

रॉवर्टचे आजचे वय y वर्षे आहे, असे मानू,

$\therefore \quad x = y + 5$

$\therefore \quad x - y = 5 \qquad \ldots\ldots(1)$

5 वर्षांपूर्वी –

आशाचे वय = $(x - 5)$ वर्षे

रॉवर्टचे वय = $(y - 5)$ वर्षे

$\therefore \quad x - 5 = 2(y - 5)$

$\therefore \quad x - 5 = 2y - 10$

$\therefore \quad x - 2y = -10 + 5$

$\therefore \quad x - 2y = -5 \qquad \ldots(2)$

समीकरण (1) व समीकरण (2) सोडवून मिळालेले उत्तर

$y = 10$ आणि $x = 15$

$\therefore$ आशाचे आजचे वय = 15 वर्षे

$\therefore$ रॉवर्टचे आजचे वय = 10 वर्षे

उदा. 5.27 : A आणि B या दोन ठिकाणांमधील अंतर 100 किमी आहे. एकाच वेळी A आणि B या दोन ठिकाणांवरून प्रत्येकी एक मोटार निघते. जर त्या मोटारी एका दिशेने प्रवास करत असतील, तर त्या एकमेकींना 5 तासाने भेटतील. परंतु त्या विरुद्ध दिशेने प्रवास करत असतील तर एका तासाने परस्परांना भेटतील. तर दोन्ही मोटारींचा दर ताशी वेग काढा. A ठिकाणाहून निघालेल्या मोटारीचा वेग B ठिकाणाहून निघालेल्या मोटारीच्या वेगापेक्षा जास्त आहे, हे गृहीत धरा.

उकल : A ठिकाणाहून निघालेल्या मोटारीचा ताशी वेग x किमी आहे आणि

B ठिकाणाहून निघालेल्या मोटारीचा ताशी वेग y किमी आहे, असे मानू,

$\therefore$ A ठिकाणाहून निघालेल्या मोटारीने 5 तासात काढलेले अंतर = 5x किमी

$\therefore$ B ठिकाणाहून निघालेल्या मोटारीने 5 तासात काढलेले अंतर = 5y किमी

दोन्ही मोटारी एकाच दिशेने प्रवास करत आहेत आणि 5 तासाने एकमेकींना भेटतील याचाच अर्थ असा B मोटारीपेक्षा A मोटारीने 100 किमी अंतर जास्त कापले आहे.

$\therefore \quad 5x - 5y = 100$

$\therefore \quad x - y = 20 \qquad .....(1)$

मोटारी विरुद्ध दिशेने प्रवास करत असतील तर एक तासाने परस्परांना भेटतील. याचाच अर्थ असा की A आणि B या ठिकाणाहून निघालेल्या दोन्ही मोटारींनी मिळून एका तासाच काढलेले अंतर 100 किमी आहे.

$\therefore \quad x + y = 100 \qquad .....(2)$

समीकरण (1) व समी (2) सोडवून $x = 60$ आणि $y = 40$ असे उत्तर

$\therefore$ A ठिकाणाहून निघालेल्या मोटारीचा ताशी वेग 60 किमी.

$\therefore$ B ठिकाणाहून निघालेल्या मोटीचा ताशी वेग 40 किमी.

आपली प्रगती तपासा 5.10

1) रहीमच्या वडिलांचे आजचे वय रहिमच्या आजच्या वयाच्या तिप्पट आहे. त्यांच्या वयांची बेरीज 56 वर्षे आहे. तर त्या दोघांची आजची वये काढा.

2) रिटाकडे 18 मी कापड आहे. तिने त्या कापडाचे दोन तुकडे केले. त्यापैकी एक तुकडा दुसऱ्या तुकड्यापेक्षा 4 मीटरने मोठा आहे. तर लहान तुकड्याची लांबी काढा.

3) वक्षिसाची रक्कम ₹50,000 एकंदर 200 बक्षिस विजेत्यांना वाटावयाची आहे. प्रत्येक बक्षिस ₹500 किंवा ₹100 चेच आहे. तर ₹500 ची व ₹100 ची प्रत्येकी किती बक्षिसे दिली ते काढा.

4) एका पाकिटात ₹50 आणि ₹100 च्या नोटा मिळून ₹2500 इतकी रक्कम होती. ₹50 च्या नोटांच्या संख्येपेक्षा ₹100 च्या नोटांची संख्या एकने जास्त होती. तर पाकिटात ₹50 व ₹100 च्या प्रत्येकी किती नोटा होत्या, ते काढा.

तुम्ही काय शिकलात?

- ज्या बहुपदीमध्ये चलाची कोटी एक असते, त्या बहुपदीस एकचल एकरेषीय समीकरण असे म्हणतात.
- एकचल एकरेषीय समीकरणाचे सर्वसामान्य रूप $ax + b = 0$येथे $a \neq 0$, a आणि b स्थिरपदे, असे असते.
- चलपदाच्या ज्या किंमतीने रेषीय समीकरण सत्य होते त्या किंमतीस त्या समीकरणाची उकल किंवा मूळ असे म्हणतात.
- शाब्दिक उदाहरणे सोडविण्यासाठी दिलेल्या माहितीवरून बैजिक विधान (समीकरण) तयार करावे आणि ते सोडवावे.
- द्विचल एकरेषीय समीकरणाचे सर्वसामान्य रूप, $ax + by + c = 0$ येथे a, b आणि c स्थिरांक आणि a किंवा b यापैकी एक शून्येत्तर संख्या, असे असते.
- $ax + c = 0$ हे समीकरण दोन चलपदे असलेल्या रेषीय समीकरणाच्या स्वरूपात मांडता येते.

  $ax + oy + c = 0$ हे ते स्वरूप होय.
- दोन चलपदे असणाऱ्या रेषीय समीकरणाचा आलेख काढण्यासाठी त्या समीकरणाची उकल असणारे कमीत कमी दोन निर्देशक बिंदू आलेख प्रतलात स्थापित करावे आणि आलेख काढावा.
- दोन चल असणाऱ्या रेषीय समीकरणाचा आलेख एक रेषा असते.
- दोन चल असणारी दोन एकसामायिक समीकरणे सोडविण्यासाठी त्या दोन समीकरणांचे आलेख एकाच आलेख कागदावर काढावेत.

  1) ते आलेख एकमेकांना छेदतात. छेदबिंदूची किंमत म्हणजे समीकरणांची एक आणि एकच उकल असते.

  2) आलेखाच्या दोन्ही रेषा एकच असतात. समीकरणांच्या अनंत उकली असतात.

  3) आलेखाच्या दोन्ही रेषा परस्परांना समांतर असतात. समीकरणाची उकल नसते.
- रेषीय समीकरण प्रणाली सोडविण्याच्या दोन बैजिक पद्धती आहेत.

  1) एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात काढणे.

  2) निरसन पद्धती

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. योग्य पर्याय निवडा.

1) खालीलपैकी एकचलरेषीय समीकरण कोणते?

(A) $2x + 1 = y - 3$ (B) $3t - 1 = 2t + 5$

(C) $2x - 1 = x^2$ (D) $x^2 - x + 1 = 0$

2) खालीलपैकी कोणते समीकरण रेषीय समीकरण नाही.

(A) $5 + 4x = y + 3$ (B) $x + 2y = y - x$

(C) $3 - x = y^2 + 4$ (D) $x + y = 0$

3) खालीलपैकी कोणती संख्या $2(x + 3) = 18$ या समीकरणाची उकल आहे?

(A) 6 (B) 12 (C) 13 (D) 21

4) $2x - (4 - x) = 5 - x$ हे समीकरण सत्य होण्यासाठी x ची किंमत .... असावी.

(A) 4.5 (B) 3 (C) 2.25 (D) 0.5

5) $x - 4y = 5$ या समीकरणाला

(A) एकही उकल नाही. (B) फक्त एक आणि एकच उकल आहे.

(C) दोन उकली आहेत. (D) अनंत उकली आहेत.

2. खालील समीकरणे सोडवा.

1) $2z + 5 = 15$ 2) $\frac{x+2}{3} = -2$

3) $\frac{4-2y}{3} + \frac{y+1}{2} = 1$ 4) $2.5x - 3 = 0.5x + 1$

3. एका संख्येत 8 मिळविले असता उत्तर 26 येते. तर ती संख्या काढा.

4. रीना आणि मीना यांच्या आजच्या वयाचे गुणोत्तर 4:5 आहे. 8 वर्षानंतर हेच गुणोत्तर 5 : 6 होईल. तर त्यांची आजची वये काढा.

5. एक परिमेय संख्येचा छेद अंशापेक्षा 8 ने मोठा आहे. जर छेद 1 ने कमी केला आणि अंश 17 ने वाढविला, तर $\frac{3}{2}$ ही संख्या मिळते. तर मूळ परिमेय संख्या काढा.

6. आलेखाच्या साहाय्याने खालील समीकरण प्रणाली सोडवा.

1) $x - 2y = 7$, $x + y = -2$
2) $4x + 3y = 24$, $3y - 2x = 6$
3) $x + 3y = 6$, $2x - y = 5$
4) $2x - y = 1$, $x + y = 8$

7. खालील समीकरण प्रणाली सोडवा.

1) $x + 2y - 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$
2) $2x + 3y = 3$, $3x + 2y = 2$
3) $3x - y = 7$, $4x - 5y = 2$
4) $5x - 2y = -7$, $2x + 3y = -18$

8. एका दोन अंकी संख्येतील अंकांची बेरीज 11 आहे. जर अंकांची अदलाबदल केली तर तयार होणारी संख्या मूळ संख्येपेक्षा 27 ने कमी आहे. तर मूळ संख्या काढा.

9. तीन वर्षापूर्वी अतुलचे वय पारुलच्या वयाच्या चौपट होते. आजपासून पाच वर्षांनी अतुलचे वय पारुलच्या त्या वेळच्या वयाच्या दुप्पट असेल. तर दोघांची आजची वये सांगा.

10. एका आयताकृति भूखंडाची परिमिती 32 मी आहे. जर लांबी 2 मीने वाढविली आणि रुंदी 1 मीने कमी केली तर भूखंडाच्या क्षेत्रफळात बदल होत नाही. भूखंडाची लांबी व रुंदी काढा.

प्रश्नांची उत्तरे

5.1

1. 1)   2. 1)

5.2

1) $15 - 2x = 7$ 2) $0.1x = 10$
3) $6y = 96$ 4) $t + 15 = 4t$

5.3

1) $x = 13$ 2) $y = 12$ 3) $z = 0$
4) $y = 9$ 5) $x = 5$

5.4

1) 39, 46   2) 15 वर्षे, 50 वर्षे
3) 22 सें. मी., 11 सें. मी.   4) 25

5.5

1. 1) 2 (x + y) = 98

   2) y = 2x + 10, मुलाचे वय = x वर्षे, वडिलांचे वय = y वर्षे

   3) x + 10 = y

   4) 2x + 3y = 120

2. 1) सत्य 2) असत्य

5.7

1) x = 4, y = 1 फक्त एक आणि एकच उकल

2) x = 2, y = –1फक्त एक आणि एकच उकल

3) अनंत उकली

4) उकल नाही.

5) x = 2, y = 1 फक्त एक आणि एकच उकल

5.8

1) x = 8, y = 6 2) x = –2, y = 5

3) x = 5, y = –2 4) x = 1, y = 3

5.9

1) x = 2, y = –3 2) x = 1, y = 2

3) x = 11, y = 2 4) x = 1, y = 3

5) x = 5, y = – 2 6) x = 6, y = –1

5.10

1) 14 वर्षे, 42 वर्षे

2) 7 मी.

3) ₹500 ची 75 आणि ₹100 ची 125 बक्षिसे

4) ₹100 च्या 17 आणि ₹50 च्या 16 नो

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह – उत्तरे

1. 1) B 2) C 3) A 4) C 5) D

2. 1) z = 5 2) x = –8 3) y = 5 4) x = 2

3. 18

4. रीनाचे वय 32 वर्षे, मीनाचे वय 40 वर्षे

5. $13/21$

6. 1) $x = 1, y = -3$ 2) $x = 3, y = 4$
   3) $x = 3, y = 1$ 4) $x = 3, y = 5$

7. 1) $x = 1, y = 1$ 2) $x = 0, y = 1$
   3) $x = 3, y = 2$ 4) $x = -3, y = -4$

8. 74

9. अतुल 19 वर्षे, पारुल 7 वर्षे

10. 10 मी, 60 मी.

❖ ❖ ❖

6

वर्गसमीकरणे

या पाठात आपण वर्गसमीकरणांची माहिती घेणार आहोत. दिलेल्या समीकरणांमधून वर्गसमीकरणे कोणती हे ओळखण्यास शिकणार आहोत. वर्गसमीकरणे त्याच्या सामान्य रूपात मांडावयास शिकणार आहोत. आपण वर्गसमीकरणे सोडविण्यास शिकणार आहोत. तसेच वर्गसमीकरणांचा उपयोग करून शाब्दिक उदाहरणे सोडविणार आहोत.

उद्दिष्टे :

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खालील बाबींचे ज्ञान होईल.

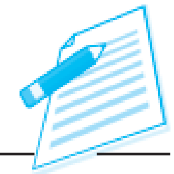
- दिलेल्या समीकरणांच्या समुहामधून वर्गसमीकरणे वेगळी ओळखता येतील.
- वर्गसमीकरणे सामान्य रूपात लिहीता येतील.
- वर्गसमीकरणे (1) अवयव पाडून (2) सूत्र वापरून सोडविता येतील.
- वर्गसमीकरणाचा वापर करून शाब्दिक उदाहरणे सोडविता येतील.

अपेक्षित पूर्वज्ञान

- बहुपदी
- बहुपदीची शून्य किंमत
- रेषीय समीकरणांची उकल
- बहुपदीचे अवयव

5.1 वर्गसमीकरणे (Quadratic Equations)

दुसऱ्या कोटीच्या बहुपदींची माहिती आपल्याला आहेच. ज्या बहुपदीची कोटी दोन असते, अशा बहुपदीलाच वर्गबहुपदी असे म्हणतात. या पाठात आपण फक्त एकच चल असलेले वर्गसमीकरण पाहणार आहोत.



दिलेल्या समीकरणापैकी समुहामधून वर्गसमीकरणे कशी ओळखावीत, हे आपण आत्ता पाहणार आहोत.

उदा. 6.1 : खालील समकीणांपैकी वर्गसमीकरणे कोणती आहेत?

1) $3x^2 = 5$ 2) $x^2 + 2x + 3 = 0$

3) $x^3 + 1 = 3x^2$ 4) $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$

5) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ 6) $x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$

उकल :

1) $3x^2 = 5$

हे वर्गसमीकरण आहे. $3x^2 = 5$ ही बहुपदी

$3x^2 - 5 = 0$ अशीही मांडता येईल.

आणि $3x^2 - 5$ ही वर्गबहुपदी आहे.

2) $x^2 + 2x + 3 = 0$

हे वर्गसमीकरण आहे. कारण $x^2 + 2x + 3$ ही वर्गबहुपदी आहे.

3) $x^3 + 1 = 3x^2$

ही बहुपदी $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ अशीही लिहिता येईल.

डाव्या बाजूच्या बहुपदीची उच्चतम कोटी 3 आहे.

ही वर्गबहुपदी नाही म्हणून हे वर्गसमीकरण नाही.

4) $(x + 1)(x + 3) = 2x + 1$

$\therefore x^2 + 4x + 3 = 2x + 1$

$x^2 + 2x + 2 = 0$

डाव्या बाजूची उच्चतम कोटी 2 आहे.

$\therefore (x + 1)(x + 3) = 2x + 1$ हे वर्गसमीकरण आहे.

5) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ या ठिकाणी $\frac{1}{x}$ चा घातांक -1 आहे.

म्हणून हे वर्गसमीकरण नाही.

तरीसुद्धा ही बहुपदी आपण वर्गसमीकरणाच्या स्वरूपात मांडू शकतो.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2} \quad x \neq 0$$

किंवा $2(x^2 + 1) = 5x$, $\quad x \neq 0$

किंवा $2x^2 - 5x + 2 = 0$, $\quad x \neq 0$

6) $x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$ हे वर्गसमीकरण नाही. कारण $x^2 + \sqrt{x} + 1$ ही वर्गबहुपदी नाही. (कारण सांगा)

आपली प्रगती तपासा 6.1

1. खालील समीकरणापैकी वर्गसमीकरणे कोणती आहेत?

1) $3x^2 + 5 = x^3 + x$

2) $\sqrt{3}\, x^2 + 5x + 2 = 0$

3) $(5y + 1)(3y - 1) = y + 1$

4) $\dfrac{x^2 + 1}{x + 1} = \dfrac{5}{2}$

5) $3x + 2x^2 = 5x - 4$

6.2 वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप (Standard Form of a quadratic Equation)

$ax^2 + bx + c = 0$, जेथे a, b आणि c हे स्थिरांक आणि $a > 0$ आणि x हे चलपद असते, अशा मांडणीला वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप असे म्हणतात. कोणतेही वर्गसमीकरण सामान्य रूपात लिहीता येते.

उदा. 6.2 : खालीलपैकी कोणती वर्गसमीकरणे सामान्य रूपात आहेत? जी वर्गसमीकरणे सामान्य रूपात नाहीत, ती सामान्य रूपात लिहा.

1) $2 + 3x + 5x^2 = 0$

2) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

3) $7y^2 - 5y = 2y + 3$

4) $(z + 1)(z + 2) = 3z + 1$

उकल :

1) $2 + 3x + 5x^2 = 0$

हे वर्गसमीकरण सामान्य रूपात नाही.

या वर्गसमीकरणाचे सामान्य रूप $5x^2 + 3x + 2 = 0$ हे आहे.

2) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

हे वर्गसमीकरण सामान्य रूपात आहे.

3) $7y^2 - 5y = 2y + 3$

हे वर्गसमीकरण सामान्य रूपात नाही.

हे सामान्य रूपात मांडू

$7y^2 - 5y = 2y + 3$

$\therefore 7y^2 - 5y - 2y - 3 = 0$

$\therefore 7y^2 - 7y - 3 = 0$

हे सामान्य रूपातील वर्गसमीकरण तयार झाले.

4) $(z + 1)(z + 2) = 3z + 1$

हे समीकरण सामान्य रूपात नाही.

हे सामान्य रूपात मांडू.

$(z + 1)(z + 2) = 3z + 1$

$\therefore z^2 + 3z + 2 = 3z + 1$

$\therefore z^2 + 3z + 2 - 3z - 1 = 0$

$\therefore z^2 - 1 = 0$

$\therefore z^2 + 0z - 1 = 0$

हे सामान्य रूपातील वर्गसमीकरण तयार झाले.

आपली प्रगती तपासा 6.2

1) खालीलपैकी कोणती वर्गसमीकरणे सामान्य रूपात आहेत. जी वर्गसमीकरणे सामान्य रूपात नाहीत, ती वर्गसमीकरणे सामान्य रूपात लिहा.

1) $3y^2 - 2 = y + 1$ 2) $5 - 3x - 2x^2 = 0$

3) $(3t - 1)(3t + 1) = 0$ 4) $5 - x - 3x^2$

6.3 वर्गसमीकरण सोडविणे (Solution of a Quadratic Equation)

बहुपदीची शून्य किंमत म्हणजे काय, हे आपण पाहिले आहेच. बहुपदीची शून्य किंमत म्हणजे अशी वास्तव संख्या, की जी संख्या बहुपदीतील चल पदाऐवजी घातली असता बहुपदीची किंमत शून्य येते. वर्ग समीकरणाच्या बाबतीत चलपदाच्या ज्या किंमतीमुळे वर्गसमीकरणाची डावी आणि उजवी बाजू समान होते,

त्या किंमतीस त्या वर्गसमीकरणाचे मूळ असे म्हणतात. आपणास हे माहीत आहे की बहुपदी p(x) ची शून्य किंमत α असल्यास बहुपदी p(x) चा $(x-\alpha)$ हा अवयव असतो. याउलट ज्या बहुपदीचा $(x-\alpha)$ हा अवयव असतो, त्या बहुपदीची शून्य किंमत α असते. या माहितीचा वापर आपणास वर्गसमीकरणे सोडविताना करता येईल. वर्गसमीकरणे सोडविण्याच्या दोन बैजिक पद्धती आहेत. (1) अवयव पद्धती (2) सूत्र पद्धती

1. अवयव पद्धती :

वर्गसमीकरणाचे अवयव पाडून वर्गसमीकरण सोडविता येते. या पद्धतीची काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 6.3 : $(x-4)(x+3)=0$ हे समीकरण सोडवा.

उकल : $(x-4)(x+3)=0$

$\therefore (x-4)$ किंवा $x+3=0$

$\therefore x=4$ किंवा $x=-3$

$\therefore x=4$ आणि $x=-3$ या वर्गसमीकरणाच्या उकली आहेत.

उदा. 6.4 : अवयव पद्धतीने $6x^2+7x-3=0$ वर्गसमीकरण सोडवा.

उकल : $6x^2+7x-3=0$

मधल्या पदाची फोड करून,

$\underline{6x^2+9x}-\underline{2x-3}=0$ $[6\times -3=-18$ आणि $-18=9\times(-2)]$

$\therefore 3x(2x+3)-1(2x+3)=0$

$\therefore (2x+3)(3x-1)=0$

$\therefore 2x+3=0$ किंवा $3x-1=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ किंवा $x=\frac{1}{3}$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ आणि $x=\frac{1}{3}$ या वर्गसमीकरणाच्या उकली आहेत.

उदा. 6.5 : सोडवा. $x^2+2x+1=0$

उकल : $x^2+2x+1=0$

$\therefore (x+1)^2=0$

$\therefore x+1=0$

$\therefore x=-1$

$x=-1$ ही एक आणि एकच उकल आहे.

टीप : उदा. 6.3 आणि 6.4 मध्ये दोन वेगवेगळ्या उकली आहेत. परंतु उदा 6.5 मध्ये मात्र एकच उकल आहे. पण या उदाहरणालासुद्धा दोन उकली आहेत. परंतु त्या दोन्हीही उकली योगायोगाने एकरूप आहेत, असे म्हणता येईल.

आपली प्रगती तपासा 6.3

1. अवयव पद्धतीने खालील समीकरणे सोडवा.

1) $(2x + 3)(x + 2) = 0$	2) $x^2 + 3x - 18 = 0$
3) $3x^2 - 4x - 7 = 0$	4) $x^2 - 5x - 6 = 0$
5) $25x^2 - 10x + 1 = 0$	6) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

वर्गीय सूत्र पद्धती (Quadratic Formula)

वर्ग समीकरण सोडविण्यासाठी सूत्र तयार करण्याविषयीची माहिती आपण घेणार आहोत.त्यासाठी आपण सामान्य वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ याचा वापर करू.

$ax^2 + bx + c = 0$

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूस 4a या पदाने गुणू म्हणजे x^2 चा सहगुणक हे पूर्णवर्गाचे पद असेल.

$\therefore 4a^2 x^2 + 4abx + 4ac = 0$

$\therefore (2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac = 0$

$\therefore (2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac + b^2 = b^2$ दोन्ही बाजूकडे b^2 मिळवू

$\therefore (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 = b^2 - 4ac$

$$(2ax + b)^2 = \left\{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}\right\}^2$$

$$\therefore 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

या सूत्रामुळे $ax^2 + bx + c = 0$ वर्गसमीकरणाच्या दोन उकली किंवा दोन मुळे मिळतात.

$\therefore$ वर्गसमीकरणाची दोन मुळे =

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ आणि } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$(b^2 - 4ac)$ या राशीला विवेचक असे म्हणतात. ही राशी D या अक्षराने दर्शविली जाते. वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप $(b^2 - 4ac)$ या राशीवरून निश्चित केले जाते. वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$, साठी

1) जर $D = b^2 - 4ac > 0$, तर वर्ग समीकरणास दोन वास्तव मुळे असतात. ती म्हणजे,

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ आणि } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2) जर $D = b^2 - 4ac = 0$ तर वर्गसमीकरणास दोन समान मुळे असतात. प्रत्येक मूळ $= \dfrac{-b}{2a}$

3) $D = b^2 - 4ac < 0$, तर वर्गसमीकराला वास्तव मुळे असणार नाहीत. कारण ऋण वास्तव संख्येचे वर्गमूळ काढताच येत नाही. वर्गसमीकरणास जास्तीत जास्त दोन मुळे असतात.

उदा. 6.5 : वर्गसमीकरणांची मुळे न काढता खालील वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप सांगा.

1) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

2) $2x^2 + x + 1 = 0$

3) $x^2 + 2x + 1 = 0$

उकल :

1) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

समीकरणाची $ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणाशी तुलना करून $a = 3, b = -5, c = -2$

$\therefore$ विवेचक $D = b^2 - 4ac$

$= (-5)^2 - (4 \times 3 \times -2)$

$= 25 + 24$

$= 49$

$D > 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाला दोन वास्तव मुळे आहेत.

2) $2x^2 + x + 1 = 0$

समीकरणाची $ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणाशी तुलना करून

$a = 2, b = 1, c = 1$

विवेचक $D = b^2 - 4ac$

$= (1)^2 - 4\ (2 \times 1)$

$= 1 - 8$

$= -7$

$D < 0$ $\therefore$ वर्गसमीकरणाला वास्तव मुळे असणार नाहीत.

3) $x^2 + 2x + 1 = 0$

समीकरणाची $ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणाशी तुलना करून

$a = 1, b = 2, c = 1$

$\therefore$ विवेचक $D = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4\ (1 \times 1)$

$= 4 - 4 = 0$

$D = 0$

$\therefore$ वर्गसमीकरणाला दोन समान मुळे आहेत.

उदा. 6.7 : सूत्राच्या साहाय्याने $6x^2 - 19x + 15$ ची मुळे काढा.

उकल : $6x^2 - 19x + 5$

समीकरणाची $ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणाशी बुलना करून,

$a = 6, b = -19, c = 15$

विवेचक $D = b^2 - 4ac$

$= (-19)^2 - 4\ (6 \times 15)$

$= 361 - 360$

$= 1$

$\therefore$ समीकरणाची मुळे =

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-19) \pm \sqrt{1}}{12}$$

$\therefore$ मुळे $\frac{19+1}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

आणि $\frac{19-1}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ मुळे $\frac{5}{3}$ आणि $\frac{3}{2}$

उदा. 6.8 : वर्गसमीकरणाची मुळे समान असल्यास, $3x^2 + mx - 5 = 0$ मधील m ची किंमत काढा.

उकल : $3x^2 + mx - 5 = 0$

समीकरणाची $ax^2 + bx + c = 0$ या समीकरणाशी तुलना करून,

$a = 3, b = m, c = -5$

समान मुळे असल्यास,

विवेचक $D = b^2 - 4ac = 0$

$\therefore m^2 - 4(3 \times -5) = 0$

$\therefore m^2 = 60$

$\therefore m = \sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = 2\sqrt{15}$

$\therefore m = \pm 2\sqrt{15}$

आपली प्रगती तपासा 6.4

1. वर्गसमीकरणांची मुळे न काढता खालील वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप सांगा.

   1) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ 2) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

   3) $25x^2 + 20x + 4 = 0$ 4) $x^2 - x + 1 = 0$

2. वर्गीय सूत्राचा वापर करून वर्गसमीकरणे सोडवा.

   1) $y^2 - 14y - 12 \quad 0$ 2) $x^2 - 5x = 0$ 3) $x^2 - 15x + 50 = 0$

3. वर्गसमीकरणाची मुळे समान असल्यास वर्गसमीकरणातील m ची किंमत काढा.

   1) $2x^2 - mx + 1 = 0$ 2) $mx^2 + 3x - 5 = 0$

   3) $3x^2 - 6x + m = 0$ 4) $2x^2 + mx - 1 = 0$

6.4 शाब्दिक उदाहरणे (Word Problems)

ज्यामध्ये वर्गसमीकरणाचा उपयोग करावा लागेल, अशी काही उदाहरणे आता आपण सोडवू.

उदा. 6.9 : दोन क्रमागत नैसर्गिक विषम संख्यांच्या वर्गांची बेरीज 74 आहे. तर त्या संख्या काढा.

उकल : दोन क्रमागत नैसर्गिक विषम संख्या

अनुक्रमे x आणि $x + 2$ आहेत, असे मानू,

त्यांच्या वर्गांची बेरीज 74 आहे.

$\therefore$ समीकरण =

$x^2 + (x + 2)^2 = 74$

$\therefore x^2 + x^2 + 4x + 4 = 74$

$\therefore 2x^2 + 4x + 4 - 74 = 0$

$\therefore 2x^2 + 4x - 70 = 0$

$\therefore 2\,[x^2 + 2x - 35] = 0$

$\therefore \underline{x^2 + 7x} - \underline{5x - 35} = 0$

$\therefore x\,(x + 7)\,(x - 5) = 0$

$\therefore x + 7 = 0$ किंवा $x - 5 = 0$

$\therefore x = -7$ किंवा $x = 5$

x ही नैसर्गिक संख्या

$\therefore$ ती ऋण असू शकत नाही.

$\therefore x = 5 = 5$

$\therefore x + 2 = 5 + 2 = 7$

$\therefore$ संख्या = 5 आणि 7

उदा. 6.10 : दोन चौरसाकृती जागांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज 468 चौ मी आहे. जर चौरसांच्या परिमितीमधील फरक 24 मी असल्यास त्या चौरसाच्या बाजूंची लांबी काढा.

उकल : मोठ्या चौरसाच्या बाजूची लांबी x मी व लहान चौरसाच्या बाजूची लांबी y मी. आहे, असे मानू,

$\therefore$ मोठ्या चौरसाची परिमिती = $4x$

$\therefore$ लहान चौरसाची परिमिती = $4y$

$\therefore$ परिमितीमधील फरक $= 24$

$\therefore 4x - 4y = 24$

$\therefore x - y = 6$

$\therefore x = y + 6$ .... (1)

दोन चौरसांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज 468 चौमी आहे.

$\therefore x^2 + y^2 = 468$ .... (2)

समीकरण (1) मधील $x = y + 6$ ही किंमत समीकरण (2) मध्ये घालून,

$(y + 6)^2 + y^2 = 468$

$\therefore y^2 + 12y + 36 + y^2 = 468$

$\therefore 2y^2 + 12y + 36 - 468 = 0$

$\therefore 2y^2 + 12y - 432 = 0$

$\therefore 2[y^2 + 6y - 216] = 0$

$\therefore y^2 + 6y - 216 = 0$

$$\therefore y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 864}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{900}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 30}{2}$$

$\therefore y = \dfrac{-6 + 30}{2}$ किंवा $\dfrac{-6 - 30}{2}$

$\therefore y = \dfrac{24}{2}$ किंवा $\dfrac{-36}{2}$

$\therefore y = 12$ किंवा -18

चौरसाची बाजू ऋण नसते.

$y = 12$

$x = y + 6 = 12 + 6 = 18$

$\therefore$ चौरसाच्या बाजू 18 मी व 12 मी.

उदा. 6.11 : एका दोन अंकी संख्येतील अंकांचा गुणाकार 12 आहे. संख्येत 9 मिळविले असता संख्येतील अंकांची अदलाबदल होते. तर ती संख्या काढा.

उकल : संख्येच्या दशकस्थानचा अंक x

आणि एककस्थानचा अंक y आहे, असे मानू

$\therefore$ संख्या = $10x + y$

अंकांची अदलाबदल करून आलेली संख्या = $10y + x$

$\therefore 10x + y + 9 = 10y + x$

$\therefore 10x + y - 10y - x = -9$

$\therefore 9x - 9y = -9$

$\therefore x - y = -1$ ......(1)

अंकांचा गुणाकार 12 आहे.

$xy = 12$ ....(2)

समीकरण (1) मधील x ची किंमत समीकरण (2) मध्ये घालून,

$\therefore (y - 1)\, y = 12$

$\therefore y^2 - y = 12$

$\therefore y^2 - y - 12 = 0$

$\therefore (y - 4)\,(y + 3) = 0$

$\therefore y - 4 = 0$ किंवा $y + 3 = 0$

$\therefore y = 4$ किंवा $y = -3$

संख्या ऋण असू शकत नाही.

$\therefore y = 4$

$x = y - 1 = 4 - 1 = 3$

$\therefore$ ती संख्या = 34

उदा. 6.12 : दोन नैसर्गिक संख्यांची बेरीज 12 आहे. त्यांच्या व्यस्तांकांची बेरीज $\frac{4}{9}$ आहे. तर त्या संख्या काढा.

उकल : एक संख्या x आहे, असे मानू,

$\therefore$ दुसरी संख्या $12 - x$ येईल.

त्यांच्या व्यस्तांकांची बेरीज $\frac{4}{9}$ आहे.

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{12-x} = \frac{4}{9} \quad x \neq 0, 12 - x \neq 0$

$\therefore \frac{12-x+x}{x(12-x)} = \frac{4}{9}$

$\therefore \frac{12\times9}{4} = 12x - x^2$

$\therefore 27 = 12x - x^2$

$\therefore x^2 - 12x + 27 = 0$

$\therefore (x-3)(x-9) = 0$

$\therefore x - 3 = 0$ किंवा $x - 9 = 0$

$\therefore x = 3$ किंवा $x = 9$

जेव्हा पहिली संख्या 3 असते, तेव्हा दुसरी संख्या 12 – 3 = 9 येईल.

जेव्हा पहिली संख्या 9 असते, तेव्हा दुसरी संख्या 12 – 9 = 3 येईल.

∴ त्या संख्या 3 व 9

आपली प्रगती तपासा 6.5

1. दोन क्रमागत सम नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गांची बेरीज 164 आहे. तर त्या संख्या काढा.
2. एका आयताकृती बागेची लांबी रुंदीपेक्षा 7 मी ने जास्त आहे. बागेचे क्षेत्रफळ 144 चौमी आहे. तर बागेची लांबी व रुंदी काढा.
3. एका दोन अंकी संख्येतील अंकांची बेरीज 13 आहे. त्या अंकांच्या वर्गांची बेरीज 39 असल्यास, ती संख्या काढा.
4. एका दोन अंकी संख्येतील दशकस्थानचा अंक एकक स्थानच्या अंकाच्या दुपटीपेक्षा 2 ने मोठा आहे. अंकांचा गुणाकार 24 असल्यास ती संख्या काढा.
5. दोन संख्यांची बेरीज 15 आहे. त्यांच्या व्यस्तांकांची बेरीज $\frac{3}{10}$ आहे. तर त्या संख्या काढा.

तुम्ही काय शिकला?

❖ $ax^2 + bx + c = 0$ जेथे $a \neq 0$ आणि a, b, c या वास्तव संख्या असतात, अशा समीकरणाला वर्ग समीकरणाचे सामान्य रूप असे म्हणतात.

- चलपदाच्या ज्या किंमतीमुळे वर्गसमीकरणाचे समाधान होते, त्या किंमतीस त्या वर्गसमीकरणाची उकल किंवा मूळ असे म्हणतात.‘
- बहुपदीची शून्य किंमत म्हणजे संबंधित वर्ग समीकरणाची उकल किंवा मुळे असतात.
- $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ या बहुपदीचे रेषीय समीकरणाप्रमाणे अवयव पाडले असता, $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे प्रत्येक अवयव $= 0$ समजून काढता येतात.
- वर्गसमीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ची मुळे $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ने काढता येतात.
- $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ या समीकरणाच्या बाबतीत $b^2 - 4ac$ ला वर्गसमीकरणाचा विवेचक असे म्हणतात. तो D या अक्षराने दर्शवितात.

1. जर $D > 0$, तर वर्गसमीकरणास दोन असमान वास्तव मुळे असतात.
2. जर $D = 0$, तर वर्गसमीकरणास दोन समान मुळे असतात.
3. जर $D < 0$, तर वर्गसमीकरणास वास्तव मुळे नसतात.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. खालील समीकरणांपैकी वर्गसमीकरणे कोणती आहेत?

   1) $y (\quad y - 3) = 0$ 2) $5x^2 - 3\sqrt{x} + 8 = 0$

   3) $3x - \frac{1}{x} = 5$ 4) $x (2x + 5) = x^2 + 5x + 7$

2. खालील समीकरणे अवयव पद्धतीने सोडवा.

   1) $(x - 8) (x + 4) = 13$ 2) $3y^2 - 7y = 0$

   3) $x^2 + 3x - 18 = 0$ 4) $6x^2 + x - 15 = 0$

3. $5x^2 - 3x + m = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे समान असतील, तर m ची किंमत काढा.

4. $x^2 - mx - 1 = 0$, या वर्गसमीकरणाची मुळे समान असतील, तर m ची किंमत काढा.

5. खालील वर्गसमीकरणे सूत्राच्या साहाय्याने सोडवा.

   1) $6x^2 - 19x + 15 = 0$ 2) $x^2 + x - 1 = 0$

   3) $21 + x = 2x^2$ 4) $2x^2 - x - 6 = 0$

6. काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू अनुक्रमे $x - 1$, x आणि $x + 1$ अशा आहेत. x ची किंमत काढा. त्रिकोणाच्या बाजू काढा.

7. दोन क्रमागत विषम पूर्णांकांच्या वर्गाची बेरीज 290 आहे. ते पूर्णांक काढा.

8. एका काटकोन त्रिकोच्या कर्णाची लांबी 13 सें. मी. आहे. उरलेल्या दोन बाजूंच्या लांबीतील फरक 7 असल्यास त्या बाजूंची लांबी काढा.

9. दोन चौरसाकृती जागांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज 41 चौसेंमी आहे. त्या चौरसाच्या परिमितीची बेरीज 36 सें.मी. असल्यास त्या चौरसाच्या बाजूंची लांबी काढा.

10. 5 सें. मी. त्रिज्या असलेल्या वर्तुळात एक समद्विभुज काटकोन त्रिकोण आंतरलिखित केला आहे. त्या त्रिकोणाच्या बाजू काढा.

आपली प्रगती तपासा – उत्तरे

6.1

1. 2, 3, 5

6.2

1. 1) सामान्य रूपात नाही. सामान्य रूप $3y^2 - y - 3 = 0$

   2) सामान्य रूपात नाही. सामान्य रूप $2x^2 + 2x - 5 = 0$

   3) सामान्य रूपात नाही. सामान्य रूप $6t^2 + t - 1 = 0$

   4) सामान्य रूपात नाही. सामान्य रूप $3x^2 + x - 5 = 0$

6.3

1. 1) $\frac{3}{2}, -2$ 2) 3, –6 3) $\frac{7}{3}, -1$

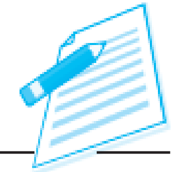
   4) 2, 3 5) $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}$ 6) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

6.4

1. 1) 2 वास्तव असमान मुळे 2) 2 वास्तव समान मुळे

   3) 2 वास्तव समान मुळे 4) वास्तव मुळे नाहीत.

2. 1) $7 \pm \sqrt{37}$ 2) 0, 5 3) 5, 10



3. 1) $\pm 2\sqrt{2}$ 2) $\frac{9}{20}$ 3) 3 4) मुळे नाहीत.

6.5

1. 8, 10
2. 16 मी., 9 मी.,
3. 85, 38
4. 83
5. 5, 10

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह – उत्तरे

1. 1, 4
2. 1) 8, 4 2) 0, $\frac{7}{3}$ 3) 3, –6 4) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$
3. $\frac{9}{20}$
4. वास्तव मुळे नाहीत.
5. 1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ 2) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 3) $\frac{7}{2}, -3$ 4) 2, $\frac{3}{2}$
6. 3, 4, 5
7. 11, 13 किंवा –13, –11
8. 5 सेंमी., 12 सेंमी.
9. 5 सें.मी, 4 सें.मी.
10. $5\sqrt{2}$ सेंमी., $5\sqrt{2}$ सेंमी., 10 सेंमी.

❖ ❖ ❖

7

अंकगणिती श्रेढी

आपण बारकाईने निरीक्षण केले असता निसर्गाला बऱ्याच गोष्टींमध्ये विशिष्ट आकृतीबंध असतो, हे आपल्या लक्षात येते. उदा. फुलांच्या पाकळ्यांची रचना, मधमाशीच्या पोळ्याची रचना, अननसाच्या डोळ्यांची रचना इ. या पाठात आपण विशिष्ट प्रकारचा आकृतिबंध असणाऱ्या संख्यासमुहाचा अभ्यास करणार आहोत. या संख्यासमुहाला अंकगणित श्रेढी (A.P) असे म्हणतात. तसेच श्रेढीचे सामान्य पद काढणे आणि पहिल्या 'n' पदांची बेरीज करणे याचासुद्धा अभ्यास करणार आहोत.

उद्दिष्टे :

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खालील बाबींचे ज्ञान होईल.

- ❖ दिलेल्या संख्यांच्या गटामधून अंकगणित श्रेढी संख्या गट वेगळा ओळखता येईल.
- ❖ अंकगणित श्रेढीचे सामान्य पद काढता येईल.
- ❖ अंकगणित श्रेढीमध्ये असलेल्या संख्यागटाच्या पहिल्या n पदांची बेरीज सांगता येईल.

अपेक्षित पूर्वज्ञान

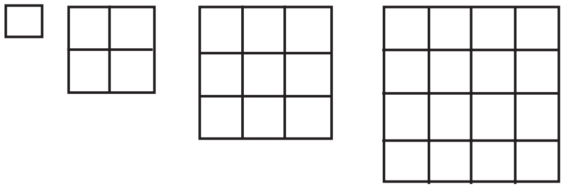
- ❖ संख्याप्रणाली
- ❖ संख्यांवरील चार मूलभूत प्रक्रिया

7.1 संख्या आकृतीबंध (Some Number Patterns)

खालील उदाहरणांकडे लक्ष द्या.

1. दसादशे 10 दराने रिटाने बँकेत ₹ 1000 ठेवले आहेत. पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या आणि चौथ्या वर्षाच्या शेवटी ही रक्कम अनुक्रमे ₹ 1100, ₹ 1200, ₹ 1300, ₹ 1400 होईल. या आकड्यात आपल्याला काही आकृतीबंध दिसतो का? रक्कम दरवर्षी ₹ 100 या एकाच दराने वाढत आहे. हे आपल्याला लक्षत येते.

2. 1, 2, 3, 4, ... एकक बाजू असलेल्या चौरसामध्ये प्रत्येकी 1 चौरस एककाचे अनुक्रमे 1, 4, 9, 16 . . . . चौरस असतात.



यामध्ये काही आकृतीबंध लक्षात येतो का?

$1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2$, ...

हे सर्व नैसर्गिक संख्यांचे वर्ग आहेत.

आता खालील काही संख्या समूह पहा. त्यामधील आकृतीबंध ओळखता येतो का ते पहा.

1¸ 3¸ 5¸ 7¸ 9 .... (1)

2¸ 4¸ 6¸ 8¸ 10 .... (2)

1¸ 4¸ 7¸ 10¸ 13 .... (3)

5¸ 3¸ 1¸ -1¸ -3 .... (4)

1¸ 3¸ 9¸ 27¸ 81 .... (5)

2¸ 3¸ 5¸ 7¸ 11¸ 13 .... (6)

आपल्या असे लक्षात येईल की यादी क्र. (1) मधील सर्व संख्या विषम नैसर्गिक संख्या आहेत.

पहिली संख्या 1, दुसरी संख्या 3 तिसरी संख्या 5 इ. या सर्व संख्या विशिष्ट आकृतीबंध पाळतात.

तो आकृतीबंध म्हणजे पहिल्या संख्येखेरीज इतर सर्व संख्या त्या अगोदरच्या संख्येत दोन मिळवून तयार होतात.

यादी क्रमांक (2), (3) आणि (4) मध्ये, पहिल्या संख्येखेरीज इतर सर्व संख्या त्या अगोदरच्या संख्येत अनुक्रमे 2, 3, आणि –2 मिळवून तयार होतात.

यादी क्रमांक (5) मध्ये पहिल्या संख्येखेरीज इतर सर्व संख्या त्या अगोदरच्या संख्येस 3 ने गुणून तयार होतात. यादी क्रमांक (6) मध्ये सर्व संख्या नैसर्गिक मूळ संख्या आहेत. ज्या नियमाने यापुढील मूळ संख्या निश्चितपणे सांगता येईल. असा कोणताही नियम नाही.

यादीमधील संख्या सर्व साधारणपणे

a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...

किंवा t_1, t_2, t_3, ... t_n, ...

या पद्धतीने लिहिल्या जातात. आणि पहिले पद, दुसरे पद, तिसरे पद, n वे पद अशा संबोधिल्या जातात. या याद्यांना क्रमिका असे म्हणतात.

7.2 अंकगणित श्रेढी (Arithmetic Progression)

आपण वेगवेगळे आकृतीबंध पाहिले आहेत. काही आकृतीबंधांमध्ये (क्रमिकांमध्ये) विशिष्ट गणिती नियमानुसार पुढचे पद तयार होते. आता आपण संख्यांच्या विशिष्ट आकृतीबंधांचा अभ्यास करणार आहोत.

खालील आकृतीबंध पुन्हा लक्षात घ्या.

1, 3, 5, 7, 9 .... (1)

2, 4, 6, 8, 10 .... (2)

1, 4, 7, 10, 13 .... (3)

आपल्या असे लक्षात येईल की यादी क्रमांक (1) आणि (2) मध्ये पहिल्या संख्येखेरीज इतर सर्व संख्या त्या अगोदरच्या संख्येत (पदात) 2 मिळवून तयार होतात. यादी क्र. (3) मध्ये पहिल्या संख्येखेरीज इतर सर्व संख्या त्या अगोदरच्या संख्येत (पदात) 3 मिळवून तयार होतात. संख्यांसमुहातील प्रत्येक संख्येला पद असे म्हणतात.

मागेच सांगितल्याप्रमाणे ही पदे

$a_1, a_2, a_3,$ .... $a_n,$ ....

$t_1, t_2, t_3,$ .... $t_n,$ ....

या पद्धतीने लिहीली जातात.

पदांना लागून असलेला अंक त्या पदाचा त्या संख्या समूहातील क्रम दर्शवितो. उदा. a_n किंवा t_n म्हणजे त्या संख्यासमूहातील n वे पद होय.

ज्या संख्या आकृतीबंधामध्ये पहिल्या संख्येखेरीज (पदाखेरीज) इतर सर्व संख्या (पदे) त्या अगोदरच्या संख्येत (पदात) एक निश्चित संख्या (धन किंवा ऋण) मिळवून काढता येतात, त्याला अंकगणिती श्रेढी (A, P) असे म्हणतात. या श्रेढीतील पहिले पद सर्व साधारणपणे 'a' या अक्षराने दर्शवितात आणि दोन संख्येतील फरकाला साधारण फरक (d) असे म्हणतात.

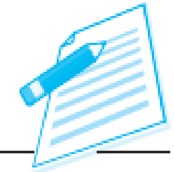
अंकगणित श्रेढीचे प्रमाणित रूप

$a, a + d, a + 2d, a + 3d,$ .... असे असते.

उदा. 7.1 : खाली दिलेल्या संख्या गटांमधून अंकगणित श्रेढी असलेले गट ओळखा. त्या गटाचे पहिले पद आणि साधारण फरक सांगा.

1) 2, 7, 12, 17, 22, ... 2) 4, 0, –4, –8, –12, ...

3) 3, 7, 12, 18, 25 .... 4) 2, 6, 18, 54, 162, ...



उकल :

1) $2, 7, 12, 17, 22, \ldots\ldots\ldots$

$7 - 2 = 5,\ 12 - 7 = 5,\ 17 - 12 = 5$

पहिल्या पदाखेरीज इतर सर्व पदे त्या अगोदरच्या पदात 5 मिळवून तयार होतात.

$\therefore$ ही अंकगणित श्रेढी आहे.

$\therefore$ पहिले पद $= a = 2$, साधारण फरक $= d = 5$

2) $4, 0, -4, -8, -12, \ldots\ldots\ldots$

$0 - 4 = 4,\ -4 - 0 = -4,\ -8 - (-4) = -4,\ -12 - (-8) = -4$

पहिल्या पदाखेरीज इतर सर्व पदे त्याअगोदरच्या पदातून –4 वजा करून तयार होतात.

$\therefore$ ही अंकगणित श्रेढी आहे.

$\therefore$ पहिले पद $= a = 4$, साधारण फरक $= -4$

3) $3, 7, 12, 18, 25, \ldots\ldots\ldots$

$7 - 3 = 4,\ 12 - 7 = 5,\ 18 - 12 = 6,\ 25 - 18 = 7$

दोन लगतच्या संख्येमधील सर्वसाधारण फरक सारखा नाही.

$\therefore$ ही अंकगणित श्रेढी नाही.

4) $2, 6, 18, 54, 162 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$6 - 2 = 4,\ 18 - 6 = 12,\ 54 - 18 = 36,\ 162 - 54 = 108$

दोन लगतच्या संख्येमधील सर्वसाधारण फरक सारखा नाही.

$\therefore$ ही अंकगणित श्रेढी नाही.

आपली प्रगती तपासा 7.1

खाली दिलेल्या संख्या गटांमधून अंकगणित श्रेढी असलेले गट ओळखा. अंकगणित श्रेढी असल्यास पहिले पद आणि साधारण फरक सांगा.

1) $-5, -1, 3, 7, 11, \ldots\ldots$ 2) $6, 7, 8, 9, 10, \ldots\ldots$

3) $1, 4, 6, 7, 6, 4 \ldots\ldots$ 4) $-6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\ldots$

7.5 अंकगणित श्रेढीचे सामान्य पद किंवा n वे पद (General (n^{th}) term of an AP)

ज्या अंकगणित श्रेढीचे पहिले पद ‘a’ आणि साधारण फरक ‘d’ आहे. अशी श्रेढी विचारात घ्या या श्रेढीची पदे $t_1, t_2, t_3, ... t_n$ अशी आहेत. त्यामधील t_n हे पद n वे पद दर्शविते. पहिले पद ‘a’ आहे. दुसरे पद त्यामध्ये d मिळवून तयार होते. $\therefore$ दुसरे पद = a + d तिसरे पद दुसऱ्या पदात (a + d) मध्ये d मिळवून मिळते. $\therefore$ तिसरे पद = (a + d) + d = a + 2d

याप्रमाणे पुढील पदे मिळविता येतात.

पहिले पद $t_1 = a \quad = \quad a + (1 – 1)\, d$

दुसरे पद $t_2 = a + d \quad = \quad a + (2 – 1)\, d$

तिसरे पद $t_3 = a + 2d \quad = \quad a\, (3 – 1)\, d$

चौथे पद $t_4 = a + 3d \quad = \quad a + (4 – 1)\, d$

यामधील आकृतीबंध लक्षात येतो का? यामधील प्रत्येक पद a + (पदक्रमांक –1) d असे आहे. या श्रेढीमधील 10 वे पद सांगा.

$t_{10} = a + (10 – 1)\, d = a + 9d$

आता या श्रेढीचे सामान्य पद किंवा n वे पद सांगू शकाल का? अर्थातच ते पद

$t_n = a + (n – 1)\, d$ हे येईल.

उदा. 7.2 : 16, 11, 6, 1, –4, –9, ...

या अंकगणित श्रेढीचे 15 वे पद आणि सामान्य पद (n वे पद) सांगा.

उकल : 16, 11, 6, 1, –4, –9, ...

a = 16, d = 11 – 16 = –5

tn = a + (n – 1) d

$\therefore t_{15} = a + (15 – 1)\, d$

= 16 + 14 (–5)

= 16 – 70

= –54

$\therefore$ 15 वे पद –54 येईल.

$t_n = a + (n – 1)\, d$

$= 16 + (n - 1) \times (-5)$

$= 16 - 5n + 5$

$= 21 - 5n$

$\therefore$ सामान्य पद = n वे पद = $t_n = (21 - 5n)$

उदा. 7.3 : एका अंकगणित श्रेढीचे पहिले पद –3 आणि 12 वे पद 41 आहे. तर श्रेढीचा साधारण फरक काढा.‘

उकल : अंकगणित श्रेढीचे पहिले पद ‘a’ साधारण फरक ‘d’ मानू.

$tn = a + (n - 1)\, d$

$\therefore t_{12} = a + (12 - 1)\, d = 41$

$\therefore a + 11d = 41$

$\therefore -3 + 11d = 41 \; [\because \; a = -3]$

$\therefore 11d = 41 + 3$

$\therefore 11d = 44$

$$\therefore d = \frac{44}{11}$$

$\therefore d = 4$

$\therefore$ साधारण फरक = 4

उदा. 7.4 : एका अंकगणित श्रेढीचा साधारण फरक 5 आणि 10 वे पद 43 आहे. तर श्रेढीचे पहिले पद काढा.

$tn = a + (n - 1)\, d$

उकल : $t_{10} = a + (10 - 1)\, d$

$\therefore 43 = a + 9d$

$\therefore 43 = a + 9 \times 5 \quad [\because \; d = 5]$

$\therefore 43 = a + 45$

$\therefore 43 - 45 = a$

$\therefore -2 = a$

$\therefore a = -2$

$\therefore$ पहिले पद = – 2

उदा. 7.5 : एक अंकगणित श्रेढीचे पहिले पद –2 आणि 11 वे पद 18 आहे. तर श्रेढीचे 15 वे पद काढा.

उकल : 15 वे पद शोधण्यासाठी आपल्याला श्रेढीचा साधारण फरक काढावा लागेल.

$tn = a + (n - 1)\, d$

$\therefore t_{11} = a + (11 - 1)\, d$

$\therefore 18 = a + 10d$

$\therefore 18 = -2 + 10d$

$\therefore 18 + 2 = 10d$

$\therefore 20 = 10d$

$\therefore \dfrac{20}{10} = d$

$\therefore 2 = d$

आता $t_{15} = a + (15 - 1)\, d$

$\therefore t_{15} = a + 14\, d$

$\therefore t_{15} = -2 + (14 \times 2)$

$\therefore t_{15} = -2 + 28$

$\therefore t_{15} = 26$

$\therefore$ पंधरावे पद = 26

उदा. 7.6 : अंकगणित श्रेढीमध्ये p या पदाचा p घात आणि q या पदाच्या q घातावरोबर आहे. तर या श्रेढीचे (p + q)) वे पद 0 आहे, हे सिद्ध करा. $(p \neq q)$

उकल : $t_p = a + (p - 1)\, d$

$t_q = a + (q - 1)\, d$

आणि $\quad = {}_q t_q$

$\therefore p[a + (p - 1)\, d] = q[a + (q - 1)\, d]$

$\therefore pa + p(p - 1)\, d = qa + q\,(q - 1)\, d$

$\therefore pa + p(p - 1)\, d - qa - q\,(q - 1)\, d = 0$

$\therefore (p - q)\, a + (p^2 - q^2)\, d - pd + qd = 0$

$\therefore (p - q)\, a + (p^2 - q^2)\, d - (p - q)\, d = 0$

$\therefore (p-q)\,a + (p+q)(p-q)\,d - (p-q)\,d = 0$

$\therefore (p-q)\,[a + (p+q)\,d - d] = 0$

$\therefore a\,(p+q)\,d - d = 0 \qquad (p-q \neq 0)$

$\therefore a + (p+q-1)\,d = 0$

डावी बाजू हे (p + q) वे पद आहे.

$\therefore t_{p+q} = 0$ (सिद्ध)

आपली प्रगती तपासा 7.2

1) एका अंकगणित श्रेढीचे पहिले पद 4 आणि साधारण फरक –3 आहे. तर तिचे 12 वे पद काढा.

2) एका अंकगणित श्रेढीचे पहिले पद 2 आणि 9 वे पद 26 आहे. तर साधारण फरक काढा.

3) एका अंकगणित श्रेढीचे 12 वे पद –28 आणि 18 वे पद –46 आहे. तर श्रेढीचे पहिले पद आणि साधारण फरक काढा.

4) अंकगणित श्रेढी 5, 2, –1, ... मध्ये –22 हे कितव्या क्रमांकाचे पद आहे?

5) एका अंकगणित श्रेढीची p, q आणि r वी पदे अनुक्रमे x, y आणि z असल्यास सिद्ध करा की,

$x(q-r) + y\,(r-p) + z\,(p-q) = 0$

7.4 अंकगणित श्रेढीच्या पहिल्या n पदांची बेरीज (Sum of first n terms of an AP)

जोहान कार्ल फ्रेडिक गॉस हे थोर जर्मन गणिती होते. ते प्राथमिक शाळेत असताना त्यांच्या शिक्षकांनी त्यांच्या वर्गाला 1 ते 100 पर्यंतच्या सर्व नैसर्गिक संख्यांची बेरीज करण्यास सांगितले. सर्व वर्ग बेरीज करण्यात गुंतला, परंतु गॉस यांनी या प्रश्नाचे ताबडतोब उत्तर सांगितले.

त्यांनी ते उत्तर कसे काढले ते पाहू.

$s = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 99 + 100 \qquad (1)$

हीच पदे उलट क्रमाने मांडून,

$s = 100 + 99 + 98 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 1 \qquad (2)$

समीकरण (1) आणि समीकरण (2) पदक्रमांकानुसार बेरीज करून,

$2s = 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 101 + 101 \qquad$ (100 वेळा)

$= 100 \times 101$

$\therefore s = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5500$

आपण हीच पद्धत अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या n पदांच्या बेरजेसाठी वापरू.

अंकगणिती श्रेढीची पहिली n पदे =

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ a + (n - 2)d,\ a + (n - 1)d$$

या सर्व पदांची बेरीज Sn ने दर्शवू.

$$\therefore Sn = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots\ldots\ [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d] \qquad (3)$$

हीच पदे उलट क्रमाने मांडून,

$$\therefore Sn = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \ldots\ldots\ldots + (a + d) + a \qquad (4)$$

समीकरण (3) आणि समीकरण (4) यांची पदक्रमांकानुसार बेरीज करून, या प्रत्येक पदांची बेरीज 2n + (n – 1) d येते,

$$\therefore 2Sn = (2a + (n - 1)\ d] + \ldots\ldots\ldots\ [2a + (n - 1)\ d] + [2a + (n - 1)d\ ]\ n \text{ वेळा}$$

$$\therefore 2Sn = n[2a + (n - 1)d]$$

$$\therefore Sn = \frac{n}{2}\ [2a + (n - 1)\ d]$$

हे अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या n पदांची बेरीज काढण्याचे सूत्र आहे.

हे सूत्र असेही लिहिता येते.

$$Sn = \frac{n}{2}\ [a + \{a + (n - 1)d\}]$$

$$Sn = \frac{n}{2}\ (a + tn) \qquad [\because n \text{ वे पद} = tn = a + (n - 1)\ d]$$

कधीकधी n व्या पदाला शेवटचे पद असे म्हणतात.

शेवटचे पद *l* या अक्षरांने दर्शविले जाते.

$$\therefore Sn = \frac{n}{2}\ (a + l) \qquad \ldots\ldots\ (4)$$

उदा. 7.7 : खालील अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या 12 पदांची बेरीज करा.

1) 11, 16, 21, 26

2) –151, –148, –145, –142 ....

उकल : 1) 11, 16, 21, 26 ....

दिलेली अंकगणिती श्रेढी =

11, 16, 21, 26, ...

येथे प्रथम पद = a = 11, साधारण फरक = d = 16 – 11 = 5, n = 12.

अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या n पदांच्या बेरजेचे सूत्र वापरून,

$$Sn = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)\,d]$$

$$\therefore S_{12} = \frac{12}{2}\,[2 \times 11 + (12-1)\,5]$$

$= 6\,[22 + (11)\,5]$

$= 6\,[22 + 55]$

$= 6 \times 77$

$= 462$

$\therefore$ पहिल्या 12 पदांची बेरीज = 462

2) –151, 148, –145, –142

दिलेले अंकगणिती श्रेढी =

–151, –148, –145, –142

येथे प्रथम पद = a = –151, साधारण फरक = d = –148 – (151) = 3, n = 12

अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या n पदांच्या बेरजेचे सूत्र वापरून,

$$Sn = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)\,d]$$

$$= \frac{12}{2}\,[2 \times (-151) + (12 - 1)\,3]$$

$= 6\,[-302 + (11)3]$

$= 6\,[-302 + 33]$

$= 6\,[-269]$

$= -1614$

$\therefore$ पहिल्या 12 पदांची बेरीज = –1614

उदा. 7.8 : 2, 4, 6, 8, 10 .... या अंकगणिती श्रेढीची किती पदे घेतली असता बेरीज 210 येईल?

उकल : येथे $a = 2, d = 4 - 2 = 2, \quad n = ? \; Sn = 210$

$$Sn = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$\therefore 210 = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n - 1) 2]$$

$\therefore 420 = n[4 + 2n - 2]$

$\therefore 420 = n[2 + 2n]$

$\therefore 420 = 2n + 2n^2$

$\therefore 210 = n + n^2$

$\therefore n^2 + n - 210 = 0$

$\therefore \underline{n^2 + 15n} - \underline{14n - 210} = 0$

$\therefore n(n + 15) - 14(n + 15) = 0$

$\therefore (n + 15)(n - 14) = 0$

$\therefore n + 15 = 0$ किंवा $n - 14 = 0$

$\therefore n = -15$ किंवा $n = 14$

n ऋण असू शकत नाही.

$\therefore n = 14$

$\therefore$ बेरीज 210 येण्यासाठी पहिली 14 पदे लागतील.

उदा. 7.9 : – 2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59

या अंकगणिती श्रेढीच्या पदांची बेरीज सांगा.

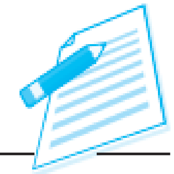
उकल : अंकगणिती श्रेढी –

2, 5, 8, 11

येथे $a = 2, d = 5 - 2 = 3, tn = 59$

बेरीज शोधण्यासाठी प्रथम n ची किंमत काढू.

$\therefore tn = a + (n - 1) d$



$\therefore 59 = 2 + (n - 1) 3$

$\therefore 59 = 2 + 3n - 3$

$\therefore 59 = 3n - 1$

$\therefore 59 + 1 = 3n$

$\therefore 60 = 3n$

$\therefore n = \frac{60}{3}$

$\therefore n = 20$

आता

$Sn = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$

$\therefore S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times 2 + (20 - 1) 3]$

$\therefore S_{20} = 10 [4 + (19) 3]$

$\therefore S_{20} = 10 (4 + 57)$

$\therefore S_{20} = 10 (61)$

$\therefore S_{20} = 610$

$\therefore$ पदांची बेरीज = 610

उदा. 7.10 : 1 ते 1000 या नैसर्गिक संख्यामधील 7 ने भाग जाणाऱ्या संख्यांची बेरीज काढा.

उकल : 7 ने भाग जाणारी पहिली संख्या 7 शेवटची संख्या 994 बेरीज कराव्या लागणाऱ्या संख्या = 7, 14, 21, ... 994

येथे $a = 7, d = 14 - 7 = 7, tn = 994$

$\therefore t_n = a + (n - 1) d$

$\therefore 994 = 7 + (n - 1) 7$

$\therefore 994 = 7 + 7n - 7$

$\therefore 994 = 7n$

$\therefore \frac{994}{7} = n$

$\therefore 142 = n$

$\therefore n = 142$

आता $Sn = \frac{n}{2}\,[a + l)$

$= \frac{142}{2}\,[7 + 994]$

$= 71\,[1001]$

$= 71071$

$\therefore$ बेरीज $= 710710$

उदा. 7.11 : अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या तीन पदांची बेरीज 36 आहे आणि त्यांचा गुणाकार 1620 तर ती अंकगणिती श्रेढी काढा.

उकल : अंकगणिती श्रेढीची पहिली तीन पदे a, a + d, a + 2d आहेत, असे मानू, परंतु या पदांचा गुाकार तिसऱ्या कोटीचा येईल आणि त्यामुळे दोन एकसामाईक समीकरणे सोडविणे कठीण व वेळखाऊ ठरेल. म्हणून आपण पहिली तीन पदे अनुक्रमे a – d, a आणि a + d आहेत असे मानू.

$\therefore a - d + a + a + d = 36$

$\therefore 3a = 36$

$\therefore a = \frac{36}{3}$

$\therefore a = 12$

या पदांचा गुणाकार 1620 आहे.

$\therefore (a - d) \times a \times (a + d) = 1620$

$\therefore (12 - d) \times 12 \times (12 + d) = 1620$

$\therefore (12 - d)\,(12 + d) = \frac{1620}{12}$

$\therefore (12 - d)\,(12 + d) = 135$

$\therefore 12^2 - d^2 = 135$

$\therefore 144 - d^2 = 135$

$\therefore 9 = d^2$

$\therefore d = \sqrt{9} = +3$ किंवा -3

d = 3 घेऊन,

a – 3	a	a + 3
= 12 – 3	12	12 + 3
= 9	12	15

d = – 3 घेऊन,

a – 3	a	a + 3
= 12 – (–3)	12	12 + (–3)
= 12 + 3	12	12 – 3
15	12	9

∴ अंकगणिती श्रेढीची पहिली तीन पदे

9, 12, 15 किंवा 15, 12, 9 ही येतील.

आपली प्रगती तपासा 7.3

1) पुढील अंकगणिती श्रेढीच्या पहिल्या 15 पदांची बेरीज काढा.

1) 11, 6, 1, – 4, – 9 .... 2) 7, 12, 17, 22, 27

2) 25, 28, 31, 34, ... या अंकगणिती श्रेढीची किती पदे घेतली असता बेरीज 1070 येईल?

3) खालील बेरीज करा.

1 + 4 + 7 + 10 + ... + 118

4) 1 ते 100 या नैसर्गिक संख्यांमधील 3 ने भाग जाणाऱ्या संख्यांची बेरीज काढा.

5) अंकगणिती श्रेढीच्या तीन क्रमागत पदांची बेरीज 21 आहे. आणि त्यांचा गुणाकार 231 आहे. तर अंकगणिती श्रेढीची ती तीन पदे काढा.

6) खालील अंकगणिती श्रेढीच्या उदाहरणांमध्ये l, a, n, d, Sn यापैकी एकाची किंमत दिली नाही. प्रत्येक उदाहरणात न दिलेल्या अक्षराची किंमत काढा.

1) $a = -2, d = 5, S_n = 568$ 2) $l = 8, n = 8, S_8 = -20$

3) $a = -3030, l = -1530, n = 5$ 4) $d = \frac{2}{3}, l = 10, n = 20$

तुम्ही काय शिकलात?

❖ ज्या संख्या आकृतीबंधामध्ये पहिल्या पदाखेरीज इतर सर्व पदे त्या अगोदरच्या पदात एक निश्चित पद मिळवून काढता येतात, त्याला अंकगणिती श्रेढी (A. P.) असे म्हणतात.

❖ अंकगणिती श्रेढीतील पहिले पद 'a' या अक्षराने दर्शवितात. दोन पदातील फरकाला साधारण फरक असे म्हणतात. तो 'd' या अक्षराने दर्शवितात.

❖ अंकगणिती श्रेढी मधील n वे पद,

$$tn = a + (n - 1) d$$

या सूत्राने काढता येते.

❖ अंकगणित श्रेढीमधील पहिल्या 'n' पदांची बेरीज,

$$Sn = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$

या सूत्राने काढता येते.

❖ अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद 'a' आणि शेवटचे पद l असल्यास त्या सर्व पदांची बेरीज

$$Sn = \frac{n}{2} (a + l)$$

या सूत्राने मिळते.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. खालीलपैकी कोणते आकृतीबंध अंकगणिती श्रेढी आहेत?

   1) 2, 5, 8, 12, 15, ...   2) –3, 0, 3, 6, 9, ...

   3) 1, 2, 4, 8, 16, ...

2. खालील अंकगणिती श्रेढीचे n वे पद काढा.

   1) 5, 9, 13, 17, ...   2) –7, –11, –15, –19, ...

3. अंकगणिती श्रेढीचे चौथे पद तिच्या पहिल्या पदाच्या तिप्पट आणि तिचे सातवे पद तिसऱ्या पदाच्या दुपटीपेक्षा 1 ने जास्त आहे. तिचे प्रथम पद आणि साधारण फरक काढा.

4. एका अंकगणिती श्रेढीचे पाचवे पद 23 आणि बारावे पद 37 आहे. तिचे प्रथम पद आणि साधारण फरक काढा.

5. एका त्रिकोणाचे कोन अंकगणिती श्रेढीमध्ये आहेत. त्रिकोणाचा सर्वात लहान कोन त्रिकोणाच्या मोठ्या कोनाच्या $1/3$ आहे. तर त्रिकोणाच्या कोनांची मापे काढा.

6. 1) 100, 95, 90, 85 .... या अंकगणिती श्रेढीचे – 25 हे कितवे पद आहे?

   2) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}$ या अंकगणित श्रेढीचे $\frac{25}{4}$ हे कितवे पद आहे?

7. अंकगणिती श्रेढीचे n वे पद $t_a = a + bn$ या सूत्राने दिले जाते. ही अंकगणिती श्रेढी आहे, हे सिद्ध करा. श्रेढीचे पहिले पद आणि साधारण फरक काढा.

8. अंकगणिती श्रेढीच्या 7 व्या पदाची सातपट ही 11 व्या पदाच्या अकरा पटीवरोबर असल्यास तिचे 18 वे पद 0 आहे. हे सिद्ध करा.

9. एका अंकगणिती श्रेढीचे पहिले पद 'a' आणि साधारण फरक d आहे. या श्रेढीतील प्रत्येक पदाची दुप्पट केली. तर तयार होणारा आकृतीबंध अंकगणिती श्रेढी असेल का? असल्यास तिचे प्रथम पद आणि साधारण फरक सांगा.

10. एका अंकगणिती श्रेढीची $k + 2$, $4k – 6$ आणि $3k – 2$ ही तीन क्रमागत पदे आहेत. तर k ची किंमत काढा.

11. 1) 1, 4, 7, 10, ... या अंकगणिती श्रेढीच्या किती पदांची बेरीज 715 होईल?

    2) –10, –7, –4, –1, ... या अंकगणिती श्रेढीच्या किती पदांची बेरीज 104 होईल?

12. पहिल्या 100 विषम नैसर्गिक संख्यांची बेरीज काढा.

13. एका अंकगणिती श्रेढीमध्ये $a = 2$, या श्रेढीतील पहिल्या पाच पदांची बेरीज पुढच्या पाच पदांच्या बेरजेच्या $\frac{1}{4}$ आहे. तर श्रेढीचे 20 वे पद –12 आहे. हे दाखवा.

    (सूचना – जर अंकगणिती श्रेढी a, a + d, a + 2d असेल तर, $S_5 = \frac{5}{3}[a + (a + 4d)]$

    पुढच्या 5 पदांमधील पहिले पद $a + 5d$ आणि शेवटचे पद $= a + 9d$)

14. अंकगणिती श्रेढीतील पहिल्या n पदांची बेरीज $2n + 3n^2$ आहे. तर श्रेढीतील r वे पद काढा.

    [सूचना – $t_r = s_r = s_{r-1}$]

15. 4 ने भागल्यानंतर 1 बाकी उरणाऱ्या तीन अंकी नैसर्गिक संख्यांची बेरीज काढा.

    [सूचना – पहिले पद = 101, शेवटचे पद = 997]

आपली प्रगती तपासा – उत्तरे

7 . 1

1) $a = -5, d = 4$ 2) $a = 6, d = 1$

3) अंकगणिती श्रेढी नाही. 4) $a = -6, d = 3$

7 . 2

1) – 29 2) 3 3) 5, –3 4) 10 वे पद

7 . 3

1) 1) – 360 2) 630

2) 20

3) 2380

4) 1689

5) 3, 7, 11 किंवा 11, 7, 3

6) 1) $n = 16, l = 73$ 2) $a = - -3, d = 3$

3) $d = 375, Sn = -11400$ 4) $a = -\frac{3}{8}, Sn = \frac{220}{3}$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह – उत्तरे

1) 2

2) 1) $tn = 4n + 1$ 2) $tn = -4n - 3$

3) 3, 2

4) 15, 2

5) $30°, 60°, 90°$

6) 1) 26 वे पद 2) 25 वे पद

7) $a + b, b$

9) ती अंकगणिती श्रेढी आहे. पहिले पद $= a = 2a$

साधारण फरक $= d = 2d$

10) 3

11) 1) 22 पदांची 2) 13 पदांची

12) 10,000

14) $6r - 1$

15) 123525

माध्यमिक अभ्यासक्रम

गणित

चाचणी परीक्षा – बीजगणित

एकूण गुण – 24 | **वेळ – 45 मिनिटे**

सूचना –

1. सर्व प्रश्नांची उत्तरे वेगळ्या उत्तर पुस्तिकेत लिहा.
2. आपल्या उत्तर पुस्तिकेवर खालील माहिती अचूक भरा.

   नाव

   नोंदणी क्रमांक

   विषय

   चाचणी परीक्षाघटक

   संपूर्ण पत्ता
3. चाचणी परीक्षा उत्तरपत्रिका अध्ययन केंद्राच्या विषयशिक्षकांकडून तपासून घ्या. त्यांच्याकडून आपल्याला अभ्यासाबावत योग्य त्या सूचना दिला जातील.

चाचणी परीक्षेच्या उत्तरपत्रिका (N.I.O.S) येथे पाठवू नयेत.

1. $a^6 - ax^5 + x^4 - ax^3 + 3x - a + 2$ या वहुपदीचा $(x - a)$ हा अवयव आहे. $\therefore a =$

   A) $a = 1$ B) $a = -1$ C) $a = 2$ D) $a = -2$

2. $\dfrac{1}{(-3/5)^{-2}}$ या संख्येचा व्यस्तांक 2

   A) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2$ B) $\left(\dfrac{-5}{3}\right)^2$ C) $\left(\dfrac{-5}{3}\right)^{-2}$ D) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$

3. एका अंकगणिती श्रेढीमधील पहिल्या तीन पदांची बेरीज 15 आणि त्यांचा गुणाकार 45 आहे. तर संख्या 1

   A) 1, 3, 15 B) 2, 4, 9 C) 1, 5, 9 D) 0, 5, 9

4. जर $y = \frac{x-1}{x+1}$ तर $2y - \frac{1}{2y} =$ 1

A) $\frac{3x^2 - 10x - 3}{2(x^2 - 1)}$ B) $\frac{3x^2 - 10x + 1}{x^2 - 1}$

C) $\frac{3x^2 + 10x + 3}{2(x^2 - 1)}$ D) $\frac{3x^2 - 10x + 3}{2(x^2 - 1)}$

5. $\frac{4x^2 - 25}{2x^2 + 11x + 15}$ चे अतिसंक्षिप्त रूप. 1

A) $\frac{2x - 5}{x + 3}$ B) $\frac{2x + 5}{x + 3}$ C) $\frac{2x - 5}{x - 3}$ D) $\frac{2x - 5}{x - 3}$

6. जर $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3} \times \left(\frac{8}{7}\right)^{-11} = \left(\frac{7}{8}\right)^{x}$ तर x ची किंमत काढा. 2

7. आणि $\sqrt{8}$ या संख्यांच्या दरम्यानतील कोणत्याही तीन अपरिमेय संख्या काढा. 2

8. दोन बहुपदींचा मसावि $(x + 2)$ आहे. त्यांचा लसावि. $x^4 + 2x^3 - 8x - 16$ आहे. त्यापैकी एक वहुपदी $x^3 - 8$ आहे. तर दुसरी बहुपदी काढा. 2

9. एक संख्या व तिचा व्यस्तांक यांची बेरीज $\frac{50}{7}$ आहे. तर ती संख्या काढा. 2

10. एका आयताची लांबी त्याच्या रुंदीच्या दुपटीपेक्षा 5 से. मी. ने कमी आहे. आयताची परिमिती 110 सें.मी. असल्यास आयताचे क्षेत्रफळ काढा. 2

11. एका अंकगणित श्रेढीचे पहिले पद a दुसरे पद b आणि शेवटचे पद c आहे. तर या श्रेढीची वेरीज $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ ही आहे, हे सिद्ध करा. 4

12. 30 गुणांच्या चाचणीमध्ये अजयला जितके गुण मिळाले, त्यापेक्षा 10 जास्त गुण मिळाले असते तर या गुणांची नऊ पट त्याला प्रक्षत्य मिळालेल्या गुणांच्या वर्गाएवढी झाली असली. तर त्याला चाचणीत किती गुण मिळाले? 6

❖ ❖ ❖

घटक २

व्यावहारीक गणित

उत्पन्नापेक्षा खर्च नेहमी कमी करा हा उपदेश आपल्याला मोठयांकडून केला जातो. याचाच गभितार्थ असा की, अडचणीच्या काळासाठी काही शिल्लक टाका. पक्षी आणि प्राणी आपल्या घरटयात आणि गुहेत खाद्यपदार्थ साठवून पावसाळयाची तरतूद करत असतात. या उदाहरणावरून विदयार्थ्यांना बचतीचे महत्व आणि गरज समजावून सांगण्याचा प्रयत्न या घटकात केला आहे.

व्यावहारीक गणितावर जुन्या काळातील भारतीय गणित तज्ञांनी खूप काम केले आहे. योडोक्षू (इसपूर्व ३७०) या गणिततज्ञाने अपूर्णांक आणि गुणोत्तर प्रमाण यावर काम केले आहे. सम्राट अशोक आणि सम्राट चंद्रगुप्ताच्या काळात (गणितावर आधारीत) कर आकारणी होत होती. आर्य भट्ट, महावीर, ब्रम्हगुप्त, श्रीधराचार्य यासारख्या अनेक गणित तज्ञानी व्यावहारीक गणितावर संशोधन केले. बक्षाली येथे सापडलेल्या हस्तलिखितात व्यावहारीक गणितावर आधारीत पुष्कळ उदाहरणे दिली आहेत.

आपली बचत सुरक्षित राखणे हे अवघड काम आहे. बँका आणि काही वित्तिय संस्था आपल्या ग्राहकांचे पैसे सुरक्षित ठेवतात आणि मुदतीनंतर ठेवलेल्या पैशापेक्षा काही जादा रक्कम ग्राहकाला परत देतात. या जादा रकमेलाच व्याज असे म्हणतात.यामुळेच लोकांना पैशाची बचत करणे व साठविणे या गोष्टींना चालना मिळते. यासाठीच बँकेतील ठेवींवर मिळणारे व्याज काढण्याच्या पध्दतीचा अंतर्भाव अभ्यासक्रमात करण्यात आला आहे.

शासन नागरिकांना सुविधा उपलब्ध करून देते. त्यासाठी नागरिकांवर काही कर आकारले जातात. या काही करांपैकी विक्रीकर हा एक कर आहे. या कराची ओळख या घटकात करून दिली आहे. नफ्यासाठीच वस्तू खरेदी – विक्रीचे व्यवहार होत असतात. मागणीपेक्षा पुरवठा जास्त झाला किंवा कमी दर्जाच्या वस्तू विक्रीस आल्या तर तोटा सोसून व्यवहार करावा लागतो. त्यामुळे या घटकात नफा, तोटा आणि त्यांची टक्केवारी यांची ओळख करून दिली आहे. आपल्याकडे पुरेसे पैसे नसल्यामुळे आपणास काही वस्तू हप्त्याने घ्याव्या लागतात म्हणूनच हप्त्याने वस्तू घेतल्या असता त्यावर किती व्याज द्यावे लागेल, यासंबंधीची आकडेमोड कशी करावी याचे ज्ञान विद्यार्थ्यांना या घटकात दिले आहे. आपण उसने घेतलेले (व्याजाने घेतलेले पैसे) वेळेवर परत करू शकत नाही. अशा वेळी उसने पैसे देणारा त्या पैशाच्या झालेल्या व्याजावर व्याज आकारणे. या व्याज आकारणीस 'चक्रवाढ व्याज आकारणी' असे म्हणतात. त्यामुळे चक्रवाढ व्याज काढण्याचे सूत्र वापरून आपण वस्तूंच्या किंमतीत होणारी वाढ किंवा घट काढू शकतो.

Mukta Vidya Vani

Mukta Vidya Vani is a pioneering initiative of the National Institute of Open Schooling (NIOS) for using Streaming Audio for educational purposes. This application of ICT will enhance accessibility as well as quality of programme delivery of NIOS Programmes. This is a rare accomplishment of NIOS as the first Open and Distance Learning Institute to start a two way interaction with its learners, using streaming audio and the internet.

Keeping in mind the fact that the transmission is done through the web, the NIOS website (www.nios.ac.in) has a link that will take any user to the Mukta Vidya Vani. Mukta Vidya Vani thus enables a two way communication with any audience that has access to an internet connection, from the studio at its Headquarters in NOIDA, where NIOS has set up a state-of-art studio, which will be used for this purpose as well as for recording educational audio programmes meant for NIOS learners, though others can also take advantage of this facility.

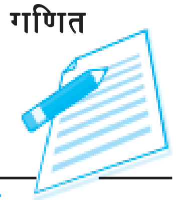
Mukta Vidya Vani is a modern interactive, participatory and cost effective programme, involving an academic perspective along with the technical responsibilities of production of audio and video programmes, which are one of the most important components of the multi channel package offered by the NIOS. These programmes will attempt to present the topic/ theme in a simple, interesting and engaging manner, so that the learners get a clear understanding and insight into the subject matter.

NIOS has launched a scheme to motivate the learners to participate in the Mukta Vidya Vani by sending their Audio CD's to the respective regional centre on various subjects such as-

1. Poetry / Shloka recitation
2. Story telling
3. Radio Drama
4. Music
5. Talks on various topic related to the NIOS curriculum including Painting, Vocational Subjects etc.
6. Quiz
7. Mathematics puzzles etc.

The selected CD can be webcast on Mukta Vidya Vani and the winner participant be rewarded suitably.

Learners may visit the NIOS website and participate in live programmes from 2pm to 5pm on all week days and from 10.30am to 12.30pm on Saturdays, Sundays and all Public Holidays. The Subject Experts in the Studio will respond to their telephonic queries during this time. A weekly schedule of the programmes for webcast is available on the NIOS website. The Studio telephone number are 0120-4626949 and Toll Free No. 1800-180-2543.



8

टक्केवारी आणि तिचे उपयोजन

(Percentage and It's Applications)

'सेल ! 60% पर्यंत सूट' अशा प्रकारच्या जाहिराती आपण नेहमी वर्तमानपत्रातून वाचतो. टिव्ही वर पाहतो. जाहिरात फलकावर देखील पाहतो. त्याचप्रमाणे वर्तमानपत्रातून, 'निवडणूकीमध्ये 70% पेक्षा जास्त मतदान झाले'. बँकांनी मुदत ठेवीचा दर 8.5% वरून 7% केला. बोलताना 'रमेशला बारावीच्या परीक्षेत 93% गुण मिळाले' असे म्हणतो.

वरील प्रकारच्या विधानांमध्ये महत्वाचा शब्द टक्के (%) हा आहे. इंग्रजीमधील परसेंट (Percent) हा शब्द लॅटिन भाषेमधील per centum या शब्दावरून आला आहे. याचा अर्थ शंभराला किंवा शंभरच्या भागाला असा होतो.

उद्दिष्टे :-

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खालील बाबींचे ज्ञान होईल.

- टक्केवारीचा संबोध ध्यानात येईल.
- दिलेल्या माहितीची किंवा परिमाणाची टक्केवारी काढता येईल.
- टक्केवारीवर आधारीत उदाहरणे सोडविता येतील.
- नफा आणि तोटा यावर आधारित उदाहरणे सोडविता येतील.
- नगाची छापील किमंत, विक्रीची किंमत, सूट किंवा शेकडा सूट काढता येईल.
- सुटीवर आधारीत व्यस्त उदाहरणे (inverse problems) सोडविता येतील.
- विशिष्ट रक्कम, विशिष्ट दराने, विशिष्ट काळासाठी गुंतविल्यानंतर त्यावर मिळणारे व्याज आणि एकूण रक्कम काढता येईल.
- सरळ व्याज आणि चक्रवाढ व्याज यासंबंधीचे संबोध ध्यानात येतील.

- विशिष्ट रक्कम, विशिष्ट दराने, विशिष्ट काळासाठी सरळ व्याजाने आणि तीच रक्कम त्याच दराने त्याच काळासाठी, चक्रवाढ व्याजाने गुंतविल्यास सरळव्याज आणि चक्रवाढ व्याज यामधील फरक लक्षात येईल.
- चक्रवाढ व्याज काढण्याचे सूत्र वापरून व्यवहारातील गोष्टीमध्ये नियमितपणे किंवा बदललेल्या प्रमाणात होणारी वाढ किंवा घट मोजता येईल.

अपेक्षित पूर्वज्ञान :

- पूर्णांक, व्यवहारी अपूर्णांक आणि दशांश अपूर्णांक यांच्यावरून करण्यात येणाऱ्या बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या मूलभूत क्रिया
- दोन अपूर्णांकाची तुलना

8.1 शतमान

$\frac{3}{4}$ म्हणजे 4 समान भागापैकी 3 भाग

$\frac{7}{13}$ म्हणजे 13 समान भागापैकी 7 भाग

23/100 म्हणजे 100 समान भागापैकी 23 भाग

हे ध्यानात घ्या

ज्या अपूर्णांकाचा छेद 100 असतो, तो अपूर्णांक टक्केवारी दाखवितो.

उदा. $\frac{23}{100}$ हा अपूर्णांक '23 टक्के' असा वाचतात.

शतमानासाठी % हे चिन्ह वापरतात.

ज्या गुणोत्तरामध्ये दुसरा अंक 100 असतो, त्यालाही टक्के असेच म्हणतात.

उदा ः 33:100 म्हणजे '33टक्के' होय.

$\frac{3}{5}$ आणि $\frac{1}{2}$ या गुणोत्तरांची तुलना करण्यासाठी आपण ल.सा.वि. काढून छेद सारखा करतो हे लक्षात घ्या.

म्हणजेच $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} X \frac{2}{2} = \frac{6}{10}$ आणि

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} X \frac{5}{52} = \frac{5}{10}$$

आता तुलनेने,

$$\frac{6}{10} > \frac{5}{10}$$

$$\therefore \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$$

याच उदाहरणामध्ये आपण छेद 100 करू.

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} X \frac{20}{20} = \frac{60}{100} \text{ किंवा } 60\ \%$$

आणि $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} X \frac{50}{50} = \frac{50}{100}$ किंवा 50 %

60% हे 50% पेक्षा जास्त असल्याने

$$\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$$

8.2 अपूर्णांकांचे शतमान किंवा शतमानाचे अपूर्णांकात रूपांतर करणे

मागील भागात आपण अपूर्णांकाचे शतमानात रूपांतर कसे करतात ते पाहिले. आपण अपूर्णांकाचा छेद 100 येईल अशा पध्दतीने अपूर्णांकाच्या अंश व छेदाला एकाच संख्येने गुणतो आणि अपूर्णांकाच्या अंशापुढे % हे चिन्ह लिहितो.

उदा :-

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 75 \times \frac{1}{100} = 75\% \text{ and}$$

$$\frac{4}{25} = \frac{4}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{16}{100} = 16 \times \frac{1}{100} = 16\%$$

सूचना :-

अपूर्णांकाचे शतमानात रूपांतर करताना अपूर्णांकाला 100 ने गुणा व अपूर्णांकाला सोपे रूप द्या आणि आलेल्या उत्तरापुढे % हे चिन्ह लिहा.

$$\frac{4}{25} = \frac{4}{25} \times 100\% = 16\%$$

याउलट करताना,

शतमानाचे अपूर्णांकात रूपांतर करताना % हे चिन्ह काढून टाका आणि आकडयाला $\frac{1}{100}$ ने गुणा (किंवा आकडयाला 100 ने भागा) आणि सोपे रूप द्या.

उदा.ः

$$47\% = 47 \times \frac{1}{100} = \frac{47}{100}, \qquad 17\% = 17 \times \frac{1}{100} = \frac{17}{100}, \qquad 3\% = \frac{3}{100}$$

$$45\% = 45 \times \frac{1}{100} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}, \quad 210\% = \frac{210}{100} = \frac{21}{10}, \qquad x\% = \frac{x}{100}$$

8.3 दशांश अपूर्णाकाचे शतमान किंवा शतमानाचे दशांश अपूर्णाकात रूपांतर करणे

पुढील उदाहरणे लक्षात घ्या

$$0.35 = \frac{35}{100} = 35 \times \frac{1}{100} = 35\%$$

$$4.7 = \frac{47}{10} = \frac{470}{100} = 470 \times \frac{1}{100} = 470\%$$

$$0.459 = \frac{459}{1000} = \frac{459}{10} \times \frac{1}{100} = 45.9\%$$

$$0.0063 = \frac{63}{10000} = \frac{63}{100} \times \frac{1}{100} = 0.63\%$$

अशा त–हेने दशांश अपूर्णांकाचे शतमानात रूपांतर करतांना दशांश चिन्ह दोन घरे उजवीकडे सरकवावे आणि संख्येपुढे % हे चिन्ह लिहा.

याउलट

शतमानाचे दशांश अपूर्णांकात रूपांतर करताना % हे चिन्ह काढून टाका आणि दशांश चिन्ह दोन घरे डावीकडे सरकवा.

उदा :-

43% = 0.43	75% = 0.75	12% = 0.12
9% = 0.09	115% = 1.15	327% = 3.27
0.75% = 0.0075	4.5% = 0.045	0.2% = 0.002

या पध्दतीची आणखी काही उदाहरणे पाहू .

उदा.8.1 श्वेताला चाचणीमध्ये 25 पैकी 18 गुण मिळाले तर तिला किती टक्के गुण मिळाले?

उकल ः एकूण गुण = 25

मिळालेले गुण = 18

मिळालेले गुण अपूर्णांकात $= \frac{18}{25}$

मिळालेले गुण शतमानात $= \frac{18}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{72}{100} = 72\%$

दुस–या पध्दतीने,

मिळालेले गुण शतमानात $= \frac{18}{25} \times 100\% = 72\%$

उदा ः 8.2 – दुकानामध्ये असलेल्या बुटांपैकी ¼ बूट सवलतीच्या दराने विक्रीस ठेवले आहेत. तर नेहमीच्या दराने विक्रीस असलेल्या बुटांची टक्केवारी काढा.

उकल ः एकूण बुटांपैकी सवलतीच्या दराने विक्री होणारे बुट $= \frac{1}{4}$ (अपूर्णांकात)

$\therefore$ नेहमीच्या दराने विक्री असणारे बूट (अपूर्णांकात) $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 75\% \quad \text{किंवा} \quad \frac{3}{4} \times 100\% = 75\%$$

उदाः 8.3 – वर्गातील 40 विद्यार्थ्यांपैकी 32 विद्यार्थी सहलीला गेले. तर सहलीला गेलेल्या विद्यार्थ्यांची टक्केवारी काढा.

उकल ः वर्गातीका एकूण विद्यार्थी = 40

सहलीला गेलेले विद्यार्थी = 32

$\therefore$ सहलीला गेलेल्या विद्यार्थ्यांची टक्केवारी

$$= \frac{32}{40} \times 100\% = 80\%$$

उदा ः 8.4 : ARITHMETIC या शब्दांमधील I या अक्षराची टक्केवारी काढा

उत्तर ः शब्दामधील एकूण अक्षरे = 10

शब्दामधील एकूण I अक्षरे = 2

$\therefore$ I अक्षराचे टक्केवारी $= \frac{2}{10} \times 100\% = 20\%$

उदा ः 8.5 : ॲसिड आणि पाणी यांच्या 80 लिटर मिश्रणात 20 लिटर ॲसिड आहे. तर मिश्रणात किती टक्के पाणी आहे ते काढा.

उत्तर ः मिश्रणाचे एकूण आकारमान = 80 लिटर्स

ॲसिडचे एकूण आकारमान = 20 लिटर्स

$\therefore$ पाण्याचे एकूण आकारमान = 80-20 = 60 लिटर्स

$\therefore$ मिश्रणातील पाण्याची टक्केवारी $= \frac{60}{80} \times 100\% = 75\%$

आपली प्रगती आजमावा :

१. खालील अपूर्णांकाचे टक्केवारीत रूपांतर करा.

(a) $\frac{12}{25}$ (b) $\frac{9}{20}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{6}{15}$ (e) $\frac{125}{625}$

(f) $\frac{3}{10}$ (g) $\frac{108}{300}$ (h) $\frac{189}{150}$ (i) $\frac{72}{25}$ (j) $\frac{1231}{1250}$

२. खालील शतमानाचे अपूर्णांकात रूपांतर करा.

(a) 53% (b) 85% (c) $16\frac{7}{8}\%$ (d) 3.425% (e) 6.25%

(f) 70% (g) $15\frac{3}{4}\%$ (h) 0.0025% (i) 47.35% (j) 0.525%

३. खालील दशांश अपूर्णांकाचे शतमानात रूपांतर करा.

(a) 0.97 (b) 0.735 (c) 0.03 (d) 2.07 (e) 0.8

(f) 1.75 (g) 0.0250 (h) 3.275 (i) 0.152 (j) 3.0015

4. खालील टक्केवारीचे दशांश अपूर्णांकात रूपांतर करा.

(a) 72% (b) 41% (c) 4 % (d) 125 % (e) 9 %

(f) 410% (g) 350% (h) 102.5% (i) 0.025% (j) 10.25%

5. गुरूप्रीतने परीक्षेत विचारलेल्या अर्ध्या प्रश्नांची उत्तरे बरोबर दिली. तर तिने किती टक्के प्रश्नांची उत्तरे बरोबर दिली ?

6. एका चाचणीमध्ये प्रखरला 20 पैकी 18 गुण मिळाले तर त्याला किती टक्के गुण मिळाले ?

7. हरीशला मासिक ₹ 14,400 वेतन मिळते यापैकी तो ₹ 900 ची बचत करतो. तर तो किती टक्के बचत करतो ?

8. निवडणुकीमध्ये एका उमेदवाराला 47,500 मते पडली. तो निवडणुकीत 5000 मतांनी पराभूत झाला. जर दोनच उमेदवार उभ असतील आणि एकही मत बाद झाले नसेल, तर विजयी उमेदवारास किती टक्के मते पडली, ते काढा.

9. PERCENTAGE या शब्दातील E या अक्षराची टक्केवारी काढा.

10. 40 विद्यार्थ्याच्या वर्गात 10 विद्यार्थ्यांना प्रथम श्रेणी 15 विद्यार्थ्यांना व्दितीय श्रेणी व 13 विद्यार्थ्यांना तृतीय श्रेणी मिळाली तर किती टक्के विद्यार्थी अनुत्तीर्ण झाले ते काढा.

8.4 दिलेल्या परिमाणाचे किंवा संख्येचे शतमान काढणे

शतमान दिले असता प्रथम शतमानाचे व्यवहारी अपूर्णांक किंवा दशांश अपूर्णांकात रूपांतर करून देणाऱ्या अपूर्णांकास दिलेल्या संख्येने गुणावे.

90 चे 25% $= \frac{25}{100} \times 90 = 22.50$

किंवा 90 चे 25% $= 0.25 \times 90 = 22.50$

120 चे 60% $= 0.60 \times 120 =$ Rs. 72.00

80 किलोचे 120% = 1.20 X 80 किलो = 96 किलो

आता रोजच्या व्यवहारातील काही उदाहरणे पाहू.

उदाः 8.6 : परीक्षेत नितुला 62 % गुण मिळाले. परीक्षा एकुण 600 गुणांची असेल, तर नितूला मिळालेले गुण काढा

उत्तर ः आपल्याला 600 चे 62% काढावयाचे आहेत.

∴ 600 चे 62% = 0.62 X 600 = 372 गुण

∴ नितूला 372 गुण मिळाले.

उदाः 8.7 : नरेशला दरमहा ₹ 30,800 मिळतात. त्यापैकी तो 50% रक्कम घरखर्चासाठी, 15% रक्कम वैयक्तिक खर्चासाठी व 20% रक्कम मुलांवरीलखर्चासाठी वापरतो. तर तो दरमहा किती बचत करतो, ते काढा.

उत्तर ः घरखर्च = 50%

वैयक्तिक खर्च = 15%

मुलांवरील खर्च = 20%

एकूण खर्च = (50+15+20)% = 85%

$\therefore$ बचत = (100-85)% = 15%

$\therefore$ 30,800 चे 15% = $\therefore$ (0.15 X 30,800)

= $\therefore$ 4,620 ₹

उदाः 8:8 - 144 हे 360 चे किती टक्के आहेत ?

उत्तर ः समजा 360 चे x % = 144 आहेत.

$$\therefore \frac{x}{100} \times 360 = 144$$

किंवा $x = \frac{144}{360} \times 100 = 40\%$

दुसऱ्या रीतीने,

360 चे 144 म्हणजे $\frac{144}{360}$ हा अपूर्णांक होय.

$$\therefore \text{ टक्केवारी } = \frac{144}{360} \times 100\% = 40\%$$

उदाः 8.9 : जर 120 ही संख्या 96 केली तर ती संख्या किती टक्के कमी केली ?

उत्तर ः एकूण कपात = 120 – 96 = 24

$$\therefore \text{ कपातीची टक्केवारी } = \frac{24}{120} \times 100\% = 20\%$$

उदाः 8.10 : एका वस्तूची किंमत ₹ 450 होती. ती ₹ 495 केली. तर त्या वस्तूच्या किंमतीमध्ये किती टक्के वाढ झाली ते काढा.

उत्तर ः किंमतीत झालेली वाढ = ₹ (495 – 450)

= ₹ 45

वाढीची टक्केवारी = $\frac{45}{450} \times 100 = 10\%$

उदा ः 8.11 : एका शाळेत 60% मुली आहेत. मुलींची संख्या 690 असल्यास शाळेतील एकूण विद्यार्थी संख्या काढा. शाळेत असणा–या मुलांची संख्या काढा.

उत्तर ः शाळेची एकूण विद्यार्थी संख्या x आहे असे मानू.

x चे 60% = 690

$$\therefore \frac{60}{100} \times x = 690 \text{ or } x = \frac{690 \times 100}{60} = 1150$$

∴ शाळेची एकूण विद्यार्थीसंख्या = 1150

∴ शाळेतील मुलांची संख्या = 1150 – 690 = 460

उदा ः 8.12 : A चे उत्पन्न B च्या उत्पन्नापेक्षा 25% नी जास्त आहे. B चे उत्पन्न C च्या उत्पन्नापेक्षा 8 % नी जास्त आहे. A चे उत्पन्न ₹ 20,250 असल्यास C चे उत्पन्न काढा.

उत्तर ः C चे उत्पन्न ₹ x आहे असे मानू.

∴ B चे उत्पन्न = चे x + 8%

$$= x + \frac{8x}{100} = \frac{108}{100} \times x$$

$$\therefore \text{A चे उत्पन्न} = \frac{108x}{100} + 25\% \text{ चे } \frac{108x}{100}$$

$$= \frac{108x}{100} \times \frac{125}{100}$$

$$\therefore \frac{108}{100} \times x \times \frac{125}{100} = 20250$$

$$\text{किंवा } x = 20250 \times \frac{100}{108} \times \frac{100}{125} = 15000$$

∴ C चे उत्पन्न = ₹ 15,000

उदाः 8. 13 : चहाच्या भावात 10% कपात केल्यामुळे एका व्यापा–याला ₹ 22,500 मध्ये 25 किलो जास्त चहा मिळतो. तर कपातीनंतरचा चहाचा किलोचा दर काढा. तसेच चहाचा कपातीपूर्वीचा दर काढा.

उत्तर ः ₹ 22,500 चा 10% = $\frac{10}{100} \times 22500 =$ ₹ 2250

∴ 25 Kg चहाची कपातीनंतरची किंमत = ₹ 2250

$\therefore$ कपातीनंतरची चहाची किंमत दर किलोची किंमत $= ₹ \dfrac{2250}{25}$

$= ₹ 90$

$\therefore$ कपातीनंतरच्या चहाचा किलोचा दर = ₹ 90

कपात 10% आहे.

$\therefore$ चहाचा कपातीपूर्वीचा दर = ₹ 100

उदाः 8.14 : एका विद्यार्थ्याला एका विषयात 45% आणि दुस–या विषयात 70% गुण मिळाले तर एकूण टक्केवारी 60 होण्यासाठी त्याला तिस–या विषयात किती गुण मिळाले पाहिजेत?

उत्तर : प्रत्येक विषय 100 गुणांचा आहे असे मानू

$\therefore$ पहिल्या विषयातील गुण 100 पैकी 45% = 45

दुस–या विषयातील गुण 100 पैकी 70% = 70

तिन्ही विषयातील एकूण गुण 300 पैकी 60%

$$= \frac{60}{100} \times 300 = 180$$

$\therefore$ तिस–या विषयातील गुण = 180 – (45+70)

= 180 – 115

= 65

उदाः 8.15 : 15% वाढीमुळे एक रक्कम ₹ 19, 320 होते. तर ती रक्कम किती ?

उत्तर : ही रक्कम ₹ x आहे असे मानू

$\therefore x + 15\% \text{ of } x = 19320$

$$x + \frac{15x}{100} = 19320 \text{ or } \frac{115x}{100} = 19320$$

$$\therefore x = \frac{19320 \times 100}{115} = 16800$$

$\therefore$ ती रक्कम = ₹ 16,800

टिपा

आपली प्रगती आजमावा 8:2

१. किंमत काढा – (i) 1250 चे 16% (ii) 1200 चे 47%

२. एका कुटूंबाचे मासिक अंदाजपत्रक ₹ 7500 चे आहे. त्यापैकी 35% खर्च अन्नपदार्थांवर होतो. तर अन्नपदार्थांवर किती रक्कम खर्च होते ?

३. एका बागेमध्ये 500 वृक्ष आहेत. त्यापैकी 35% वृक्ष 20% झुडपे 25% औषधी वनस्पती आणि उरलेल्या वेली आहेत. तर प्रत्येक प्रकारच्या वनस्पतींची संख्या काढा.

4. 60 चे 45 मध्ये रूपांतर केले. तर किती टक्के घट झाली ?

5. 80 चे 125 रूपांतर केले, तर किती टक्के वाढ झाली ?

६. परीक्षेत उत्तीर्ण होण्यासाठी 40% गुण आवश्यक आहेत. रमणला 178 गुण पडले. परीक्षा उत्तीर्ण होण्यासाठी त्याला 22 गुण कमी पडले तर एकूण परीक्षा किती गुणांची होती ?

७. मला शाळेत जाण्यासाठी 45 मिनिटे लागतात. त्यापैकी 80% वेळ मी बसमध्ये असतो. तर बसमधील प्रवासाचा वेळ किती असेल ?

८. एका निवडणुकीमध्ये 25% मतदारांनी मतदान केले नाही. उभे असलेल्या दोन उमेदवारांपैकी एकाला 40% मते पडली व तो 900 मतांनी पराभूत झाला तर एकूण मतदारांची संख्या किती होती ते काढा.

९. साखरेच्या किंमतीत 25% वाढ झाल्यामुळे ₹ 225 ला पहिल्यापेक्षा 1.5 कि.ग्रॅ. साखर कमी मिळते तर दर किलो साखरेचा मूळ भाव व वाढलेला भाव काढा ?

१०. एक संख्या 20% ने वाढविली आणि नंतर 20% ने कमी केली तर आलेल्या उत्तरात किती टक्के वाढ किंवा घट झाली ?

११. पहिल्या परीक्षेत A ला 12 आणि B ला 10 गुण मिळाले. दुसऱ्या परीक्षेत A ला 14 तर B ला 12 गुण मिळाले. तर कोणत्या विद्यार्थ्यांची गुणात जास्त प्रगती झाली ?

१२. एका स्पर्धा परीक्षेला एकूण 30,000 विद्यार्थी बसले. त्यापैकी 40% मुली उरलेले मुलगे होते. यापैकी 10% मुलगे आणि 12 % मुली वक्षीसपात्र ठरल्या. तर एकूण वक्षीसपात्र विद्यार्थ्यांची टक्केवारी काढा.

१३. सुनिलचे उत्पन्न शैलेशच्या उत्पन्नापेक्षा 10% जास्त आहे. शैलेशचे उत्पन्न स्वामीच्या उत्पन्नापेक्षा 20% जास्त आहे. स्वामीला सुनिलपेक्षा ₹ 3200 कमी मिळतात. तर प्रत्येकाचे उत्पन्न काढा.

8.5 टक्केवारीचे उपयोजन

रोजच्या व्यवहारात अनेक ठिकाणी आपण टक्केवारीची संकल्पना वापरतो. उदा. नफा तोटा, सूट, सरळव्याज, चक्रवाढ व्याज, वाढीचा किंवा घटीचा दर, अशासारख्या उपयोजनांची आपण चर्चा करणार आहोत.

8.5.1 नफा – तोटा

नफा – तोटा संदर्भातील व्याख्या आणि सूत्रे यांची आपण उजळणी करू.

- **खरेदी किंमत (Cost Price C.P)** - ज्या किंमतीला वस्तू खरेदी करतात. त्या किंमतीला वस्तूची खरेदी किंमत असे म्हणतात.
- **विक्री किंमत (Selling Price S.P)** - ज्या किंमतीला वस्तू विकतात त्या किंमतीला वस्तूची विक्री किंमत असे म्हणतात.
- **नफा** – विक्री किंमत $>$ खरेदी किंमत असे असल्यास नफा होतो.

  नफा = विक्री किंमत – खरेदी किंमत

- **तोटा** – खरेदी किंमत $>$ विक्री किंमत असे असल्यास तोटा होतो.

  तोटा = खरेदी किंमत – विक्री किंमत

- **सूत्रे** – नफ्याची टक्केवारी $= \left(\dfrac{\text{नफा}}{\text{खरेदी किंमत}} \text{ X } 100\right)\%$

$$\text{तोटयाची टक्केवारी} = \left(\frac{\text{तोटा}}{\text{खरेदी किंमत}} \text{ X } 100\right)\%$$

$$\text{विक्री किंमत} = \frac{(\text{खरेदी किंमत}) \text{ X } (100 + \text{शेकडा नफा})}{100}$$

$$= \frac{(\text{खरेदी किंमत}) \text{ X } (100 - \text{शेकडा तोटा})}{100}$$

$$\text{खरेदी किंमत} = \frac{\text{विक्री किंमत X } 100}{(100 + \text{शेकडा नफा})}$$

$$= \frac{\text{विक्री किंमत X } 100}{(100 - \text{शेकडा तोटा})}$$

टीप : शेकडा नफा किंवा शेकडा तोटा नेहमी खरेदी किंमतीवरच काढला जातो.

वरील सूत्रांचा वापर करून नफा– तोटयाच्या संदर्भात काही उदाहरणे आपण पाहू या.

उदा ः 8.16 : एका दुकानदाराने ₹ 360 खरेदी किंमत असलेली वस्तू ₹ 270 ला विकली. तर त्याला शेकडा किती नफा किंवा तोटा झाला ?

उकल ः खरेदी किंमत = ₹ 360, विक्री किंमत = ₹ 270

खरेदी किंमत > विक्री किंमत

∴ दुकानदाराला तोटा झाला.

∴ तोटा = ख.किं.> वि.किं

= 360 - 270

= ₹ 90

$$\text{शेकडा तोटा} = \left(\frac{\text{तोटा}}{\text{ख.किं.}}\times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{90}{360}\times 100\right)$$

= 25%

उदा ः 8.17 : सुधाने ₹ 4,52,000 ला घर घेतले. त्या घराच्या दुरूस्तीसाठी तिने ₹ 28,000 खर्च केले. तिने ते घर ₹ 4,92,000 ला विकले. तर तिला शेकडा किती नफा किंवा तोटा झाला ?

उकल ः ख. किं. = ख.कि.+ दुरूस्तीचा खर्च

= ₹ 4,52,000 + ₹ 28,000

= ₹ 48,00,000

वि.किं. = ₹ 4, 92,000

वि.किं. > ख.किं.

∴ नफा = वि.किं. – ख. किं.

= 4,92,000 – 4,80,000

= ₹ 12,000

$$\text{शेकडा नफा} = \left(\frac{\text{नफा}}{\text{ख.किं.}}\times 100\right)$$

$$\text{ख.किं.} = \frac{12000\times 100}{480000} = \frac{5}{2}\% = 2.5\%$$

उदाः 8.18 : एक पुस्तक ₹ 258 ला विकल्याने प्रकाशकाला 20% नफा होतो. तर 30% नफा होण्यासाठी त्याने पुस्तकाची किंमत किती ठेवावी ?

उकल ः वि.कि. = ₹ 258

नफा = 20%

$$\text{ख.कि.} = \frac{\text{वि.कि. X } 100}{100 + \text{शेकडा नफा}}$$

$$= \frac{258 \times 100}{120} = 215$$

आता ख.कि. = ₹ 215, शेकडा नफा = 30

$$\therefore \text{वि.कि.} = \frac{(\text{ख.कि.}) \times (100 + \text{शेकडा नफा})}{100}$$

$$= \frac{215 \times 130}{100}$$

= ₹ 279.50

उदाः 8.19 : एका विक्रेत्याने ₹ 100 ला 25 या दराने संत्री खरेदी केली आणि ₹ 100 ला 20 या भावाने विकली तर त्याला शेकडा किती नफा किंवा तोटा झाला ?

उकल ः 25 संत्र्यांची ख. कि. = ₹ 100

$\therefore$ 1 संत्र्याची ख. कि. = $\frac{100}{25}$ = ₹ 4

एका संत्र्याचे वि.कि. = $\frac{100}{20}$ = ₹ 5

$\therefore$ एका संत्र्यावर झालेला नफा = ₹ (5-4) = ₹ 1

$$\therefore \text{शेकडा नफा} = \frac{\text{नफा}}{\text{ख.कि.}} \text{ X } 00$$

$$= \frac{1}{4} \text{ x } 100 = 25\%$$

टिपा

उदाः 8.20 : एका माणसाने दोन घोडे प्रत्येकी ₹ 29,700 ला विकले. त्यामुळे त्याला एका घोडयाच्या विक्रीत 10% तोटा आणि दुस–या घोडयाच्या विक्रीत 10% नफा झाला. तर या व्यवहारात त्याला किती टक्के नफा किंवा तोटा झाला ?

उकल : पहिल्या घोडयाची वि.कि. = ₹ 29, 700

शेकडा तोटा = 10

$$\therefore \text{ख. कि.} = \frac{(\text{वि.कि.}) \times 100}{(100 - \text{शेकडा तोटा})}$$

$$= \frac{(29{,}100) \times (100)}{100}$$

$$= \frac{29{,}700 \times 90}{100}$$

$$= ₹\ 33{,}000$$

दुस–या घोडयाची वि.कि. = ₹ 29, 700

शेकडा नफा = 10

$$\therefore \text{ख. कि.} = \frac{(\text{वि.कि.}) \times (100 + \text{शेकडा नफा})}{100}$$

$$= \frac{(29{,}700) \times (100+10)}{100}$$

$$= \frac{(29{,}700 \times 100)}{100}$$

$$= ₹\ 27{,}000$$

एकूण ख. कि. = ₹ (33,000 + 27,000)

= ₹ 60,000

एकूण वि. कि. = ₹ (2 X 29,700)

= ₹ 59,400

∴ एकूण तोटा = ₹ 60,000 - ₹ 59,400 = ₹ 600

$$\therefore \text{ख. कि.} = \frac{\text{तोटा}}{\text{खरेदी}} \times 100 = \frac{600}{60{,}000} \times 100 = 1\%$$

उदाः 8.21 : 15 वस्तूंची ख.कि. 12 वस्तूंच्या विक्री किंमतीबरोबर आहे तर शेकडा नफा काढा.

उकल : 15 वस्तूंची ख. कि. ₹ 15 आहे असे मानू

$\therefore$ 12 वस्तूंची वि.कि. ₹ 15 येईल.

$\therefore$ 15 वस्तूंची वि.कि. = $\frac{15}{12} X 15 =$ ₹. $\frac{75}{4}$ येईल.

$\therefore$ नफा = वि.कि – ख.कि

=

= ₹ $\frac{15}{4}$

$\therefore$ शेकडा नफा = $\frac{\text{नफा}}{\text{ख.कि.}}$

$= \frac{15/4}{15} \times 100$

$= 25\%$

उदाः 8.22 : एक घडयाळ 12% नफ्याने विकले. जर घडयाळाची वि.कि. ₹33 ने वाढविली असती तर नफा 14% झाला असता, तर घडयाळाची खरेदी किंमत काढा.

उकल : घडयाळाची खरेदी किंमत ₹x आहे असे मानू

$\therefore$ वि.कि. = $\frac{x \times 112}{100} = \frac{112x}{100}$

घडयाळाची वि.कि. ₹ 33 ने वाढविली.

$\therefore$ नवीन वि.कि. = $\left(\frac{112\,x}{100} + 33\right)$

$\therefore$ नवीन नफा = 14%

$\therefore$ ख.कि. = x = $\frac{\left(\frac{112\,x}{100} + 33\right) \text{x}\, 100}{100}$

$$\therefore 114x = 112x + 3300$$

$$\therefore 114x - 112x = 3300$$

$$\therefore 2x = 3300$$

$$\therefore = 3300/2 = ₹\,1650$$

(∴ घडयाळाची ख.कि. ₹ 1650)

आपली प्रगती आजमावा 8.3

१. एका दुकानदाराने एक कपाट ₹ 4500 ला खरेदी केले व ₹ 6000 ला विकले. त्या व्यवहारात त्याला शेकडा नफा किंवा तोटा किती झाला ते काढा.

२. एका दुकानदाराने एक कूलर ₹ 3800 ला खरेदी केला. त्याचा वाहतूक खर्च ₹ 200 झाला. त्याने तो कूलर ₹ 4400 ला विकला तर त्याला शेकडा किती नफा झाला तो काढा.

३. एका विक्रेत्याने 5 लिंबांना ₹ 7 या दराने लिंबे खरेदी केली. त्याने एक लिंबू ₹ 1.75 ने विकले तर त्याला झालेला शेकडा नफा काढा.

४. एका विक्रेत्याने ₹ 5 ला 2 या दराने संत्री खरेदी केली आणि ₹ 8 ला 3 या दराने विकली. यामुळे त्याला ₹ 20 मिळाले. तर त्याने किती संत्री खरेदी केली ते काढा.

५. एक सायकल ₹ 2024 ला विकल्याने दुकानदारास 12% तोटा झाला. 12% नफा होण्यासाठी त्याने सायकलची विक्री किंमत किती ठेवावी ?

6. 45 संत्री ₹ 160 ला विकल्याने फळे विकणाऱ्या बाईला 20% तोटा झाला. या सर्व व्यवहारात 20% नफा घेण्यासाठी तिने ₹ 112 ला किती संत्री विकावीत ?

७. एका विक्रेत्याने दोन यंत्रे प्रत्येकी ₹ 2400 ला विकली. त्याला एका यंत्राच्या विक्रीत 20% नफा व दुसऱ्या यंत्राच्या विक्रीत 20% तोटा झाला. तर या व्यवहारात त्याला किती टक्के नफा किंवा तोटा झाला ?

८. हरीशने एक टेबल ₹ 960 घेतले ते 5% नफा घेऊन रामनला विकले. 10% नफा घेऊन रामनने ते मुकुलला विकले. तर मुकुलने ते टेबल किती रूपयांना घेतले ते काढा.

९. एका माणसाने ₹ 5 ला 6 केळी या दराने काही केळी व तितकेच डझन केळी ₹ 15 डझन भावाने विकत घेतली. त्याने ती सर्व केळी ₹ 14 डझन या भावाने विकली. तर या व्यवहारात त्याला शेकडा नफा किंवा तोटा किती झाला ते काढा.

10. 20 वस्तूची विक्री किंमत 23 वस्तूंच्या खरेदी किंमतीबरोबर आहे. तर या व्यवहारातील शेकडा नफा किंवा तोटा काढा.

8.5.2. सूट (Discount)

सेल	}	दिवाळी धमाका
50% पर्यंत सूट		सर्व वस्तूंवर 20% सूट

या प्रकारच्या जाहिराती आपण सणासुदीच्या काळात पाहतो.

एखाद्या वस्तूची किंमत छापील किंमतीपेक्षा कमी किंमत घेणे म्हणजे सूट होय. 20% सूट म्हणजे वस्तूच्या छापील किंमतीपेक्षा 20% कमी दराने ती वस्तू विकणे होय. उदा. एका वस्तूची छापील किंमत ₹100 आहे. ती वस्तू ₹ 80 ला विकली म्हणजेच छापील किंमतीपेक्षा ₹ 20 कमी घेतले.

या संदर्भात वापरण्यात येणा–या काही संज्ञांच्या व्याख्या आपण पाहू.

छापील किंमत (Market Price or List Price) –

वस्तू ज्या किंमतीस विकावयाची असते, ती किंमत वस्तूवर छापलेली असते, तिला त्या वस्तूची छापील किंमत असे म्हणतात.

सूट (Discount) –

एखाद्या वस्तूच्या छापील किंमतीपेक्षा कमी किंमत घेणे म्हणजे सूट होय.

विक्री किंमत किंवा रोख किंमत (Net Selling Price) –

वस्तूच्या छापील किंमतीमधून सूट वजा करून आलेली किंमत म्हणजे त्या वस्तूची रोखीची किंमत होय.

अधिक माहितीसाठी आपण खालील उदाहरणे पाहू या

उदा 8.23 : एका कोटाची छापील किंमत ₹ 2400 आहे. त्यावर 12% सूट दिल्यास त्याची रोख किंमत किती होईल.

उकल :

कोटाची छापील किंमत = ₹ 2400

सूट = 12%

रोख किंमत = छापील किंमत - सूट

= ₹ 2400 - ₹ 2400 चे 12 %

= ₹ 2400 - ₹

= ₹ (2400 – 288)

= ₹ 2112

∴ कोटाची रोखीची किंमत = ₹ 2112

उदा 8.24 : एका यंत्राची छापील किंमत ₹ 8400 आहे. यंत्राची रोख किंमत ` .6300 आहे. तर यंत्रणावर किती टक्के सूट दिली आहे, ते काढा.

उकल ः यंत्राची छापील किंमत = ₹ 8400

यंत्राची रोख किंमत = ₹ 6300

∴ सूट = ₹ (8400 – 6300)

= ₹ 2100

$$\therefore \% \text{ सूट} = \frac{2100}{8400} \times 100\% = 25\%$$

विशेष सूचना – सूट नेहमी छापील किंमतीवरच दिली जाते.

उदाः 8.25 : घाऊक विक्रेत्याकडे एका पंख्याची छापील किंमत ₹ 1250 आहे. विक्रेता तो पंखा किरकोळ दुकानदारास 20% सूट देऊन विकतो. किरकोळ दुकानदाराने तो पंखा केवढयाला विकावा म्हणजे त्याला 15% नफा होईल ?

उकल ः पंख्याची छापील किंमत = ₹ 1250

सूट = ₹ 1250 वर 20%

$$= ₹\ \frac{20}{100} \times 1250$$

= ₹ 250

∴ किरकोळ दुकानदाराची रोख किंमत = ₹ (1250-250)

= ₹ 1000

नफा = 15%

$$\therefore \text{ विक्री किंमत} = \frac{\text{रोख किंमत } (100 + \% \text{ नफा})}{100}$$

$$= ₹\ \frac{1000 \times 115}{100}$$

= ₹ 1150

उदाः 8.26 : एक दुकानदार वस्तूच्या मूळ किंमतीच्या 25% जास्त रक्कम छापील किंमत म्हणून लावतो. छापील किंमतीवर तो 10% सूट देतो. या व्यवहारात त्याला किती टक्के नफा किंवा तोटा होतो. तो काढा.

उकल ः वस्तूची मूळ किंमत = ₹ 100

वस्तूची छापील किंमत = ₹ 100 + 100 चे 25%

= ₹ 125

दिलेली सूट = 10 %

∴ विक्री किंमत = ₹ 125 – 125 चे 25%

$$= ₹\ 125 - ₹\left(\frac{10}{100} \times 125\right)$$

= ₹ (125.00 – 12.50)

= ₹ 112.50

∴ झालेला नफा = ₹ (112.50 – 100.00) = ₹ 12.50

$$\therefore \%\ \text{नफा} = \frac{12.50}{100} \times 100 = 12.50\%$$

∴ त्याला 12.50% नफा झाला.

उदाः 8.27 : किरकोळ पुस्तक विक्रेता प्रकाशकाकडून ₹ 300 स एक याप्रमाणे पुस्तके घेतो व तो ₹ 400 स एक याप्रमाणे विकतो. तो ग्राहकाला काही टक्के सूट देतो. तरीसुध्दा त्याला 30% नफा मिळतो. तर त्याने ग्राहकाला किती टक्के सूट दिली ते काढा.

उकल : पुस्तकाची खरेदी किंमत = ₹ 300

विक्री किंमत = ₹ 400

नफा = 30%

$$\text{विक्री किंमत} = \frac{\text{खरेदी किंमत } (100 + \%\ \text{नफा})}{100}$$

= ₹

∴ ग्'ाहकाला दिलेली सुट = ₹ (400- 390) = ₹ 10

$$\therefore \%\ \text{सूट} = \% = \frac{10}{400} \times 100 = 2.5\%$$

आपली प्रगति आजमावा 8.4

1. एका शर्टाची छापील किंमत ₹ 375 आहे. त्यावर 15% सूट दिली, तर त्याची विक्रीची किंमत काढा.

2. ₹ 60 छापील किंमत असलेल्या पायमोजाची जोडी ₹ 48 ला मिळते. तर या व्यवहारात किती टक्के सूट मिळते ते काढा.

3\. धुलाई यंत्राच्या छापील किंमतीवर 10% सूट दिली जाते. पैसे रोख दिले असता त्यावर आणखी 5% सूट दिली जाते. एका धुलाई यंत्राचे छापील किंमत ₹ 18,000 असल्यास त्याच्या विक्रीची किंमत काढा.

4\. ₹ 2800 छापील किंमत असलेले यंत्र ₹ 2100 स मिळते. तर यंत्रावर किती टक्के सूट मिळते ते काढा.

5\. एका पंख्याची छापील किंमत ₹ 850 आहे. किरकोळ विक्रेत्याला त्यावर 25% सूट मिळते. त्या विक्रेत्याने तो पंखा केवढयाला विकावा म्हणजे त्याला 15% सूट मिळेल.

6\. एक दुकानदार वस्तूच्या मूळ किंमतीच्या 50% जास्त रक्कम छापील किंमत म्हणून लावतो. छापील किंमतीवर तो 40% सूट देतो. या व्यवहारात त्याला किती टक्के नफा किंवा तोटा होतो ते काढा.

7\. एक व्यापारी ₹ 2500 छापील किंमत असलेले टेवल खरेदी करतो. त्यावर त्याला 28% सूट मिळाली. टेवल आणण्याकरीता त्याला ₹ 100 खर्च झाला. 15% नफा घेऊन त्याने तो टेबल विकले. तर टेबलाची विक्री किंमत काढा.

8\. शर्टच्या कारखान्यातून एक दुकानदार ₹ 175 ला एक याप्रमाणे शर्ट खरेदी करतो आणि प्रत्येक शर्टावर ₹ 250 ही छापील किंमत लावतो. ग्राहकाला काही सूट देऊन सुध्दा त्याला मूळ किंमतीवर 28% नफा मिळतो. तर त्याने ग्राहकाला किती टक्के सूट दिली ते काढा.

8.5.3: सरळ व्याज

एखादा माणूस गरजेपोटी मित्र, नातेवाईक किंवा बँकेकडून पैसे उसने घेतो. विशिष्ट कालावधीनंतर तो ही रक्कम व ही रक्कम वापरल्यावद्दल थोडे जास्त पैसे तो परत करतो.

उसने घेतलेल्या पैशास मुद्दल (Principal) असे म्हणतात. ते P या अक्षरान दर्शवितात. जास्त दिलेल्या पैशास व्याज (Interest) असे म्हणतात. ते I या अक्षराने दर्शवितात.

मुद्दल आणि व्याज मिळून रास (Amount) होते. रास A या अक्षराने दर्शवितात.

$$\therefore \text{रास} = \text{मुद्दल} + \text{व्याज}$$

$$\therefore A = P + I$$

महत्वाचे

व्याज दर दर साल दर शेकडा असा सांगितला जातो.

व्याज रक्कम किती पैसे (P) उसने घेतले आहेत आणि किती कालावधीसाठी (T) घेतले आहेत यावर अवलंबून असते.

$$\therefore \text{व्याजदर} = \text{दर}\ \% = \frac{\text{दर}}{100}$$

$$R = r\,\% = \frac{r}{100}$$

म्हणजेच,

व्याज = मुद्दल × व्याजदर × काल

$$I = P \times R \times T$$

या पध्दतीने येणाऱ्या व्याजास सरळव्याज असे म्हणतात.

सरळ व्याजावरील काही उदाहरणे आपण पाहू या.

उदा: 8.29 : सरळव्याज काढा.

	मुद्दल (P)	दर (R)	कालावधी (T)
(a)	₹ 8,000	5%	2 वर्षे
(b)	₹ 20,000	15%	1 ½ वर्षे

उकल : I = PRT

(a) I = ₹

= ₹ 800

(b) $I = ₹\left[20{,}000 \times \frac{15}{100} \times \frac{3}{2}\right]$

= ₹ 4500

उदा: 8.30 : ₹ 5000 मुद्दलाची 3 वर्षे मुदतीत ₹ 6050 रास होण्यासाठी व्याजदर काय असावा लागेल ?

उकल : A = ₹ 6050 P = ₹ 5000 T = 3 वर्षे

$\therefore$ I = ₹ (6050 – 5000) = ₹ 1050

I = P X R X T किंवा $r\,\% = \frac{I}{P\,X\,T}$

$$\therefore r = \frac{I \times 100}{P \times T}$$

$$\therefore r = \frac{1050 \times 100}{5000 \times 3}$$

$\therefore$ R = 7 %

उदा : 8.31 : एका मुद्दलांची $12^1/_2$ % दराने 4 वर्षात ₹ 4875 रास होते तर मुद्दल काढा.

उकल : $A = 4875$, $R = 12^1/_2 \; \frac{25}{2} \; \% =$, $T = 4$ वर्षे

$I = P \times R \times T$

$$I = ₹\left[p \times \frac{25}{100} \times 4\right]$$

$$= ₹$$

$$\therefore A = ₹\left[p + \frac{p}{2}\right]$$

$$= ₹\,\frac{3p}{2}$$

$$\frac{3p}{2} = ₹\,4875$$

$\therefore$ 3P = ₹ 4875 X 2

$\therefore$ 3P = ₹ 9750

$$\therefore P = ₹\,\frac{9750}{3}$$

$\therefore$ P = 3250

उदा : 8.32 : ₹ 2000 मुद्दलावर दसादशे 14 दराने ₹ 560 व्याज होण्यास किती कालावधी लागेल ?

उकल : P = ₹ 2000 I = ₹ 560 R = 14%

I = P X R X T

$$\therefore 560 = 2000 \times \frac{14}{100} \times T$$

$$\therefore T = \frac{560 \times 100}{2000 \times 14}$$

= 2 वर्षे

2 वर्षात ₹ 2000 मुद्दलावर दसादशे 14 दराने ₹ 560 व्याज मिळाले.

उदा ः 8.33 : एका रकमेची 4 वर्षात सरळव्याजाने ₹1300 रास होते आणि 7 वर्षात ₹1525 रास होते. तर ही रक्कम आणि व्याजदर काढा.

उकल ः येथे

$$1300 = \frac{P \text{ x } R \text{ x } 4}{400} + P \quad \textbf{..................(i)}$$

आणि 1525 =

समीकरण (ii) मधून समीकरण (i) वजा करून,

$$225 = \frac{P \times R \times 3}{100}$$

किंवा $75 = \dfrac{P \times R}{100}$

ही किंमत समीकरण (i) मध्ये घालून

$$1300 = \frac{P \text{ x } R \text{ x } 4}{400} + P$$

$\therefore$ 1300 = (75 X 4) + P

$\therefore$ 1300 = 300 + P

$\therefore$ 1300-300 = P

$\therefore$ 1000 = P

$$\frac{P \text{ x } R}{100} = 75$$

$$\therefore \text{R} = \frac{75\text{x}100}{P} = \frac{75\text{x}100}{1000}$$

$= 7.5\%$

$\therefore$ मुद्दल = ₹1000, व्याजदर = 7.5%

हेच उदाहरण दुस–या पध्दतीने सोडवू या.

4 वर्षाची रास = ₹1300

7 वर्षाची रास = ₹1525

$\therefore$ 3 वर्षाचे सरळव्याज $= ₹\,[1525 - 1300] = ₹\,225$

$\therefore$ एका वर्षाचे सरळव्याज $= ₹\,\dfrac{225}{3}$

$= ₹\,75$

$\therefore$ 1300 = मुद्दल + 4 वर्षाचे व्याज

$= P + 4 \text{ X } 75$

$= P + 300$

$\therefore 1300 - 300 = P$

$\therefore$ 1000 = P = मुद्दल

व्याजदर $R = \dfrac{75 \text{ x } 100}{1000 \text{ x } 1} = 7.5\%$

उदा : 8.34 : सरळव्याजाने एका मुद्दलाची 10 वर्षात दाम दुप्पट होते. तर त्याच दराने त्या रकमेची $2^1/_2$ पट किती वर्षात होईल ?

उकल : समजा $P = ₹\,100$, $T = 10$ वर्षे, $A = 200$

$\therefore I = A\text{-}P = 200 - 100 = 100$

$$I = \frac{P \text{ x } R \text{ x } T}{100}$$

$$\therefore 100 = \frac{100 \text{ x } R \text{ x } 10}{100}$$

$\therefore R = 10\%$

आता $P = ₹\,100$ $R = 10\%$ $A = ₹\,250$

$\therefore I = A\text{-}P = 250\text{-}100 = ₹\,150$

$\therefore 150 =$

$\therefore T = 15$ वर्षे

$\therefore$ 15 वर्षामध्ये त्या रकमेची 2 ½ पट होईल.

टिपा

उदा : 8.35 : एका माणसाने आपल्याकडील ₹ 70,000 पैकी ₹ 30,000 4% सरळ व्याजदराने आणि ₹ 20,000 3% सरळ व्याजदराने गुंतविले. उरलेली रक्कम त्याने किती टक्के व्याजदराने द्यावी म्हणजे संपूर्ण रक्कमेवर त्याला दसादशे 5 दराने व्याज मिळेल.

उकल : संपूर्ण रक्कम ₹ 70,000 वर दसादशे 5 दराने होणारे व्याज

$$= ₹\, 70,000 \times \frac{5}{100} \times 1$$

$= ₹\, 3500$

₹ 30,000 वर दसादशे 4 दराने मिळणारे एका वर्षाचे व्याज

$$= ₹\, 30,000 \times \frac{4}{100} \times 1$$

$= ₹\, 1,200$

₹ 20,000 वर दसादशे 3 दराने मिळणारे एका वर्षाचे व्याज

$$= ₹\, 20,000 \times \frac{3}{100} \times 1$$

$= ₹\, 600$

∴ उरलेल्या ₹ 20,000 वर 1 वर्षासाठी अपेक्षित व्याज

$= ₹\, [3500 - 1200 - 600]$

$= ₹\, 1700$

$$\therefore\ 1700 = 20,000 \times \frac{R}{100} \times 1$$

$$\therefore\ R = \frac{1700 \times 100}{20,000} = 8.5\%$$

∴ उरलेली रक्कम त्याने दसादशे 8.5 दराने द्यावी.

तुमच्या प्रगतीचा आढावा घ्या 8.5

1. रमाने आपल्या मैत्रिणीकडून ₹ 14,000 दसादशे 8 या दराने सरळव्याजाने घेतले. तिने ते पैसे 2 वर्षानंतर परत केले. तर तिने आपल्या मैत्रिणीला एकूण किती पैसे दिले ?

2. दसादशे 8 या सरळव्याज दराने रमेशने ₹ 15,600 ची गुंतवणूक एका कंपनीत केली. तर 3 वर्षानी त्याला एकूण किती व्याज मिळेल?

3. नवीनने ₹25,000 आपल्या दोन मित्रांना व्याजाने दिले. त्याने दसादशे 10 दराने ₹10,000 एका मित्राला व दसादशे 12 दराने उरलेली रक्कम दुसऱ्या मित्राला दिली. तर 2 वर्षानि त्याला किती व्याज मिळेल?

4. शालिनीने एका कंपनीत ₹29,000 तीन वर्षासाठी गुंतविले. तीन वर्षानंतर तिला ₹38,570 परत मिळाले. तर सरळव्याजाचा दर काय असेल?

5. दसादशे 10 या सरळ व्याजाने दिलेल्या मुद्दलाच्या इतकी रक्कम व्याज म्हणून जमा होण्यासाठी किती कालावधी लागेल?

6. 5 वर्षामध्ये मुद्दलाच्या निम्मी रक्कम व्याज होण्यासाठी सरळव्याजाचा दर काय असावा ?

7. एका रकमेची 3 वर्षात सरळव्याजाने ₹1265 रास होते आणि 6 वर्षात ₹1430 रास होते तर ती रक्कम आणि व्याजदर काढा.

8. एका माणसाने आपल्याकडील ₹75,000 पैकी ₹30,000 ला पाच टक्के दराने ₹24,000 चार टक्के व्याजदराने गुंतविले. उरलेली रक्कम त्याने किती टक्के व्याजदराने गुंतवावी म्हणजे संपूर्ण रकमेवर त्याला दसादशे 6 दराने व्याज मिळेल ?

9. सरळ व्याजाने एका मुद्दलाची 8 वर्षात दामदुप्पट होते. तर त्याच दराने त्या रकमेची 4 पट किती वर्षात होईल ?

10. खालीलपैकी कोणत्या गुंतवणुकीत जास्त व्याज मिळेल ?

    (अ) दसादशे 4 दराने 5 वर्षासाठी ₹5000 गुंतविले.

    (ब) दसादशे 5 दराने 6 वर्षासाठी ₹4000 गुंतविले.

8.5.4 :- चक्रवाढ व्याज

मागील भागात आपण सरळव्याजाचा अभ्यास केला.

संपूर्ण मुदतीसाठी घेतलेल्या रकमेवरून व्याज आकारले जाते, तेव्हा या व्याजास सरळव्याज असे म्हणतात.

व्याज = मुद्दल X व्याजदर X मुदत

$I = P \times R \times T$

परंतु दिलेल्या मुदतीत व्याज न दिल्यास ते व्याज मुद्दलात जमा होते आणि ही नवी रक्कम मुद्दल जमा होते आणि ही नवी रक्कम मुद्दल धरून त्यावर पुढील मुदतीची व्याज आकारणी होते. या प्रकारच्या व्याज आकारणीस चक्रवाढ व्याज आकारणी असे म्हणतात.

ज्या मुदतीचे व्याज मुद्दलात मिळवून येणारी रक्कम पुढच्या मुदतीसाठी मुद्दल म्हणून धरतात. त्या मुदतीला व्याज आकारणी कालावधी (Conversion period) असे म्हणतात.

हा कालावधी वार्षिक, सहामाही, तिमाही किंवा मासिक देखील असू शकतो. त्याप्रमाणे चक्रवाढ व्याज आकारणी वार्षिक, सहामाही, तिमाही किंवा मासिक देखील असू शकते.

आता एक उदाहरण पाहू.

उदा ः 8.36 : दर साल दर शेकडा 10 दराने ₹ 2000 मुद्दलावर दोन वर्षात होणा–या चक्रवाढव्याजाची रक्कम काढा.

उकल ः मुद्दल = P = ₹ 2000, व्याज = 10%

पहिल्या वर्षाचे व्याज =

$$= ₹\,2000 \times \frac{10}{100} \times 1$$

$$= ₹\,200$$

∴ दुस–या वर्षाचे मुद्दल = मुद्दल + पहिल्या वर्षाचे व्याज

$$= ₹\,(2000 + 200)$$

$$= ₹\,2200$$

दुस–या वर्षाचे व्याज = ₹ 2200

$$= ₹\,220$$

∴ दुस–या वर्षाच्या अखेरीस देय असणारी रक्कम

$$= ₹\,(2200 + 220)$$

$$= ₹\,2420$$

∴ दुस–या वर्षाच्या अखेरीस देय असणारे व्याज

$$= ₹\,(2420 - 2000)$$

$$= ₹\,420$$

किंवा [₹ (200 + 240) = ₹ 420]

∴ चक्रवाढ व्याज = ₹ 420

अशा रितीने चक्रवाढ व्याज काढताना पहिल्या वर्षाचे व्याज मुद्दलात मिळवितात. पुढच्या वर्षासाठीही रक्कम मुद्दल म्हणून धरतात आणि त्यावर पुढील मुदतीचे व्याज आकारतात.

8.5.4.1 : चक्रवाढ व्याज काढण्याचे सूत्र

समजा दरसाल दर शेकडा r दराने P ही रक्कम n वर्षासाठी व्याजाने घेतली.

∴ पहिल्या वर्षाचे व्याज $= P \times \frac{r}{100} \times 1$

$$= \frac{\text{Pr}}{100}$$

पहिल्या वर्षाअखेरीची रक्कम = दुसऱ्या वर्षाचे मुद्दल

$$= \text{P} + \frac{\text{Pr}}{100}$$

$$= \text{P}\left[1+\frac{r}{100}\right]$$

$$\therefore \text{ दुसऱ्या वर्षाचे व्याज } = \text{P}\left[1+\frac{r}{100}\right]\times\frac{r}{100}\times 1$$

$$= \frac{\text{Pr}}{100}\left[1+\frac{r}{100}\right]$$

∴ दुसऱ्या वर्षाअखेरीची रक्कम

$$\text{P}\left[1+\frac{r}{100}\right] + \frac{\text{Pr}}{100}\left[1+\frac{r}{100}\right]$$

$$= \text{P}\left[1+\frac{r}{100}\right]\left[1+\frac{r}{100}\right]$$

$$= \text{P}\left[1+\frac{r}{100}\right]^2$$

त्याचप्रमाणे 3 वर्षाअखेरीची रक्कम $= \text{P}\left[1+\frac{r}{100}\right]^3$

याचप्रमाणे,

n वर्षाअखेरीची रक्कम $= \text{P}\left[1+\frac{r}{100}\right]^n$

जर, आपण A ने रक्कम दाखविली

R ने r % किंवा $\frac{r}{100}$ दाखविली.

तर,

$$A = P\,[1+R]^n$$

आणि चक्रवाढ व्याज = A- P

$$= P\,[1+R]^n - P$$

$$= P\,[(1+R)^n - 1]$$

किंवा $P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$

विशेष सूचना ः सरळ व्याज आणि चक्रवाढ व्याज यांची पहिल्या वर्षाची किंवा पहिल्या हप्त्याची रक्कम सारखीच असते.

उदा ः 8.37 : व्याजाची आकारणी वार्षिक असताना दसादशे 5 दराने ₹ 20,000 मुद्दलाचे 3 वर्षाचे चक्रवाढ व्याज काढा.

उकल ः मुद्दल = P = ₹ 20,000 व्याजदर = R = 5% मुदत = n = 3 वर्षे

चक्रवाढ व्याज = CI = $P\,[(1+R)^n - 1]$

$$= ₹\,20{,}000\left[\left(1+\frac{5}{200}\right)^3 - 1\right]$$

$$= ₹\,20{,}000\left[\left(\frac{21}{20}\right)^3 - 1\right]$$

$$= ₹\,20{,}000\left[\frac{9261}{8000} - 1\right]$$

$$= ₹\,20{,}000\left[\frac{9261-8000}{8000}\right]$$

$$= ₹\,3152.50$$

उदा. 8.38 : दसादशे 10 दराने ₹ 20,000 मुददलचे $1\frac{1}{2}$ वर्षाचे चक्रवाढ व्याज काढा. व्याज आकारणी दर 6 महिन्यांनी होते.

उकल ः P = मुददल = ₹ 20,000 दर = ₹ 10 % दर वर्षी

= 5% दर अर्ध वर्षे.

मुदत $= n = 1\frac{1}{2} = 3$ अर्ध वर्ष

चक्रवाढ व्याज $= (CI = P\,[\,(1+R)^n - 1]$

$$= ₹\,20,000\left[\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= ₹\,20,000\left[\left(\frac{21}{20}\right)^3 - 1\right]$$

$$= ₹\,20,000\left[\frac{9261}{8000} - 1\right]$$

$$= ₹\,20,000\left[\frac{9261-8000}{8000}\right]$$

$$= ₹\,3152.50$$

उदा. 8.39 : दसादशे 4 दराने ₹ 20,000 मुद्दलाचे 9 महिन्याचे चक्रवाढ व्याज काढा. व्याज आकारणी दर 3 महिन्याने होते.

उकल : P = मुद्दल = ₹ 20,000 दर = R= 4 % दर साल

$\therefore$ दर = 1 % दर तिमाही.

मुदत = n = वर्षे 3 पाव वर्षे.

चक्रवाढ व्याज = $(CI = P\,[\,(1+R)^n\ 1]$

$$= ₹\,20,000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= ₹\,20,000\left[\left(\frac{101}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= ₹\,20,000\left[\frac{1030301-1000000}{1000000} - 1\right]$$

$$= ₹\,20,000\left[\frac{30301}{1000000}\right]$$

$$= \left[\frac{20,000 X 30301}{1000000}\right]$$

$$= ₹\,606.02$$

उदा. 8.40 : दसादशे 10 दराने रू.20,000 मुद्दलचे वर्षांचे चक्रवाढ व्याज काढा.

(व्याज आकारणी वार्षिक)

उकल : मुद्दल P = रू. 12,000 दर = R= 10 काल = n= $1\frac{1}{2}$ वर्षे.

व्याज आकारणी वार्षिक असल्याने ,पहिल्या वर्षाची रास काढू.

$$\text{रास} = A = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)\right]^1$$

$$= ₹\,20{,}000\left[\left(1+\frac{1}{100}\right)\right]^1$$

$$= ₹\,20{,}000 \times \frac{11}{10}$$

$$= ₹\,13{,}200$$

$\therefore$ पुढच्या 6 महिन्यासाठी मुद्दल = ₹ 13,200

R = व्याजदर = 10 % दर साल

$\frac{10}{2}$ = 5 % दर सहामाही

रास = A = ₹ 13,200

$$= ₹\,13{,}200 \times \frac{21}{20}$$

$$= ₹\,13{,}860$$

$\therefore$ $1\frac{1}{2}$ वर्षानंतरची रास = ₹ 13,860.

चक्रवाढ व्याज = ₹ (13860-12000)

= ₹ 1860.

सूचना ः - आपण $1\frac{1}{2}$ वर्षांचे चक्रवाढ व्याज पुढील सूत्राने देखील काढू शकतो.

A = ₹ 12,000

उदा. 8.41 : व्याजाची वार्षिक आकारणी केली असता; कोणत्या व्याजदराने रू. 15,625 या मुद्दलाची 3 वर्षात रू. 17,576 ही रास होईल ?

उकल : रास = A = ₹ 17,576 मुद्दल P = 15,625 काल = n = 3 वर्षे.

समजा, व्याजदर = R = r % वार्षिक.

$$\therefore\ 17{,}576 = 15{,}625\left[1+\frac{r}{100}\right]^3$$

$$\left[1+\frac{r}{100}\right]^3 = \frac{17576}{15625} = \left(\frac{26}{25}\right)^3$$

$$\left(1+\frac{r}{100}\right) = \frac{26}{25} \text{ किंवा } \frac{r}{100} = \frac{26}{25} - 1 = \frac{1}{25}$$

$$\text{किंवा } r = \frac{100}{25} = 4$$

व्याजदर दसादशे 4%

उदा. 8.42 : व्याज आकारणी अर्धवार्षिक असताना चक्रवाढ व्याजाने दसादशे 10 दराने रू. 8000 मुद्दलाची रू. 9261 रास होण्यास किती कालावधी लागेल ?

उकल : रास = A = ₹ 9261 मुद्दल = P = ₹ 8000

n = कालावधी = x अर्धवर्ष संख्या

R = दर = 10 % दर साल = 5% अर्धवार्षिक.

$$9265 = 8000\left(1+\frac{5}{100}\right)^x$$

$$\text{किंवा } \frac{9261}{8000} = \left[\frac{21}{20}\right]^x \text{ किंवा } \left[\frac{21}{20}\right]^3$$

$$\therefore X = 3$$

$$\text{कालावधी} = 3 \text{ अर्धवर्ष} = 1\frac{1}{2} \text{ वर्षे.}$$

टिपा

उदा. 8.43 : व्याजाची आकारणी अर्धवार्षिक असताना दसादशे 4 दराने ₹ 24000 मुद्दलावर 1 वर्षात होणारे सरळव्याज आणि चक्रवाढव्याज यांमध्ये असणारा फरक काढा.

उत्कल : P = मुद्दल ₹ 24,000 R = दर = 4 दसादशे = 2 % अर्ध वार्षिक

n = मुदत = वर्षे = $\frac{3}{2}$ वर्षे = 3 अर्धवर्षे.

सरळव्याज = P$\times$R T

$= 24000 \ x \ \frac{4}{100} \ x \ \frac{3}{2}$

सरळव्याज = SI = = रू. 1440.

चक्रवाढ -

$$A = P \left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^{x}\right]$$

$$A = ₹\,24{,}000 \left[\left(1+\frac{2}{100}\right)^{3}\right]$$

$$A = ₹\,24{,}000 \left[\frac{51}{50}\right]^{3}$$

= ₹ 24,000

$$= ₹\ \frac{24\times51\times51\times51}{125}$$

= ₹ 25468.99

= ₹ 25469

चक्रवाढ व्याज = ₹ 25469 - 24,000

= ₹ 1469.

व्याजामधील फरक = चक्रवाढ व्याज – सरळव्याज

= ₹ [1469–1440]

= ₹ 29

उदा. 8.44 : व्याजाची आकारणी वार्षिक असताना दसादशे 4 दराने एक रक्कम $1\frac{1}{2}$ वर्षासाठी गुंतविली व्याजाची आकारणी अर्धवार्षिक असली तर रू. 20.40 जास्त मिळाले असते तर ती रक्कम काढा.

उत्तर : ती रक्कम रू. x आहे. असे मानू.

R = व्याजदर = 4% वार्षिक किंवा 2% अर्धवार्षिक

मुदत $= 1+\frac{1}{2}$ वर्षे = 3 अर्ध वर्षे

व्याज आकारणी वार्षिक असताना -

$$A = ₹\ x\left[1+\frac{4}{100}\right]\left[1+\frac{2}{100}\right]^{1}$$

$$= ₹$$

$$= ₹\ \frac{1326x}{1250}$$

व्याज आकारणी अर्धवार्षिक असताना -

$$A = ₹\ x\left[1+\frac{2}{200}\right]^{3}$$

$$= ₹\ x\left[\frac{51}{50}\right]^{3}$$

$$= ₹\ \frac{132651}{125000}$$

$$\therefore \text{ फरक } = ₹\left[\frac{132651}{125000}x - \frac{132651}{125000}x\right]$$

$$= ₹\ \frac{51x}{125000}$$

$$\text{किंवा } x = \frac{2040}{100} \times \frac{125000}{51}$$

$$= ₹\ 50,000$$

8.6 आपली प्रगति आजमावा

1. व्याजाची आकारणी वार्षिक असताना दसादशे 4 दरान ₹15625 या मुद्दलावर 3 वर्षांचे होणारे चक्रवाढव्याज काढा.

2. व्याजाची आकारणी सहामाही असताना दसादशे 8 दराने ₹15625 या मुद्दलावर वर्षाचे होणारे चक्रवाढव्याज काढा.

3. व्याजाची आकारणी तिमाही असताना दसादशे 20 दराने ₹16000 या मुद्दलावर 9 महिन्यात होणारे चक्रवाढव्याज काढा.

4. चक्रवाढव्याजाची आकारणी वार्षिक असताना दसादशे 5 दराने 3 वर्षामध्ये एका रकमेची ₹27783 रास होते. तर ती रक्कम काढा.

5. चक्रवाढव्याजाची आकारणी वार्षिक असताना दसादशे 10 दराने ₹30,000 मुद्दलावर 3 वर्षात होणारे सरळव्याज आणि चक्रवाढव्याज यामध्ये असणारा फरक काढा.

6. चक्रवाढव्याजाची आकारणी सहामाही असताना दसादशे 8 दराने एक रक्कम ₹ $1\frac{1}{2}$ व वर्षा साठी गुंतविली. या रकमेवर या मुदतीत मिळणा-या सरळव्याजापेक्षा चक्रवाढव्याजाने ₹228 जास्त मिळाले. तर ती रक्कम काढा.

7. चक्रवाढव्याजाची आकारणी सहामाही असताना दसादशे 20 दराने एक रक्कम 9 महिन्यांसाठी गुंतविली. जर चलनवाढव्याजाची आकारणी तिमाही केली असती तर ₹210 व्याज जास्त मिळाले असते तर ती रक्कम काढा.

8. चक्रवाढव्याजाची आकारणी सहामाही असताना दसादशे 8 दराने ₹15625 या मुद्दलाची रास ₹17576 होते. तर गुंतवणुकीचा कालावधी काढा.

9. चक्रवाढव्याजाची आकारणी तिमाही असताना ₹4000 मुद्दलावर 9 महिने मुदतीत ₹630.50 व्याज मिळते तर व्याजदर काढा.

10. चक्रवाढव्याजाची आकारणी वार्षिक असताना एका रकमेची दोन वर्षात ₹17640 रास होते. आणि तीन वर्षात ₹18522 रास होते. तर ती रक्कम आणि व्याजदर काढा.

8.6 विकासाचा दर आणि घसारा किंमत

रोजच्या व्यवहारात आपण लोकसंख्यावाढ, वृक्षसंख्या वाढ, विषाणूंची संख्यावाढ या गोष्टी पाहात असतो. तसेच यंत्रसामग्री, पिके, मोटारसायकल या गोष्टीची कमी होत जाणारी किंमत म्हणजेच घसारा किंमत आपण पाहत असतो.

मागील प्रकरणात चक्रवाढ काढण्यासाठी आपण जे सूत्र वापरले होते, तेच सूत्र वापरून आपण वाढीचा दर किंवा घटीचा दर आपण काढू शकतो.

सुरूवातीला = (सुरूवातीची वस्तूची किंमत V_0 आणि विशिष्ट कालावधीनंतर (n) ती V_a होत असल्यास आणि वाढ किंवा घट याचा दर r धरल्यास आपण खालील सूत्रे मांडू शकतो.

वाढीसाठी $V_a = V_0 \left[1+\frac{r}{100}\right]^n$ आणि

घटीसाठी $V_a = V_0 \left[1-\frac{r}{100}\right]^n$ आणि

जर प्रत्येक कालावधीसाठी वाढ किंवा घट यांचा दर बदलत असेल तर,

$V_a = V_0 \left[1+\frac{r_1}{100}\right]\left[1+\frac{r_2}{100}\right]\left[1+\frac{r_3}{100}\right]$ हे सूत्र वाढीसाठी आणि

$V_a = V_0 \left[1-\frac{r_1}{100}\right]\left[1-\frac{r_2}{100}\right]\left[1-\frac{r_3}{100}\right]$ हे सूत्र घट काढण्यासाठी वापरतात.

यावर आधारित काही उदाहरणे आपण पाहूया.

उदा. 8.47 :- **एका झाडाची उंची दरमहा 2 % दराने वाढते. जानेवारी 2008 च्या सुरूवातीला त्या झाडाची उंची 1.2 m असल्यास एप्रिल 2008 च्या सुरूवातीला त्या झाडांची उंची किती असेल याचे उत्तर तीन दशांश स्थळापर्यंत काढा.**

उत्तर : मूळ उंची = V_0=1.2 m

दर = r = 2 %

कालावधी = n = 3 महिने

$$\therefore V_3 = V_0 \left[1+\frac{r}{100}\right]^n$$

$$= 1.2 \left[1+\frac{2}{100}\right]^3$$

$= 1.2$

$= 1.273\text{m}.$

एप्रिलच्या सुरूवातीला त्या झाडाची उंची $= 1.273\text{m}.$

उदा. 8.48 :- औषधामुळे एका विषाणूसमूहाची घट ताशी 5 % या दराने होते. एके दिवशी सकाळी 11:00 वाजता त्या समूहातील विषाणूंची संख्या 2.3^7 असल्यास त्याच दिवशी दुपारी एक वाजता विषाणूंची संख्या किती असेल ते काढा.

उत्तर : मूळ संख्या $= V_0 = 2.3^7$

दर $= r = 5\ \%$

कालावधी $= n = 2$

$$V_2 = 2.3^7\left[1+\frac{5}{100}\right]^2$$

$$= 2.3^7\left[1+\frac{95}{100}\right]^2$$

$$= 2.3^7[0.95]^2$$

$$= 2.076^7$$

एक वाजता असलेली विषाणूंची संख्या $= 2.076^7$

आपली प्रगति आजमावा 8.7

1. एका गावाची लोकसंख्या 281250 आहे. लोकसंख्यावाढीचा दर 5 % असल्यास 3 वर्षांनतर त्या गावाची लोकसंख्या किती असेल ?

2. जानेवारी 2005 मध्ये एका मोटारीची किंमत रू. 4,36,000 होती. वापरल्याने गाडीची किंमत पहिल्या वर्षी 15 % व त्यापुढील प्रत्येक वर्षी 10 % ने कमी होते. तर गाडीची जानेवारी 2008 मध्ये असणारी किंमत काढा.

3. एका यंत्राची किंमत रू. 3,60,000 आहे. यंत्राची किंमत पहिल्या वर्षी 12 % आणि त्यापुढील प्रत्येक वर्षी 8 % ने कमी होते. तर यंत्राची तिसऱ्या वर्षी अखेरीस असलेली किंमत काढा.

4. खत वापरल्याने पिकाचे उत्पन्न पहिल्या वर्षी 10% दुस-या वर्षी 5 % व तिस-या वर्षी 4 % ने वाढले. जर 2005 साली पिकाचे उत्पन्न दर हेक्टरी 3.5 टन असेल तर 2008 साली पिकाचे दर हेक्टरी उत्पन्न किती असेल?

5. औषधामुळे एका विषाणू समूहाची घट ताशी 4% या दराने होते. या दिवशी सकाळी 9:00 वाजता त्या समूहातील विषाणूंची संख्या 3.5^{8} असल्यास त्याच दिवशी दुपारी 11:00 वाजता विषाणूंची संख्या किती असेल ?

6. तीन वर्षापूर्वी एका गावाची लोकसंख्या 50,000 होती. पहिल्या वर्षी लोकसंख्या वाढीचा वेग 5 % होता. दुस-या वर्षी रोगाची साथ आल्याने गावच्या लोकसख्येत 10% घट झाली. तिस-या वर्षात लोकसंख्या वाढीचा वेग 4% होता. तर गावची आजची लोकसंख्या काढा.

तुम्ही काय शिकलात?

- टक्केवारी म्हणजे दर शंभरामागे असणारी किंमत होय.
- टक्केवारी व्यवहारी अपूर्णांकात तसेच दशांश अपूर्णांकात सुध्दा लिहिता येते.
- टक्केवारी अपूर्णांकात लिहिताना आपण % हे चिन्ह वगळतो आणि संख्येला 100 ने भागतो.
- अपूर्णांकात टक्केवारीत करताना आपण अपूर्णांकाला 100 ने गुणतो. त्याला सोपे रूप देतो आणि उत्तरापुढे % हे चिन्ह लिहितो.
- एखादी टक्केवारी दिली असता प्रथम टक्केवारीचे व्यवहारी अपूर्णांक किंवा दशांश अपूर्णांकात रूपांतर करून येणा-या अपूर्णांकास दिलेल्या संख्येस गुणावे.
- खरेदी किंमतीपेक्षा (ख.की) विक्री किंमत (वि.की)जास्त असल्यास नफा होतो.
- खरेदी किंमतीपेक्षा (ख.की) विक्री किंमत (वि.की) कमी असल्यास तोटा होतो.

नफा = विक्री−ख.की

नफा = विक्री−ख.की   तोटा = ख.की−वि.की

$$\% \text{ नफा} = \frac{\text{नफा}}{\text{ख.की}} \times 100 \qquad \% \text{ तोटा} = \frac{\text{तोटा}}{\text{ख.की}} \times 100$$

$$\text{वि.की} = \frac{100 + (\text{नफा})\%}{100} \times \text{ख.की} \qquad \text{वि.की} = \frac{100 - \text{तोटा}\%}{100} \times \text{ख.की}$$

- मुद्दल वर दसादशे R दराने T वर्षाचे व्याज काढण्यासाठी खालील सूत्र वापरतात.

$I = P \times R \times T.$

- वस्तूच्या छापील किंमतीपेक्षा कमी किंमत म्हणजे सूट होय.
- सूट ही नेहमी छापील किंमतीवरच काढली जातो.
- अशा वेळी वस्तूची खरेदी किंमत म्हणजे (छापील किंमत - सूट) गि-हाईकाला द्यावी लागते.
- दोन किंवा त्यापेक्षा अधिक वेळा सूट दिली गेल्यास त्याला सूट प्रणालि असे म्हणतात.
- अशी सूट प्रणालि एकच सूट प्रकारात सुध्दा आणता येते.
- विक्रीकर हा नेहमी छापील किंमतीवर आकारला जातो.
- हप्ता योजनेमुळे सामान्य माणसाला महाग वस्तू घेणे परवडू शकते.
- चक्रवाढव्याज काढण्यासाठी

  $$\text{राशी} = \text{मुद्दल}\left(1+\frac{\text{व्याजदर}}{100}\right)^{\text{कालावधी}}$$

  $A=P(1+R)^n$ हे सूत्र वापरावे.
- चक्रवाढव्याज हे नेहमी सरळव्याजापेक्षा जास्तच असते.

  (अपवाद - पहिल्या मुदतीचा)
- V_0 ही वस्तूची सुरूवातीची किंमत असेल आणि

  V_s ही 'n' कालावधी नंतरची किंमत असेल

  r हा वाढीचा / घटीचा दर असेल तर,

  $$V_s = V_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$ हे सूत्र वाढीनंतरची किंमत काढण्याकरीता वापरतात.

  आणि $$V_s = V_0\left[1-\frac{r}{100}\right]^n$$ हे सूत्र घटीनंतरची किंमत काढण्याकरीता वापरावे.
- प्रत्येक मुदतीसाठी वाढीचा किंवा घटीचा दर बदलता असल्यास,

  $V_s = V_0$ ....

  हे सूत्र वाढीनंतरची किंमत काढण्याकरीता वापरावे.

  $$V_s = V_0\left[1-\frac{r}{100}\right]\left[1-\frac{r^2}{100}\right]\left[1-\frac{r^3}{100}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots$$

  हे सूत्र घटीनंतरची किंमत काढण्याकरीता वापरावे.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1. खालील अपूर्णांकाचे टक्केवारीत रूपांतर करा.

   (a) $\frac{9}{20}$ (b) $\frac{7}{10}$ (c) 0.34 (d) 0.06

2. खालील टक्केवारीचे दशमानात रूपांतर करा.

   (a) 36 % (b) 410 % (c) 2% (d) 0.35%

3. खालील टक्केवारीचे अपूर्णांकात रूपांतर करा.

   (a) 0.12 % (b) 2.5 % (c) 25.5 % (d) 255%

4. किंमती काढा.

   (a) 500 चे 23 % (b) 800 च 2.5 %

   (c) 1000 चे 0.4 % (d) 400 चे 11.5%

5. 294 ही संख्या 700 च्या किती टक्के आहे?

6. 60 ही संख्या 45 पेक्षा किती टक्क्याने मोठी आहे ?

7. एक संख्या 10% वाढविली असता 352 ही संख्या मिळते. तर मूळ संख्या काढा.

8. एका संख्येचे 15 % काढले असता 270 उत्तर येते. तर मूळ संख्या काढा.

9. एक संख्या 7 % नी कमी केली असता 16.74 ही संख्या मिळते. तर मूळ संख्या काढा.

10. एका वर्गातील $3/4$ विदयार्थी चष्मा घालतात, तर वर्गात चष्मा न घालणारे किती टक्के विदयार्थी आहेत ?

11. एका फ्रिजमध्ये असणा-या 20 अंडयापैकी 6 अंडी करडया रंगाची आहेत. तर करडा रंग नसणा-या अंडयाची टक्केवारी किती?

12. एका वर्गातील विदयार्थी मुलींच्या संख्येपैकी 44 % मुली आहेत. जर वर्गातील मुलींची संख्या मुलांच्या संख्यापेक्षा 6 ने कमी असेल तर वर्गात एकूण किती विदयार्थी आहेत?

13. एका निवडणुकीमध्ये गावातील 70 % लोकांनी मतदान केले. जर 70,000 लोकांनी मतदान केले असेल तर गावची लोकसंख्या काढा.

14. एक माणूस पगाराच्या रकमेमधील 5% रक्कम समाजकार्यासाठी खर्च करतो. उरलेल्या रकमेपैकी 12 % रक्कम तो बॅंकेत टाकतो. त्यानंतर त्याच्याकडे ₹ 11,704 उरतात. तर त्याचा महिन्याचा पगार काढा.

टिपा

15. शनिवारी रतन स्टोअर्स या दुकानाची विक्री ₹ 12,000 झाली आणि सीमा स्टोअर्स या दुकानाची विक्री ₹ 15,000 झाली. रविवारी त्या दुकानांची विक्री अनुक्रमे ₹ 15,000 आणि ₹ 17,500 झाली. तर विक्रीमध्ये जास्त प्रगती कोणत्या दुकानाची झाली?

16. 100 गुणांच्या 3 प्रश्नपत्रिका असणा-या परीक्षेमध्ये उत्तीर्ण होण्यासाठी उमेदवाराला 45% गुण पडणे आवश्यक आहे. एका उमेदवाराला पहिल्या प्रश्नपत्रिकेत 35% व दुस-या प्रश्नपत्रिकेत 50% गुण मिळाले तर परीक्षा उत्तीर्ण होण्यासाठी त्याला तिस-या प्रश्नपत्रिकेत कमीत कमी किती गुण मिळणे आवश्यक आहे?

17. साखरेच्या किंमतीत 35% वाढ झाली. एका कुटुंबाने किती साखर घ्यावी म्हणजे त्यांच्या साखरेच्या दरमहाच्या खर्चात बदल होणार नाही.

18. ₹ 160 ला 90 बॉलपेन विकल्यास 20% तोटा होतो. ₹ 96 ला त्याने किती बॉलपेन्स विकावीत म्हणजे 20% नफा होईल ?

19. एक विक्रेता 5 रूपयास 6 या दराने केळी खरेदी करतो. आणि 3 रूपयास 4 याप्रमणे विकतो. तर या व्यवहारात त्याला किती टक्के नफा किंवा तोटा होईल ?

20. एक माणूस ₹ 18 डझन या भावाने आणि 20 ₹ डझन या भावाने (सारख्याच संख्येने) प्रत्येकी एक डझन अंडी विकत घेतो आणि ती दोन प्रकारची अंडी ₹ 23.75 डझन या भावाने विकतो. या व्यहाहारात त्याला किती टक्के नफा झाला?

21. एक विक्रेता एक वस्तू 10% नफ्याने विकतो. ती वस्तू त्याने 10% कमी किंमतीत खरेदी करून व 10 ₹ जादा घेऊन विकली तर त्यास 25% नफा होतो. तर त्या वस्तूची खरेदी किंमत किती?

22. एका पायमोजाच्या जोडीची छापील किंमत ₹ 80 आहे. तिची विक्री रू. 64 ला केल्यास मिळालेली सूट किती टक्के आहे ते काढा.

23. एक दुकानदार एक टेबल ₹ 1800 ला विकत घेतो. त्यावर त्याला 25% सूट मिळते. टेबलाचा वाहतूक खर्च ₹ 150 होतो. दुकानदार 10% नफा घेऊन तो टेबल विकतो. तर टेबलाची विक्री किंमत किती?

24. एक दूरचित्रवाणी रू. 18,750 देऊन विकत घेतला. विक्रेत्याने 25% सूट दिली. तर दूरचित्रवाणी संचाची छापील किंमत किती ?

25. एक रक्कम 5 वर्षासाठी गुंतविली. त्या रकमेवर 12% दराने व्याज मिळाले. जर 200 व्याज मिळाले असेल तर गुंतविलेली रक्कम काढा.

26. एका रकमेवर सरळव्याजाने रकमेच्या $\frac{3}{4}$ पट व्याज मिळाले. सरळव्याजाच्या दराच्या तिप्पट कालावधीसाठी ही रक्कम ठेवली होती. तर व्याजदर काढा.

27. दसादशे 3 दराने 4 वर्षासाठी ₹2250 वर जेवढे व्याज मिळते, तेवढेच व्याज मिळण्यासाठी दसादशे 4 दराने ₹2700 किती कालावधीसाठी ठेवावेत?
28. दसादशे 10 दराने एका रकमेवर 2 वर्षाचे मिळणारे सरळव्याज आणि 3 वर्षाचे मिळणारे सरळव्याज यामधील फरक ₹100 आहे तर ती रक्कम काढा.
29. दसादशे 4 दराने एक रक्कम 3 वर्षासाठी चक्रवाढव्याजाने ठेवली. 3 वर्षानंतर ₹70304 ही त्या रकमेची रास झाली. तर ती रक्कम काढा (व्याजदर आकारणी वार्षिक).
30. दसादशे 10 दराने एका रकमेवर दोन वर्षासाठी मिळणा-या सरळव्याजापेक्षा चक्रवाढव्याजाची रक्कम ₹50 ने जास्त आहे. तर ती रक्कम काढा. (व्याजदर आकारणी वार्षिक).
31. एकाच व्याजदराने चक्रवाढव्याजाने एका रकमेची 3 वर्षात ₹18522.00 रास होते. आणि चार वर्षात ₹19448.10 रास होते. (व्याजदर आकारणी वार्षिक). ती रक्कम व व्याजदर काढा.
32. चक्रवाढव्याजाची तिमाही आकारणी असताना दसादशे 20 दराने सहा महिन्यांमध्ये एका रकमेची ₹26460 रास होते. तर ती रक्कम काढा.
33. चक्रवाढव्याजाची आकारणी वार्षिक असताना ₹1220 दराने सहा महिन्यांमध्ये एका रकमेची ₹26460 रास होते. तर ती रक्कम काढा.
34. स्कूटरच्या वापरामुळे विक्री किंमतीत पहिल्या वर्षी 20% दुस-या वर्षी 15% तर तिस-या वर्षी 10% घट होते. तर आज ₹25000 किम्मत असणा-या स्कूटरची तीन वर्षानंतरची किंमत काढा.
35. 2 वर्षापूर्वी एका गावची लोकसंख्या 20,000 होती. पहिल्या वर्षी लोकसंख्या 10% ने वाढली. परंतु दुस-या वर्षी ती 10% ने कमी झाली. तर त्या गावची आजची लोकसंख्या सांगा.

आपली प्रगती तपासा – उत्तरे

8.1

1.	(a) 48%	(b) 45%	(c) $41\frac{2}{3}$%	(d) 40%	(e) 20%
	(f) 30%	(g) 36%	(h) 126%	(i) 288%	(j) 98.48%
2.	(a) $\frac{53}{100}$	(b) $\frac{17}{20}$	(c) $\frac{27}{160}$	(d) $\frac{137}{4000}$	(e) $\frac{1}{16}$
	(f) $\frac{7}{10}$	(g) $\frac{63}{400}$	(h) $\frac{1}{40000}$	(i) $\frac{947}{2000}$	(j) $\frac{21}{4000}$

3. (a) 97% (b) 73.5% (c) 3% (d) 207% (e) 80%
(f) 175% (g) 2.5% (h) 325.75% (i) 15.2% (j) 300.15%

4. (a) 0.72 (b) 0.41 (c) 0.04 (d) 1.25 (e) 0.09
(f) 4.1 (g) 3.5 (h) 1.025 (i) 0.00025 (j) 0.1025

5. 50% 6. 90% 7. 6.25% 8. 47.5% 9. 30%

10. 5%

8.2

1. (a) 200 (b) 564
2. ₹ 2625 3. 175, 100, 125, 100 4. 25%
5. 56.25% 6. 500 7. 36 मिनिटे
8. 6000 9. ₹ 40, ₹ 32 10. 4% घट
11. B 12. 10.8%
13. ₹ 13200, ₹ 12000, ₹ 10000

8.3

(1) $33\frac{1}{3}$% नफा (2) 10% (3) 25% (4) 120

(5) ₹ 2576 (6) 21 (7) 4% तोटा (8) ₹ 1108.80

(9) 12% नफा (10) 15% नफा

8.4

(1) ₹ 318.75 (2) 20% (3) ₹ 15390 (4) 25%

(5) ₹ 724.50 (6) 10% तोटा (7) ₹ 2185 (8) 10.4%

8.5

(1) ₹ 16,240 (2) ₹ 3744 (3) ₹ 5600 (4) 11%

(5) 4 वर्षे (6) 10% (7) ₹ 1100, 5% (8) $9\frac{5}{7}$%

(9) 24 वर्षे (10) b

8.6

(1) ₹ 1951 (2) ₹ 1951 (3) ₹ 2522 (4) ₹ 24,000

(5) ₹ 630 (6) ₹ 46, 375 (7) ₹ 80,000

(8) $1\frac{1}{2}$ वर्षे (9) 20% (10) ₹ 1600, 5%

8.7

(1) ₹ 316368	(2) ₹ 300186	(3) ₹ 291456
(4) 4.2042 टन / हेक्टर	(5) 3.2256×10^8	(6) 49140

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह – उत्तरे

(1)

(a) 45%	(b) 70%	(c) 34%	(d) 6%

(2)

(a) 0.36	(b) 4.10	(c) 0.02	(d) 0.0035

(3)

(a) $\frac{3}{2500}$	(b) $\frac{1}{40}$	(c) $\frac{51}{200}$	(d) $\frac{51}{20}$

(4)

(a) 115	(b) 20	(c) 4	(d) 460
(5) 42 %	(6) 25%	(7) 320	(8) 1800
(9) 18	(10) 25%	(11) 70%	(12) 50
(13) 1 लाख	(14) ₹ 14,000	(15) रतन स्टोअर्स	(16) 50
(17) 20%	(18) 36	(19) 60% नफा	(20) 25%
(21) ₹ 400	(22) 20%	(23) ₹ 1650	(24) ₹ 25,000
(25) ₹ 2000	(26) $3\frac{1}{3}$ %	(27) 2 ½ वर्षे	(28) ₹ 3000
(29) ₹ 62,500	(30) ₹ 5000	(31) ₹ 16,000, 5%	
(32) ₹ 24,000	(33) 10%	(34) ₹ 13,500	
(35) 19800			

❖ ❖ ❖

9

हप्ता खरेदी

"**सुरूवातीला फक्त ₹500 भरा आणि रंगीत टि. व्ही घरी घेऊन जा. उरलेली रक्कम सुलभ हप्त्याने भरा.**" किंवा "**आपल्या आवडीची मोटार घ्या. सुरवातीला फक्त ₹50,000 भरा. उरलेली रक्कम सुलभ हप्त्यात भरा.**" अशा प्रकारच्या जाहिराती आपण रोज पाहतो.

सव–सामान्य माणूस स्कूटर, मोटार, फ्रिज, रंगीत टि.व्ही.या सारख्या महाग वस्तू तो आथि–क दृष्टया दुब–ल असल्याने घेऊ शकत नाही. परंतू या वस्तू हप्त्यावर मिळण्याची सोय सामान्य माणसाल वस्तू घेण्यासाठी प्रवृत्त करते. या योजनेनुसार वस्तू खरेदीच्या वेळी एक विशिष्ट रक्कम भरावी लागते आणि उरलेली रक्कम पुढील कालावधीत सुलभ हप्त्यात फेडता येते. विक्रेता व खरेदीदार यामध्ये झालेल्या करारानुसार हप्ता मासिक, त्रैमासिक, अर्धवार्षिक किंवा वार्षिकही असू शकतो.

अशा त–हेने सव–सामान्य माणसाला हप्ता खरेदी योजनेमुळे आवाक्यावाहेरच्या वस्तू घेणे शक्य होते. या योजनेनुसार ग्राहक सुरवातीला काही रक्कम देऊन ती वस्तू घेऊन जातो आणि ग्राहक व विक्रेता यामध्ये झालेल्या करारानुसार उरलेली रक्कम सुलभ हप्त्यात फेडतो. या योजनेमुळे ग्राहकाला (सव–सामान्य माणसाला) हप्ता फेडण्यासाठी का होईना परंतु बचतीची सवय लागते.

या पाठात आपण हप्ता खरेदीच्या वेगवेगळया योजना पाहणार आहोत. या योजनेत किती व्याज आकारले जाते हे पाहणार आहोत व त्या किती सुलभ आहेत याची माहिती घेणार आहोत.

उद्दिष्टे

या पाठाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास खालील गोष्टी शक्य होणार आहेत.

- हप्त्याने वस्तू खरेदी करण्यामधील फायदे / तोटे समजावून घेता येतील.
- हप्त्याने वस्तू घेतली असता दिलेल्या सरळव्याज दराने प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढता येईल.

- ❖ प्रत्येक हप्त्याची रक्कम आणि हप्त्यांची संख्या दिली असता व्याजदर काढत येईल.
- ❖ हप्त्यामध्ये चक्रवाढ व्याजाची आकारणी तिमाही, सहामाही किंवा वार्षिक होत असल्यास त्यानुसार हप्त्याची रक्कम काढता येईल.
- ❖ हप्त्यासंबंधीत उदाहरणे सोडविता येतील.

अपेक्षित पूव-ज्ञान

- ❖ सरळव्याज आणि चक्रवाढ व्याज
- ❖ व्याज आकारणी मासिक, तिमाही, सहामाही, वार्षिक असताना व्याज काढणे.

9.1 हप्ताखरेदी योजना – काही व्याख्या

- ❖ **रोख किंमत –** खरेदीच्या वेळी ग्राहकाला त्या वस्तूची द्यावी लागणारी किंमत (Cash down Payment)

  एखादी वस्तू हप्त्याने खरेदी करताना सुरवातीस जी रक्कम द्यावी लागते तिला (Cash down Payment) दुकानदार आणि ग्राहक यामध्ये हप्तेबंदीचा करार होताना आणि ग्राहक वस्तू घरी घेऊन जाताना दिली जाणारी ही वस्तूची अंशतः किंमत असते.

- ❖ **हप्ता –** ग्राहक नियमितपणे ठराविक कालावधीमध्ये (दरमहा, दरवषी-) वस्तूच्या किंमतीचा काही भाग दुकानदाराला देत असतो. त्याला हप्ता असे म्हणतात.

- ❖ **हप्ता खरेदी योजनेमधील व्याज –** हप्ता खरेदी योजनेत ग्राहक आणि वस्तूच्या एकूण किंमतीपैकी काही भागच देत असतो.उरलेली रक्कम तो नंतर देणार असतो. या नंतर मिळणाऱ्या पैशामुळे दुकानदार ग्राहकाकडून जास्त पैसे वसूल करतो हे जास्त पैसे म्हणजे ग्राहकाकाडे देय असलेल्या रकमेवर घेतले जाणारे व्याज होय.

9.2 हप्ता योजनेतील व्याज काढणे

ही प्रक्रिया समजावून घेण्यासाठी आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदाः 9.1 **एका टि.व्ही. ची रोखीची किंमत ₹ 20,000 आहे. हाच टिव्ही हप्त्याने घेतला असता सुरवातीला ₹ 6000 भरावे लागतात व त्यानंतर 6 महिन्यांनी ₹ 16,800 द्यावे लागतात. या हप्त्या योजनेतील व्याजदर काढा.**

उत्तर ः टिव्हिची रोखीची किंमत = ₹ 20,000

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 6000

उरलेली रक्कम = ₹ 14,000

6 महिन्यानंतर द्यावी लागणारी रक्कम = ₹ 16,800 = ?

हप्ता योजनेतील व्याजदर r% असल्यास,

$$14,000 + 14,000 \text{ X } \frac{r}{100} \text{ X } \frac{6}{12} = 16,800$$

$$\therefore \frac{7r}{10} = 28$$

$\therefore$ r = 40 $\qquad$ $\therefore$ व्याजदर = 40%

उदाः 9.2 : एका पंख्यांची रोखीची किंमत ₹ 450 आहे. हाच पंखा हप्त्याने घेतला असता सुरवातीला ₹ 210 भरावे लागतात व त्यानंतर दरमहा ₹ 125 चे दोन हप्ते द्यावे लागतात. या हप्त्याचे योजनेतील व्याजदर काढा.

उत्तर ः पंख्याची रोखीची किंमत = ₹ 450

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 210

उरलेली रक्कम = ₹ (450–210) = ₹ 240

हप्ता योजनेतील व्याजदर दसादशे r आहे असे मानू

दोन महिन्याच्या अखेरीस

₹ 240 ची होणारी रास = ₹ $[240 + 240 \text{ X} \frac{r}{100} X \frac{2}{12}]$

$$= ₹ \left[240 + \frac{2r}{5}\right] \qquad \text{..............(i)}$$

एक महिन्यांनंतर ₹ 125 दिले जातील.

$\therefore$ एक महिन्यानंतर = ₹ $125 + (125 \frac{r}{100} X \frac{1}{12})$

$$= ₹ [125 + \frac{5r}{48}] \qquad \text{..............(ii)}$$

दोन महिन्यानंतर ₹ 125 दिले जातील = ₹ 125 ....(iii)

$$\therefore 240 + \frac{2r}{5} = 125 + \frac{5r}{48} + 125$$

$$= [\frac{2}{5} - \frac{5}{48}]^r = 10$$

$$\Rightarrow r = \frac{2400}{71} = 33.8 \text{ (अंदाजे)}$$

$\therefore$ व्याजदर = 33.8%

दुसरी पध्दत

पंख्याची रोखीची किंमत = ₹ 450

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 210

दोन हप्त्यांत द्यावी लागणारी रक्कम = ₹ (125 X2)

= ₹ 250

∴ एकूण द्यावी लागलेली रक्कम = ₹ (210 + 250)

= ₹ 460

∴ द्यावे लागलेले व्याज = ₹ (460–450) = ₹ 10

पहिल्या महिन्याचे मुद्दल = ₹ (450 –210) = ₹ 240

दुस–या महिन्याचे मुद्दल = ₹ (240 – 125) = ₹ 115

∴ एक महिन्यासाठीचे एकूण मुद्दल = ₹ (240 +115)

= ₹ 355

$$\therefore 355 \text{ X} \frac{r}{100} \text{ X } \frac{1}{12} = 10$$

किंवा $r = \dfrac{10 \, X \, 100 X2}{355}$

$= \dfrac{2400}{71} \approx 33.8$

∴ व्याजदर = 33.8%

उदा. 9.3 : एका मायक्रो ओव्हनची रोखीची किंमत ₹ 9600 आहे. हीच मायक्रो ओव्हन हप्त्याने घेतली असता सुरवातीला ₹ 4000 भरावे लागतात व प्रत्येकी ₹ 2000 चे तीन मासिक हप्ते द्यावे लागतात. या हप्त्यायोजनेतील व्याजदर काढा.

उत्तर ः मायक्रोओव्हनची रोखीची किंमत = ₹ 9600

सुरूवातीचा हप्ता = ₹ 4000

3 हप्त्यांची रक्कम = ₹ (3 X 2000)

= ₹ 6000

हप्तायोजनेमध्ये भरावी लागणारी रक्कम = ₹ (4000 + 6000)

= ₹ 10,000

∴ दिलेले व्याज = ₹ (10,000 – 9,600) = ₹ 400

पहिल्या महिन्यासाठी मुद्दल = ₹ (9600–4000) = ₹ 5600

दुसऱ्या महिन्यासाठी मुद्दल = ₹ (5600–2000) = ₹ 3600

तिसऱ्या महिन्यासाठी मुद्दल = ₹ (3600– 2000) = ₹ 1600

∴ एका महिन्यासाठी एकूण मुद्दल = ₹ (5600+3600+1600)
= ₹ 10,800

आता

$$10,800 \text{ X } \frac{r}{100} \text{ X } \frac{1}{12} = 400 \Rightarrow 9R = 400$$

$$\text{किंवा } r = \frac{400}{9} = 44.4\%$$

∴ व्याजदर = 44.4%

उदा॰ 9.4 : **एका संगणकाची रोखीची किंमत ₹ 30,000 आहे. हाच संगणक हप्त्याने घेतला असता सुरवातीला ₹ 18,000 भरावे लागतात आणि त्यानंतर प्रत्येकी ₹ 2150 चे सहा मासिक हप्ते द्यावे लागतात. या हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा.**

उकल ॰ संगणकाची रोखीची किंमत = ₹ 30,000

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 18,000

6 हप्त्यांची रक्कम = ₹ (6 X 2150) =
= ₹ 12,900

हप्ता योजनेमध्ये भरावी लागणारी = ₹ 18000 + ` . 12,900
= ₹ 30,900

∴ दिलेले व्याज = ₹ (30,900 – 30,000)
= ₹ 900

पहिल्या महिन्यासाठी मुद्दल = ₹ (30,000 – 18,000) = ₹ 12,000

दुसऱ्या महिन्यासाठी मुद्दल = ₹ (12,000 – 2150) = ₹ 9850

तिसऱ्या महिन्यासाठी मुद्दल = ₹ (9850 – 2150) = ₹ 7700

चौथ्या महिन्यासाठी मुद्दल	= ₹(7700 – 2150)	= ₹5550
पाचव्या महिन्यासाठी मुद्दल	= ₹(555– – 2150)	= ₹3400
सहाव्या महिन्यासाठी मुद्दल	= ₹(3400 – 2150)	= ₹1250

∴ एका महिन्यासाठी एकूण मुद्दल =

₹(12000 + 9850+7700+5550+3400+1250) = ₹39750

$$\therefore 39750 \text{ X} \frac{r}{100} \text{ X} \frac{1}{12} = 900$$

$$\Rightarrow r = \frac{900X12X100}{39750} = \frac{1440}{53}$$

= 22.17% ∴ व्याजदर 27.17%

टीप ः– उदा. 2,3,4 मध्ये आपल्या असे लक्षात येते की शेवटच्या महिन्याची रक्कम ही मासिक हप्त्यापेक्षा कमी असते. शेवटच्या महिन्याच्या रक्कमेत व्याज मिळविल्यास ती रक्कम मासिक हप्त्यासाठी येते.

आपली प्रगती तपासा 9.1

1) एका टेबलाची रोखीची किंमत ₹2000 आहे हेच टेबल हप्त्याने घेतले असता सुरवातीला ₹600 भरावे लागतात. त्यानंतर 2 महिन्यांनी ₹1500 द्यावे लागतात. तर या हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा.

2) एका सायकलची किंमत ₹2700 आहे. हाच टी.व्ही हप्त्याने घेतला असता सुरवातीला ₹4000 भरावे लागतात व त्यानंतर प्रत्येकी ₹3000 चे सहा मासिक हप्ते द्यावे लागतात. तर हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा.

3) एका टी.व्ही.ची रोखीची किंमत ₹21,000 आहे. हाच टी.व्ही. हप्त्याने घेतला असता सुरवातीला ₹4000 भरावे लागतात वा त्यानंतर प्रत्येकी ₹3000 चे सहा मासिक हप्ते द्यावे लागतात तर हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा.

4) अनिलने ₹6800 रोख किंमत असलेला संगणक हप्त्याने घेतला. त्यासाठी त्याने सुरवातीला ₹2000 भरले आणि ₹1000 चे पाच मासिक हप्ते भरले. तर त्याला किती व्याजदर द्यावा लागला ते काढा.

5) एका स्कूटरची रोखीची किंमत ₹ 28,000 आहे. ती हप्त्याने घेतली असता सुरवातीला ₹ 7400 भरावे लागतात. त्यानंतर ₹ 5200 चे चार मासिक हप्ते भरावे लागतात. तर हप्तायोजनेतील व्याजदर काढा.

6) एका एअर कंडिशनरची रोखीची किंमत ₹ 20,000 आहे. तो हप्त्याने घेतला असता सुरवातीला ₹ 12,000 भरावे लागतात. त्यानंतर प्रत्येकी ₹ 2200 चे चार मासिक हप्ते भरावे लागतात. तर या हप्तायोजनेतील व्याजदर एक दशांश स्थळापर्यंत काढा.

7) एक वस्तू रोखीने ₹ 25,000 मिळते. ती हप्त्याने घ्यावयाची असल्यास सुरवातीला 20% रक्कम रोख भरावी लागते. त्यानंतर ₹ 3750 चे सहा मासिक हप्ते भरावे लागतात. तर या हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा.

9.3 हप्त्याची रक्कम काढणे

आता या बाबीकडे आपण दुकानदाराच्या नजरेतून पाहू या. विक्री वाढावी म्हणून दुकानदार वस्तू हप्त्याने विकण्यास तयार होतात. पैसे हप्त्याने मिळत असल्यामूळे दुकानदार काही दराने व्याज आकारतात. त्याचप्रमाणे सुरवातीचा हप्ता, त्यापुढील हप्त्यांची संख्या व प्रत्येक हप्त्याची रक्कम ठरवितात. ही प्रक्रिया समजावून घेण्यासाठी आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 9.5 : **एका पंख्यांची रोखीची किंमत ₹ 1940 आहे. हा पंखा हप्त्याने घ्यावयाचा असल्यास ₹ 420 सुरवातीचा हप्ता द्यावा लागतो व त्यानंतर तीन समान रकमेचे मासिक हप्ते द्यावे लागतात. यासाठी दसादशे 96 दराने व्याज आकारणी होत असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.**

उत्तर : पंख्याची रोखीची किंमत = ₹ 1940

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 420

उरलेली रक्कम ₹ 1520 ही तीन मासिक हप्त्यात देणे.

प्रत्येक हप्ता ₹ X चा आहे असे मानू.

∴ हप्ता खरेदीने द्यावी लागणारी एकूण रक्कम = ₹ [420 + 3x]

∴ दिलेले व्याज = ₹ (420 + 3x–1940)

= ₹ (3x – 1520)

∴ पहिल्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ 1520

∴ दुसऱ्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ (1520 – x)

∴ तिसऱ्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ (1520–2x)

∴ एका महिन्यासाठी एकूण मुद्दल = ₹ $(4560 - 3x)$

व्याजदर = 16 %

$$\therefore (3x - 1520) = (4560 - 3x)\ \frac{16}{100}\ \mathrm{X}$$

$$\therefore 25\,(3x - 1520) = (1520 - x)$$

म्हणजेच $76x = 39520$

किंवा $x = 520$

∴ प्रत्येक मासिक हप्त्याची रक्कम = ₹ 520

उदा. 9.6 : एका संगणकाची रोखीची किंमत ₹ 34,000 आहे. हा संगणक हप्त्याने घ्यावयाच्या असल्यास ₹ 20,000 सुरूवातीचा हप्ता द्यावा लागतो व त्यानंतर पाच समान रकमेचे मासिक हप्ते द्यावे लागतात. यासाठी दसादशे 30 दराने व्याज आकारणी होत असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

उत्तर : संगणकाची रोखीची किंमत = ₹ 34,000

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 20,000

उरलेली रक्कम ₹ 14,000 पाच मासिक हप्त्यात देणे.

प्रत्येक टप्पा ₹ x चा आहे, असे मानू.

हप्ता खरेदीने द्यावी लागणारी एकूण रक्कम = ₹ $[20,000 + 5x]$

∴ या पध्दतीत आकारण्यात आलेले व्याज = ₹ $(5x - 14000)$

पहिल्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ 1400

दुसऱ्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ $(1400 - x)$

तिसऱ्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ $(14000 - 2x)$

चौथ्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ $(14000 - 3x)$

पाचव्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ $(14000 - 4x)$

∴ एका महिन्यासाठी एकूण मुद्दल = ₹ $(70,000 - 10x)$

व्याजदर = 30%

$$\therefore (5x - 14000) = (70000 - 10x)\ \mathrm{X}\ \frac{30}{100}\ \mathrm{X}\ \frac{1}{12}$$

$$\therefore 40\,(5x - 14000) = 10\,(7000 - x)$$

$20x - 56000 = 7000 - x$

किंवा $21x = 63000$

$\therefore x = \dfrac{63000}{21}$

$\therefore x = 3000$

$\therefore$ प्रत्येक मासिक हप्त्याची रक्कम ₹ 3000

उदा. 9.7 : कपडे धुण्याच्या एका यंत्राची रोख किंमत ₹ 12000 आहे. हप्त्यावर यंत्र घ्यावयाचे असल्यास कंपनीला ₹ 5200 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम समान मासिक हप्त्यात भरावी लागते. व्याजदर दसादशे 12 आहे. जर ग्राहकाने कंपनीला दरमहा ₹ 1400 दिले, तर त्याला किती हप्ते भरावे लागतील?

उत्तर : समजा त्याला 'n' हप्ते भरावे लागतील, असे मानू

यंत्राची रोखीची किंमत = ₹ 12000

हप्ता खरेदीने द्यावी लागणारी एकूण रक्कम = ₹ (5200 + 1400n)

व्याजदर = 12 %

$\therefore$ त्याला द्यावे लागणारे व्याज = ₹ (5200+1400n–12,000)

= ₹ (1400n – 6800)

प्रत्येक महिन्यात देणे असलेले मुद्दल

पहिल्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ 6800

दुसऱ्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ 5400

तिसऱ्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ 4000

चौथ्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ 2600

पाचव्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ 1200

सहाव्या महिन्यात देणे असलेली रक्कम = ₹ 0

$\therefore$ एका महिन्यासाठी एकूण मुद्दल = ₹ 20,000

$$\therefore 20{,}000 \times \frac{12}{100} \times \frac{1}{12} = (1400n - 6800)$$

$\therefore 1400\,n = 7000$ म्हणजेच $n = \dfrac{700}{1400} = 5$

$\therefore$ त्याला 5 हप्ते भरावे लागतील.

आपली प्रगती तपासा 9.2

1) एका स्कूटरची रोखीची किंमत ₹ 30,000 आहे. ती हप्त्याने द्यावयाची असल्यास ₹ 15,000 सुरवातीचा हप्ता भरावा लागतो. आणि उरलेली रक्कम 4 समान मासिक हप्त्यात फेडावी लागते. व्याजदर दसादशे $33\ ^1/_3$ % असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

2) मायक्रोवेव्ह ओव्हनची रोखीची किंमत ₹ 9600 आहे. ती हप्त्याने घ्यावयाची असल्यास सुरवातीचा हप्ता ₹ 4000 भरावा लागतो आणि उरलेली रक्कम 3 समान मासिक हप्त्यात फेडावी लागते. व्याजदर दसादशे $22\ ^2/_9$ असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

3) एका वस्तूची रोखीची किंमत ₹ 500 आहे. ती हप्त्याने द्यावयाची असल्यास ₹ 1500 सुरवातीचा हप्ता भरावा लागतो आणि उरलेली रक्कम 5 समान मासिक हप्त्यात फेडावी लागते. व्याजदर दसादशे 18 असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

4) एका वस्तूची रोखीची किंमत ₹ 500 आहे. ती हप्त्याने द्यावयाची असल्यास ₹ 150 सुरवातीचा हप्ता भरावा लागतो आणि उरलेली रक्कम 5 समान मासिक हप्त्यात फेडावी लागते. व्याजदर दसादशे 18 असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

9.4 रोख किंमत काढणे

हप्त्यावर दिलेल्या वस्तूंची रोख किंमत काढणे यावर आधारित काही उदाहरणे आपण पाहू या.

त्यासाठी सुरवातीचा हपता, समान मासिक हप्त्याची रक्कम, मासिक हप्त्यांची संख्या, आणि व्याजदर या गोष्टी माहिती असाव्या लागतात.

उदा.9.8 : – **एक सायकल सुरवातीचा हप्ता ₹ 500 घेऊन हप्त्याने विकली दुसरा हप्ता ₹ 610 हा एक महिन्याने देण्यात येणार आहे. व्याजदर दसादशे 20 असल्यास सायकलची रोखीची किंमत काढा.**

उत्तर : सुरवातीचा हप्ता = ₹ 500

एक महिन्यानंतर देण्यात येणारी हप्त्याची रक्कम = ₹ 610

व्याजदर = 20%

आपणास एक महिन्यानंतर देण्यात येणा–या ₹ 610 ची आजची किंमत (मुद्दल) काढावयाची आहे.

$$\therefore\ 610 = \left[\text{मुद्दल} \times \frac{20}{100} \times \frac{1}{12} + \text{मुद्दल}\right]$$

$$610 = \text{मुद्दल}\left[1+\frac{20}{1200}\right] ₹.$$

$$\text{किंवा मुद्दल} = \frac{610\times1200}{1220} ₹.$$

$$= ₹\,600$$

$\therefore$ सायकलची रोखीची किंमत = (500 + 600)

= ₹ 1100

उदा. 9.9 :– एक कॅमेरा सुरवातीचा हप्ता ₹ 2500 घेऊन हप्त्याने विकला. दुसरा हप्ता ₹ 2100 हा तीन महिन्यानंतर देण्यात येणार आहे. व्याजदर दसादशे 20 असल्यास कॅमे–याची रोखीची किंमत काढा.

उत्तर ः सुरूवातीचा हप्ता = ₹ 2500

तीन महिन्यानंतर द्यावयाची रक्कम = ₹ 2100

व्याजदर = 20%

$\therefore$ ₹ 2100 ची आजची किंमत काढू.

$$= ₹\,\frac{2100\times100}{100+20\times\frac{3}{12}}$$

$$= ₹\,2,000$$

$\therefore$ कॅमे–याची रोखीची किंमत = ₹ (2500 + 2000)

= ₹ 4500

$\therefore$ कॅमे–याची रोखीची किंमत = ₹ 4,500

दुसरी पध्दत

रोखीची किंमत ₹ x आहे असे मानू

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 2500

$\therefore$ 3 महिन्यानंतरच्या हप्त्याचे मुद्दल = ₹ (x – 2500)

$\therefore$ व्याज = ₹ $(4600 - x)$

$\therefore$ 3 महिन्यानंतरच्या हप्त्याने मुद्दल = ₹ $(x - 2500)$

$$\therefore (4600 - x) = (x - 2500) \times \frac{3}{12} \times \frac{20}{100} = \frac{x - 2500}{20}$$

$\therefore 20\,(4600 - x) = x - 2500$

$\therefore 92000 - 20x = x - 2500$

$\therefore 92000 + 2500 = x + 20x$

$\therefore 94500 = 21x$

$$\therefore x = \frac{94500}{21}$$

$\therefore x = 4500$

$\therefore$ कॅमे–याची रोखीची किंमत = ₹ 4500

उदा.9.10 :–एक मिक्सर सुरवातीचा हप्ता ₹ 360 देऊन हप्त्याने खरेदी केला. त्यानंतर प्रत्येकी ₹ 390 चे 3 मासिक हप्ते द्यावे लागतात. व्याजदर 16% असल्यास मिक्सरची रोखीची किंमत काढा.

उत्तर ः मिक्सरची रोखीची किंमत ₹ x आहे असे मानू.

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 360

3 हप्त्यात द्यावी लागणारी रक्कम = ₹ (3 x 390)

= ₹ 1170

$\therefore$ एकूण द्यावी लागणारी रक्कम = ₹ (360 + 1170)

= ₹ 1530

$\therefore$ व्याज = ₹ $(1530 - x)$

$\therefore$ पहिल्या महिन्यासाठीचे मुद्दल = ₹ $(x - 360)$

$\therefore$ दुस–या महिन्यासाठीचे मुद्दल = ₹ $(x - 360 - 390)$ = ₹ $(x - 750)$

$\therefore$ तिस–या महिन्यासाठीचे मुद्दल = ₹ $(x - 750 - 390)$ = ₹ $(x - 1140)$

$\therefore$ एका महिन्यासाठी एकूण मुद्दल = ₹ $(x - 360 + x - 750 + x - 1140)$

= ₹ $(3x - 2250)$

$$\therefore (1530 - x) = (3x - 2250) \times \frac{1}{12} \times \frac{16}{100}$$

$$= \frac{x - 750}{25}$$

$\therefore$ 25 (1530 – x) = x – 750

$\therefore$ 38250 + 750 = x + 25 x

$\therefore$ 39000 = 26 x

$$\therefore x = \frac{39000}{26}$$

$\therefore x$ = 1500

$\therefore$ मिक्सरची रोखीची किंमत = ₹ 1500

आपली प्रगती आजमावा 9.3

1) एक टेबल सुरवातीचा हप्ता ₹ 750 देऊन हप्त्याने खरेदी केले. त्यानंतर 6 महिन्यांनी ₹ 436 चा हप्ता द्यावा लागणार होता. व्याजदर दसादशे 18 असल्यास टेबलाची रोखीची किंमत काढा.

2) एक फ्रिज सुरवातीचा हप्ता ₹ 7000 देऊन हप्त्याने खरेदी केला. त्यानंतर 3 महिन्यांनी ₹ 3180 चा हप्ता द्यावा लागणार होता. व्याजदर दसादशे 24 असल्यास फ्रिजची रोखीची किंमत काढा.

3) स्वयंपाक घरातील शेगडया सुरवातीचा हप्ता ₹ 520 देऊन हप्त्याने खरेदी केल्या त्यानंतर दरमहा ₹ 520 चे चार समान हप्ते द्यावे लागणार होते. व्याजदर दसादशे 25 असल्यास शेगडयांची रोखीची किंमत काढा.

4) एक पंखा सुरवातीच हप्ता ₹ 210 देऊन हप्त्याने खरेदी केला. त्यानंतर दरमहा ₹ 260 चे तीन समान हप्ते द्यावे लागणार होते. व्याजदर दसादशे 16 असल्यास पंख्याची रोखीची किंमत काढा.

5) एक विद्युत शेगडी सुरवातीचा हप्ता ₹ 1500 देऊन हप्त्याने खरेदी केली. त्यानंतर दरमहा ₹ 440 चे पाच समान हप्ते द्यावे लागणार होते. व्याजदर दसादशे 24 असल्यास शेगडीची रोखीची किंमत काढा.

1.5 चक्रवाढ व्याजावर आधारित उदाहरणे

हप्त्याने वस्तू खरेदी करताना एकूण हप्त्यांचा कालावधी एक वषा–च्या आतील असल्यास सव–साधारणपणे सरळव्याजाने व्याज आकारणी केली आहे.

परंतु घर खरेदी, गाडी खरेदी किंवा कारखानदारीसाठी दीर्घ मुदतीची कर्जे घेतली जातात. या ठिकाणी हप्ता सर्वसाधारणपणे वार्षिक आणि दीर्घ मुदतीसाठी असतो म्हणून अशा बाबतीत चक्रवाढ व्याजाचा वापर केला जातो.

हप्त्याचा कालावधी वर्षाच्या आतील असून सुध्दा जर व्याज आकारणी तिमाही किंवा सहामाही असल्यास विक्रेता चक्रवाढ दरानेच व्याज आकारणी करतो.

चक्रवाढ व्याजावर आधारीत काही उदाहरणे आपण पाहू या.

उदा.9.11 : एक फ्रिजची रोखीने किंमत ₹ 12,000 आहे. तो हप्त्याने घेतला असता सुरवातीला ₹ 3600 भरावे लागतात आणि त्यानंतर उरलेली रक्कम दोन समान सहामाही हप्त्यात फेडावी लागते. चक्रवाढ व्याजदराची आकारणी अर्धवार्षिक असून व्याजदर 20% आहे. तर प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढा.

उत्तर ः फ्रिजची रोखीने किंमत = ₹ 12,000

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 3600

बाकी = ₹ 8400

व्याजदर = दसादशे 20% किंवा अर्धवार्षिक 10%

अर्धसहामाहीचा हप्ता ₹ x आहे, असे मानू

आपण प्रत्येक हप्त्याची आजची किंमत (मुद्दल) काढू.

P_1 आणि P_2 या अनुक्रमे पहिला हप्ता व दुसरा हप्ता यांच्या आजच्या किंमती आहेत, असे मानू

$$\therefore x = p_1\left[1+\frac{10}{100}\right]^1 \text{ आणि } x = p_2\left[1+\frac{10}{100}\right]^2$$

$$\therefore p_1\left(\frac{10}{11}\right)x \text{ आणि } P_2 = \left(1+\frac{10}{100}\right)^2 x$$

$$\therefore \frac{10}{11}x \frac{100}{121}x = 8400$$

$$\text{किंवा } x = \frac{8400\times 121}{210} = 4840$$

$\therefore$ प्रत्येक हप्त्याची किंमत = ₹ 4840

उदा. 9.12 : **एका कपडे धुण्याच्या यंत्राची रोखीची किंमत ₹ 15,000 आहे. ते हप्त्याने घेतल्यास सुरूवातीला ₹ 2250 भरावे लागतात आणि त्यानंतर उरलेली रक्कम दोन समान सहामाही हप्त्यात फेडावी लागते. चक्रवाढ व्याज दराची आकारणी अर्धवार्षिक असून व्याजदर 8% आहे. तर प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढा.**

उत्तर : यंत्राची रोखीने किंमत = ₹ 15000

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 2250

उरलेली रक्कम = ₹ (15000 – 2250)

= ₹ 12750

व्याज = 8 % वार्षिक , 4% अर्धवार्षिक

अर्धसहामाहीचा हप्ता ₹ x आहे असे मानू

P1 आणि P2 या अनुक्रमे पहिला हप्ता व दुसरा हप्ता यांच्या आजच्या मुद्दलांच्या किंमती आहेत असे मानू.

$$\therefore \; x = P_1\left[1+\frac{4}{100}\right]^1 ; \; x = P_1\left[1+\frac{4}{100}\right]^2$$

$$\therefore \; P_1 = \frac{25}{26}x \text{ आणि } P_2 = \left[\frac{25}{26}\right]^2 x$$

$$\therefore 12750 = \frac{25}{26}x + \left(\frac{25}{26}\right)^2 x$$

$$= \frac{25}{26}x\left[1+\frac{25}{26}\right]$$

$$= \frac{25}{26}\times\frac{51}{26}x$$

$$\Rightarrow x = 12750\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{51}$$

$$= 6760$$

प्रत्येक हप्ता = ₹ 6760 चा होईल.

उदा. 9.13 : एका यंत्राची किंमत रोखीने ₹ 3500 आहे. ते हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 1500 द्यावे लागतात आणि उरलेली रक्कम 3 समान तिमाही हप्त्यात फेडावी लागते. चक्रवाढ व्याज दराची आकारणी तिमाही असून व्याजदर 12 % आहे. तर प्रत्येक हप्त्याची रक्कम पूर्ण रूपयात काढा.

उत्तर ः यंत्राची रोखीने किंमत = ₹ 3500

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 1500

उरलेली रक्कम = ₹ (3500 – 1500) = ₹ 2000

व्याजदर = 12% $\therefore \frac{12}{4}$ = 3% तिमाही

प्रत्येक हप्ता ₹ x चा आहे. आणि

P1आणि P2 आणि P3 अनुक्रमे पहिला हप्ता आणि दुसरा हप्ता आणि तिसरा हप्ता यांच्या मुद्दलांच्या आजच्या किंमती आहेत, असे मानू

$$x = P_1\left(1+\frac{3}{100}\right), \quad x = P_2\left(1+\frac{3}{100}\right)^2 \text{ and } x = P_3\left(1+\frac{3}{100}\right)^3$$

$$P_1 = \frac{100}{103}x, \quad P_2 = \left(\frac{100}{103}\right)^2 x \text{ and } P_3 = \left(\frac{100}{103}\right)^3 x$$

.

$$\frac{100}{103}x + \left(\frac{100}{103}\right)^2 x + \left(\frac{100}{103}\right)^3 x = 2000 \Rightarrow \frac{100}{103}x\left[1+\frac{100}{103}+\left(\frac{100}{103}\right)^2\right] = 2000$$

$$x = 2000 \times \frac{103}{100} \times \frac{(103)^2}{30909} = ₹\ 707$$

$\therefore$ प्रत्येक हप्ता = ₹ 707

उदा. 9.14 : एक टेलिव्हिजन सुरवातीचा हप्ता ₹ 7110 देऊन हप्त्यावर घेता येतो. नंतर प्रत्येकी ₹ 5581.50 चे दोन मासिक हप्ते देऊन उरलेली रक्कम फेडता येते. चक्रवाढ व्याज दराची आकारणी मासिक असून व्याजदर 20% आहे. तर टेलिव्हिजनची रोखीची किंमत काढा.

उत्तर ः सुरवातीचा हप्ता = ₹ 7110

मासिक हप्त्याची रक्कम = ₹ 5581.50

$$= ₹\,\frac{11163}{2}$$

व्याजदर $= 20\%$ वार्षिक , $\frac{20}{12}$ मासिक

P1 आणि P2 या अनुक्रमे पहिला हप्ता व दुसरा हप्ता यांच्या आजच्या मुद्दलांच्या किंमती आहेत, असे मानू

$$\therefore \quad \frac{11163}{2} = P_1\left(1+\frac{20}{1200}\right) \text{ आणि } \quad \frac{11163}{2} = P_2\left(1+\frac{20}{1200}\right)^2$$

यावरून

$$P_1 = \frac{11163}{2} \times \frac{60}{61} = \text{Rs.}5490$$

$$P_2 = \frac{11163}{2} \times \frac{60}{61} \times \frac{60}{61} = \text{Rs.}5400$$

₹ 5490

आणि ₹ 5400

$\therefore$ रोखीची किंमत = ₹ [7110 + 5490+ 5400]

= ₹ 18000

उदा. 9.15 : एका मायक्रो ओव्हनची रोखीची किंमत ₹ 5800 आहे. एका ग्राहकाने सुरवातीला ₹ 1800 हप्ता दिला आणि उरलेली रक्कम तीन समान वार्षिक हप्त्यात देतो असे सांगितले. चक्रवाढव्याजाची आकारणी वार्षिक असून व्याजदर 12% आहे. तर प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढा.

उत्तर : मायक्रो ओव्हनची रोखीची किंमत = ₹ 5800

सुरवातीचा हप्ता = ₹ 1800

उरलेली रक्कम = (5800 – 1800) = ₹ 4000

व्याजदर = 12% चक्रवाढ व्याज आकारणी वार्षिक

प्रत्येक हप्ता ₹ x चा आहे आणि P_1, P_2 आणि P_3 या पहिला हप्ता, दुसरा हप्ता आणि तिसरा हप्ता यांच्या आजच्या मुद्दलांच्या किंमती आहेत, असे मानू.

$$\therefore\ x = P_1\left(1+\frac{12}{100}\right),\quad x = P_2\left(1+\frac{12}{100}\right)^2 \text{ and } x = P_3\left(1+\frac{12}{100}\right)^3$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{25}{28}x,\ P_2 = \left(\frac{25}{28}\right)^2 x \text{ and } P_3 = \left(\frac{25}{28}\right)^3 x$$

$$\therefore \frac{25}{28}x + \left(\frac{25}{28}\right)^2 x + \left(\frac{25}{28}\right)^3 x = 4000$$

$$\frac{25}{28}x\left(1+\frac{25}{28}+\frac{625}{784}\right) = 4000$$

$$x = 4000\times\frac{28}{25}\times\frac{784}{2109}$$

= ₹ 1665.40

$\therefore$ प्रत्येक हप्त्याची रक्कम = ₹ 1665.40

उदा. 9.16 : एका सदनिकेची रोख किंमत ₹ 16,00,000 आहे. ती हप्त्याने घेतली असता सुरवातीला ₹ 5,85,500 द्यावे लागतात आणि उरलेली रक्कम तीन समान अर्ध वार्षिक हप्त्यात फेडता येते. चक्रवाढ व्याजदराची आकारणी अर्धवार्षिक असून व्याजदर 16% आहे. तर प्रत्येक हप्त्याची किंमत काढा. तसेच एकूण किती व्याज द्यावे लागते ते ही काढा.

उत्तर :

सदनिकेची रोखीने किंमत	= ₹ 16,00,000
सुरवातीचा हप्ता	= ₹ 5,85,500
उरलेली रक्कम	= ₹ (16,00,000–5,85,500)
	= ₹ 10,14, 500

व्याजदर = 16% अर्धवार्षिक = 8%

प्रत्येक हप्ता ₹ x चा आहे आणि P_1, P_2 आणि P_3 या पहिला हप्ता, दुसरा हप्ता आणि तिसरा हप्ता यांच्या आजच्या मुद्दलांच्या किंमती आहेत, असे मानू.

$$\therefore\ x = P_1\left(1+\frac{8}{100}\right) = P_1\left[\frac{108}{100}\right]$$

$$\therefore P_1 = x\left(\frac{27}{25}\right)$$

त्याचप्रमाणे $\therefore P_2 = x\left(\frac{27}{25}\right)^2$

आणि $\therefore P_3 = x\left(\dfrac{27}{25}\right)^3$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 10{,}14{,}500$$

$$\therefore\ x\left(\frac{25}{27}\right) + x\left(\frac{25}{27}\right)^2 + x\left(\frac{25}{27}\right)^3 = 1014500$$

$$\therefore\ x\left(\frac{25}{27}\right)\left[1 + \frac{25}{27} + \left(\frac{25}{27}\right)^2\right] = 1014500$$

$$\therefore x \times \frac{25}{27} \times \frac{2029}{729} = 10{,}14{,}500$$

$$\therefore\ \mathrm{x} = \frac{1014500 \times 27 \times 729}{25 \times 2029}$$

$\therefore$ = \` . 3, 93, 660

$\therefore$ प्रत्येक हप्ता ₹ 3,93,660

एकूण व्याज = ₹ [3,93,660 X 3 = 10, 14, 500]

= ₹ [1180980 – 10, 14, 500]

= ₹ 1,66,480

आपली प्रगती आजमावा 9.4

1) एका सायकची रोखीची किंमत ₹ 1661 आहे. ती हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 400 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम तीन अर्धवार्षिक हप्त्यात फेडता येते. चक्रवाढव्याजाची आकारणी अर्धवार्षिक असून व्याजदर 10 % आहे तर प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढा.

2) एका कपडे धुण्याच्या यंत्राची रोखीने किंमत ₹ 15000 आहे ते त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 2000 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम दोन समान अर्धवार्षिक हप्त्याने फेडता येते. चक्रवाढव्याजाची आकारणी अर्धवार्षिक असून व्याजदर 16% आहे तर प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढा.

3) कमलाने हप्ता योजनेने सुरवातीला ₹ 5612.50 इतकी रक्कम देउन एक संगणक विकत घेतला तिने उरलेली रक्कम प्रत्येकी ₹ 8788 या तिमाही हप्त्याने तीन हप्त्यात फेडली. चक्रवाढव्याजाची आकारणी तिमाही असून व्याजदर 16 % आहे. तर संगणकाची रोखीची किंमत काढा. तसेच एकूण किती व्याज द्यावे लागले तेही काढा.

4) एका मोटारची रोखीची किंमत ₹70,000 आहे. ती हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹21,200 भरावे लागतात. उरलेली रक्कम तीन समान वार्षिक हप्त्यात फेडावी लागते. चक्रवाढ व्याजाची आकारणी वार्षिक असून व्याजदर 25 % आहे तर प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढा.

5) एक मायक्रोवेव्ह ओव्हन सुरवातीला ₹2800 भरून हप्त्याने खरेदी केली. उरलेली रक्कम 2 हप्त्यात प्रत्येकी ₹2420 भरून फेडली. चक्रवाढ व्याजाची आकारणी वार्षिक असून व्याजदर 10% आहे. तर ओव्हनची रोख किंमत काढा.

तुम्ही काय शिकलात?

- हप्ता खरेदी योजनेत ग्राहक सुरवातीला काही रक्कम देतो उरलेली रक्कम ठराविक हप्त्यात फेडण्याचा करार करतो आणि वस्तू वापरासाठी घेऊन जातो.
- हप्ता खरेदी योजनेत ग्राहक काही रक्कम जादा देतो. ही जादा रक्कम म्हणजे ग्राहक देत असलेल्या हप्त्याच्या रकमेवरील व्याज होय.
- हप्ता खरेदी योजनेत ग्राहकाचा हप्ता देण्यासाठी पैसे साठवावे लागतात. त्यामुळे त्याला बचतीची सवय लागते.
- एक रकमी पैसे देऊन वस्तू खरेदी करताना वस्तूची जी किंमत असते, त्या किंमतीस वस्तूची रोख किंमत असे म्हणतात.
- हप्ते खरेदीने वस्तू घेताना जे पैसे द्यावे लागतात त्याला सुरवातीची रक्कम असे म्हणतात.
- हप्ता खरेदी योजनेत ठराविक कालावधीत जी रक्कम दिली जाते. त्या रकमेस हप्ता असे म्हणतात.

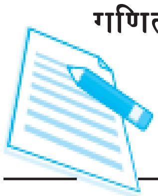
संकीर्ण प्रश्नसंग्रह

1) एक शिलाई यंत्र रोखीने ₹2600 ला मिळते ते हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹1000 भरावे लागतात आणि त्यानंतर प्रत्येकी ₹550 चे तीन मासिक हप्ते द्यावे लागतात. तर या हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा.

2) एका टाईपरायटरची रोखीने किंमत ₹8000 आहे. अनिलने तो हप्त्याने घेताना सुरवातीला ₹3200 भरले आणि त्यानंतर ₹1000 चे पाच मासिक हप्ते भरले तर या हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा.

3) एका टेबलाची रोख किंमत ₹2000 आहे. ते हप्त्याने घेतले असता सुरवातीला ₹500 भरावे लागतात व उरलेली रक्कम ₹400 या चार समान हप्त्याने फेडता येते. तर या हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा.

4) एका टी.व्ही ची रोख किंमत ₹7500 आहे. तो हप्त्याने घेतला असता सुरवातीला ₹2000 भरावे लागतात आणि त्यानंतर ₹1000 चे सहा समान मासिक हप्ते भरावे लागतात. तर या हप्ता योजनेतील व्याज दर काढा.



5) एका वस्तूची रोख किंमत ₹ 7000 आहे ती वस्तू हप्त्याने घेतली असता सुरवातीला ₹ 1900 भरावे लागतात आणि त्यानंतर सहा समान मासिक हप्ते भरावे लागतात. जर व्याजदर दरमहा दर शेकडा 2 ½ असेल तर प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढा.

6) एक वस्तूची रोख किंमत ₹ 1000 आहे ती वस्तू हप्त्याने घेतली असता सुरवातीला ₹ 650 भरावे लागतात आणि त्यानंतर 5 समान मासिक हप्ते भरावे लागतात. जर व्याजदर दसादशे 18 असेल तर प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढा.

7) कपडे धुण्याच्या एका यंत्राची किंमत ₹ 14000 आहे. ते यंत्र हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 7200 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम दरमहा ₹ 1400 देऊन फेडावी लागते. व्याजदर दसादशे 12 असल्यास हप्त्यांची संख्या काढा.

8) एका स्कूटरची रोख किंमत ₹ 30,000 आहे. ती हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 15000 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम चार समान मासिक हप्त्यात फेडावी लागते. व्याजदर 33 $^{1}/_{3}$ % असल्यास प्रत्येक हप्त्याची रक्कम काढा.

9) एका प्लॉटची रोख किंमत ₹ 2,00,000 आहे. तो हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 1,00,000 भरावे लागतात आणि त्यानंतर प्रत्येकी ₹ 21,000 चे पाच मासिक हप्ते भरावे लागता. तर या हप्त्यायोजनेतील व्याजदर काढा.

10) एका कपाटाची रोख किंमत ₹ 3575 आहे.ते हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 1600 द्यावे लागतात आणि प्रत्येकी ₹ 420 चे पाच समान हप्ते भरावे लागतात तर या हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा.

11) एका घडयाळाची रोख किंमत ₹ 1000 आहे ते हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 300 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम 5 समान मासिक हप्त्याने फेडावी लागते. व्याजदर 18% असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

12) एका संगणकाची रोख किंमत ₹ 34,000 आहे. तो हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 20,000 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम 5 समान मासिक हप्त्याने फेडावी लागते. व्याजदर 30 % असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

13) कपडे धुण्याच्या यंत्राची रोख किंमत ₹ 15,000 आहे. परंतु रिटाने ते हप्त्याने घेतले. त्यासाठी तिने सुरवातीला ₹ 4000 भरले आणि उरलेली रक्कम चार समान मासिक हप्त्यात फेडली. व्याजदर 18% असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

14) एका पंख्याची रोख किंमत ₹ 970 आहे. तो हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 210 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम तीन समान मासिक हप्त्यात फेडावी लागते. व्याजदर 16% असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

15) एका घडयाळाची रोख किंमत ₹ 970 आहे ते हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 350 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम 3 समान मासिक हप्त्यात फेडावी लागते. व्याजदर 24% असल्यास मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

16) एका ग्राहकाने सुरवातीचा ₹ 2750 भरून DVD Player विकत घेतला. उरलेली रक्कम त्याने प्रत्येकी ₹ 331 चे अर्धवार्षिक 3 हप्ते भरून देण्याचे कबूल केले. चक्रवाढ व्याज आकारणी अर्ध वार्षिक असून व्याजदर 20% असल्यास DVD Player ची रोख किंमत काढा.

17) एका सदनिकेची रोख किंमत ₹ 2,00,000 आहे. ती हप्त्याने घ्यावयाची झाल्यास सुरवातीला ₹ 67,600 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम 3 समान अर्धवार्षिक हप्त्यात भरावी लागते. चक्रवाढव्याजाची आकारणी अर्धवार्षिक असून व्याजदर 20% आहे. तर हप्त्याची रक्कम काढा.

18) एका दुकानदाराने एक स्कूटर हप्त्या योजनेत विकली. त्यासाठी त्याने सुरवातीला ₹ 11,000 घेतले आणि उरलेल्या रकमेचे प्रत्येकी ₹ 6250 चे 2 मासिक हप्ते घेतले. चक्रवाढव्याजाची आकारणी वार्षिक असून व्याजदर 25% असल्यास स्कूटरची रोखीची किंमत काढा.

19) एका संगणकाची रोख किंमत ₹ 78600 आहे. तो हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 25, 640 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम 3 समान तिमाही हप्त्यात फेडावी लागते. चक्रवाढ व्याजाची आकारणी तिमाही असून व्याजदर 20% असल्यास प्रत्येक मासिक हप्त्याची रक्कम काढा.

20) एक बांधकाम व्यावसायिक एक सदनिका रोखीने ₹ 30,00,000 ला विकतो. ती हप्त्याने घ्यावयाची असल्यास सुरवातीला ₹ 10,31,600 भरावे लागतात आणि उरलेली रक्कम तीन समान तिमाही हप्त्यात फेडावी लागते. चक्रवाढव्याजाची आकारणी तिमाही असून व्याजदर 10% आहे. तर तिमाही हप्त्याची रक्कम काढा. तसेच एकूण किती व्याज द्यावे लागले, तोही काढा.

आपली प्रगती तपासा – उत्तरे

9.1

(1) 42.87 (2) $44\frac{4}{9}$ (3) $21\frac{1}{19}$ (4) $17\frac{1}{7}$ % (5) 4.69%

(6) 51.1% (7) 47.06%

9.2

(1) ₹ 4000 (2) $\frac{200}{9}$ (3) ₹ 775.77 (4) ₹ 1934.55

(5) ₹ 77.6 अंदाजे

9.3

(1) ₹ 1150 (2) ₹ 10,000 (3) ₹ 2500 (4) ₹ 970 (5) ₹ 3580

9.4

(1) ₹ 463.05 (2) ₹ 7290 (3) ₹ 30,000, ₹ 1976.50 (4) ₹ 25,000

(5) ₹ 7,000

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह – उत्तरे

(1) $19\frac{1}{21}\%$ (2) $17\frac{1}{7}\%$ (3) $33\frac{1}{3}\%$ (4) $33\frac{1}{3}\%$

(5) ₹ 920 (6) ₹ 63.35 (7) 5 (8) ₹ 4000

(9) 20.7% (10) 26.43% (11) ₹ 146.12 (12) ₹ 3000

(13) ₹ 2850.86 (14) ₹ 366 (अंदाजे)

(15) ₹ 220 (16) ₹ 6060 (17) ₹ 53, 240 (18) ₹ 20,000

(19) ₹ 19,448 (20) ₹ 6,89, 810, ₹ 99230

❖ ❖ ❖

माध्यमिक अभ्यासक्रम
गणित

सराव परीक्षा - व्यावसायिक गणित

एकूण गुण 25 | **वेळ = 45 मिनिटे**

सूचना

(1) सर्व प्रश्नांची उत्तरे उत्तरपत्रिकेत लिहा.

(2) आपल्या उत्तरपत्रिकेवर पुढील माहिती भरा.

नाव ____________________

नोंदणी क्रमांक ____________________

घटक ____________________

घरचा पत्ता ____________________

(3) सराव परीक्षेची उत्तरपत्रिका आपल्या अभ्यास केंद्रामधील विषय शिक्षकांकडून तपासून घ्या. विषय शिक्षकांकडून तपासून घ्या. विषय शिक्षकांकडून आपल्याला अभ्यासविषयक उपयुक्त सूचना मिळतील.

सराव परीक्षेच्या उत्तर पत्रिका NIOS कार्यालयाकडे पाठवू नका.

(1) एक बॅग ₹660 ला विकल्याने दुकानदाराला 10% नफा होतो. तर बॅगेची खरेदी किंमत ₹............... .

(A) 625 (B) 600

(C) 575 (D) 550 (1)

(2) छापील किंमतीवर 10% सूट दिल्यानंतर ग्राहक तो रेडिओ ₹5400 ला खरेदी करतो म्हणून रेडिओची छापील किंमत ₹......... .

(A) ₹5050 (B) ₹5800

(C) ₹5950 (D) ₹6000 (1)

(3) एका पुस्तकाची छापील किंमत ₹ 300 आहे. विद्यार्थी पुस्तक ₹ 234 ला खरेदी करतो म्हणून विद्यार्थ्याला दिलेली शेकडा सूट ....

(A) 25 (B) 24

(C) 22 (D) 20 (1)

(4) 35 सेंमीचे 2 मीटरशी असणारे गुणोत्तर ....

(A) 35:2 (B) 35:200

(C) 7:40 (D) 40:7 (1)

(5) दसादशे 10 दराने ₹ 2000 मुद्दलाच्या 2 वर्षाच्या सरळव्याज आणि चक्रवाढ व्याज यामधील फरक ....

(A) ₹ 20 (B) ₹ 200

(C) ₹ 400 (D) ₹ 0 (1)

(6) जर 20:k::25:450 तर k ची किंमत काढा. (2)

(7) जर 120 ही संख्या घटवून 96 केली, तर तिच्या किंमतीत किती टक्के घट झाली? (2)

(8) जर 15 वस्तूची खरेदी किंमत 12 वस्तूंच्या विक्री किंमतीबरोबर असेल, तर या व्यवहारात किती टक्के नफा किंवा तोटा झाला ? (2)

(9) 10 %, 15% आणि 20 % या रक्कम सूट प्रणालीची एकत्रित सूट रक्कम सांगा. (2)

(10) चक्रवाढव्याजाची आकारणी तिमाही असताना दसादशे 8 दराने सहा महिन्यात एका रकमेची रास ₹ 26010 होते. तर ती रक्कम काढा ? (2)

(11) एक शिलाई यंत्र रोखीने ₹ 2600 ला मिळते. ते हप्त्याने घेतल्यास सुरवातीला ₹ 1000 भरावे लागतात आणि त्यानंतर प्रत्येकी ₹ 550 चे तीन मासिक हप्ते द्यावे लागतात. तर या हप्ता योजनेतील व्याजदर काढा. (4)

(12) एका महिन्यात झाडाची उंची 2% वाढते. जानेवारी 2010 च्या सुरवातीला झाडाची उंची 1.5 मीटर्स असल्यास एप्रिल 2010 च्या शेवटी झाडाची उंची किती असेल, ते काढा. (4)

गणित
माध्यमिक स्तरासाठी अभ्यासक्रम

वैचारिक पार्श्वभूमी

गणित ही माध्यमिक स्तरावरील अध्यायनाची फार महत्त्वाची ज्ञानशाखा आहे. या विषयाच्या अभ्यासाने आणि वापराने माणसाला परिचिर्तअपरिचित अशा कोणत्याही परिस्थितीत निर्णय घेण्याची क्षमता प्राप्त होते. अचूकता, सुसंगत, विश्लेषणात्मक, तर्कशुद्ध विचारसरणी, शास्त्रीय दृष्टीकोन यांचा विकास होण्यास प्रामुख्याने मदत होते. आजुबाजूच्या घटनांमधून येणाऱ्या अनुभवांचे गणिती रुपांतर (quantification of experiences) करण्याचे कौशल्य मनावर बिंबणे, हे माध्यमिक स्तरावील गणिताध्यापनाचे एक महत्त्वाचे आणि मूलभूत उद्दिष्ट आहे. विद्यार्थ्याला दैनंदिन जीवनातील अनेक प्रश्न सोडविण्यास गणिताची मदत होते. व्यापार, बँकेचे व्यवहार, विक्रीकर, सूट ही अशी काही क्षेत्रे होत. तसेच माहितीची मांडणी सारणीच्या किंवा आलेखाच्या रुपात करण्याचे, त्यावरून निष्कर्ष काढण्याचे कौशल्य आत्मसात करण्यास गणिताच्या अभ्यासाची मदत होते.

ाणित ज्ञानाच्या विकासाचा इतिहास विद्यार्थ्यांना माहित असावा अशी अपेक्षा आहे. म्हणून 'शून्य संख्येची संकल्पना' हिंदू अरेबिक या नावाने प्रसिद्ध असलेली आणि सर्व देशांमध्ये वापरली जाणारी दशमान संख्यालेखन पद्धती या भारतीय गणिताच्या अभिमानास्पद कामगिरीची माहिती अभ्यासक्रमात दिली आहे. याशिवाय विद्यार्थ्यांनी वैदिक गणिताचा अभ्यास करून आकडेमोडीचे कौशल्य वाढवावे, असे सूचवावेसे वाटते.

उद्दिष्टे :

माध्यमिक स्तरावर गणिताचे अद्ययन केल्याने विद्यार्थ्याच्या दृष्टीने खालील उद्दिष्टे साध्य होतील.

- गणितीय संज्ञा, संकल्पना, चिन्हे, तत्त्वे, प्रमेये आणि प्रक्रिया यांचे ज्ञान आणि आकलन होईल.
- व्यवहारात नेहमी लागणाऱ्या मोजप्रक्रिया पार पाडण्याचे कौशल्य निर्माण होईल व त्याचा रोजच्या जीवनात वापर करता येईल.
- भौगोलिक आकृत्या काढण्याचे कौशल्य प्राप्त होईल. दिलेली माहिती आलेख, तक्ता याच्या साहाय्याने सादर करता येईल.
- आलेख किंवा तक्त्यामध्ये (चित्ररूपाने) दाखविलेल्या माह्तिीचे गणिती भाषेत विवरण करता येईल.
- दिलेली गणितीय माहिती तर्कसंगत पद्धतीने मांडता येईल आणि त्यावरून निष्कर्ष काढता येईल.
- शाब्दिक उदाहरणांचे रुपांतर संख्यागणितामध्ये करता येईल व ही उदाहरणे सोडविता येतील.
- गणित विषयाच्या विस्तारीत रुपातील प्रगतीमध्ये भारतीय गणिततज्ञांच्या योगदानाची माहिती घेता येईल.
- गणित या विषयाची गोडी निर्माण करता येईल. वाढविता येईल.

पाठ्यक्रमाचा तपशील

गणित विषयाचा अभ्यासक्रम सहा भागात विभागलेला आहे. १) बीजगणित, २) व्यावसायिक गणित, ३) भूमिती, ४) महत्वमापन, ५) त्रिकोणमिती, ६) संख्याशास्त्र

प्रत्येक विभागाचे नाव, पाठसंख्या, अद्यापनकालावधि आणि गुण खालील तक्त्यात दिले आहेत.

	विभागाचे नाव	पाठ संख्या	अद्यापन कालावधि (घड्याळी तास)	गुण
१	बीजगणित	०७	५५	२०
२	व्यावसायिक गणित	०२	२५	०८
३	भूमिती	१०	७५	२५
४	महत्त्वमापन	०२	२५	१०
५	त्रिकोणमिती	०२	२५	१०
६	संख्याशास्त्र	०३	३५	१२
	बेरीज	२६	२४०	८५
	प्रात्यक्षिक			१५
	एकूण बेरीज	**१००**		

विद्यार्थ्याने एकूण तीन गृहपाठ करावयाचे आहेत. गृहपाठांना मिळालेली श्रेणी गुणपत्रिकेमध्ये वेगळी दाखविली जाईल.

प्रत्येक विभागाचे तपशीलवार वर्णन

विभाग १ ´ बीजगणित

अध्ययनकाल ´ ५५ तास गुण ´ २०

व्याप्ती आणि अध्यापनाची दिशा :

अंकगणिताचे सामान्य रूप म्हणजे बीजगणित होय. अंकगणितामधील व्यक्त संख्यांऐवजी आपण बीजगणितातील अव्यक्त संख्या वापरणार आहोत. या अव्यक्त संख्या सामान्यपणे व्यक्त संख्यांसाठीच वापरलेल्या असतात. नैसर्गिक संख्यांशिवाय मोजण्याची क्रियाच होऊ शकत नाही. म्हणून संख्यांच्या अभ्यासाची सुरवात नैसर्गिक संख्यांपासूनच होते, हे लक्षात घ्या. नैसर्गिक संख्या प्रणालीचा विस्तार परिमेय संख्याप्रणालीपर्यंत केला गेला आहे.

कोणतेही अंतर दिलेल्या एककात मोजणे शक्य व्हावे म्हणून परिमेय संख्याप्रणाली पुढे वाढवून वास्तवसंख्या प्रणाली निर्माण केली गेली. एखाद्या संख्येचा पुन्हा पुन्हा करावा लागणारा गुणाकार प्रत्यक्ष गुणनक्रिया न करता मांडणे सोपे व्हावे म्हणून घात आणि घातांक या संकल्पनांचा उदय झाला.

अव्यक्तावरील चार मूलभूत क्रियांचा वापर करून बैजिक राशी आणि बहुपदी यांची ओळख करून देता येईल. बहुपदींची समानता मांडण्याच्या संकल्पनेवरूनच समीकरण ही संकल्पना अस्तित्वात आली.

रेषीय समीकरणे आणि वर्गसमीकरणे हा भाग दैनंदिन व्यवहारातील समस्या सोडविण्यासाठी उपयोगी पडेल. अंकगणित श्रेणी हा संख्यांचा विशेष प्रकारचा आकृतिबंध आहे. रोजच्या व्यवहारातील उदाहरणे देऊन या भागात सखोल अभ्यास अपेक्षित आहे.

१.१ संख्याप्रणाली

नैसर्गिक संख्या, पूर्णांक संख्या, परिमेय संख्या यांची उजळणी. सान्त किंवा अनंत आवर्ती दशांश रूप हे परिमेय संख्यांचे रूप. अपरिमेय संख्याची अनंत अनावर्ती दशांश अपूर्णांक या रूपात ओळख. परिमेय आणि अपरिमेय संख्या यांच्या एकत्रीकरणाने वास्तव संख्यांचा संच.

संख्याबरोवर $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ अशा संख्या दर्शविणे, परिमेय आणि अपरिमेय संख्यांवर क्रिया.

१.२ घातांक आणि करणी

संख्येची घातरूपात मांडणी, घातांकाचा अर्थ, घातांकाचे नियम आणि त्याचे उपयोजन

करणीचा अर्थ, करणीची कोटी आणि जिचे मूळ काढावयाची आहे ती संख्या, करणीचे नियम, करणीचे सोपे रूप, $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ आणि $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ या स्वरूपात असलेल्या करणीच्या छेदाचे परिमेयीकरण करणे. (या ठिकाणी x आणि y या नैसर्गिक संख्या व a आणि b या पूर्णांक संख्या आहेत.) करणीस्थ संख्यांना सोपे रूप देणे.

१.३ बैजिक राशी आणि बहुपदी

चल या संकल्पनेची ओळख बैजिक राशी आणि बहुपदी, बैजिक राशी आणि बहुपदी या वरील क्रिया, बहुपतीची कोटी, बैजिक राशीची किंमत, बैजिक राशीची शून्य किंमत.

१.४ विशेष प्रकारचे गुणाकार आणि अवयव पाडणे

$(a \pm b)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a \pm b)^3$ व $(a + x)(b + x)$ असे विशेष विस्तार आणि त्यांचे संख्यांचे वर्ग व घन काढण्यासाठी उपयोजन.

बैजिक राशीचे अवयव $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$, या रूपातील राशींचे अवयव $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ या रूपातील बहुपदीचे मधल्या पदाची फोड करून अवयव

एकाच चलातील दोन बहुपदीचे अवयव पद्धतीने म.सा.वि. आणि ल.सा.वि. गुणोत्तरीय राशी;

गुणोत्तरीय राशीचे सोपे रूप, गुणोत्तरीय राशीवरील क्रिया

१.५ रेषीय समीकरणे

एक आणि दोन चलांतील रेषीय समीकरणे, एका चलातील रेषीय समीकरणाची उकल.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणांची प्रणाली, दोन चलांतील रेषीय समीकरणांचा आलेख, दोन चलांतील समीकरण प्रणालीची उकल (आलेख आणि बैजिक पद्धत) एका किंवा दोन चलांतील रेषीय समीकरण आधारीत शाब्दिक प्रश्न.

१.६ वर्गसमीकरणे :

वर्ग समीकरणाचे प्रमाण रूप $ax^2 + bx + c = 0$ (a) $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ या समीकरणांची (१) अवयव पद्धतीने (२) वर्गीय

सूत्राने उकल, उकली दिल्या असता वर्गसमीकरण काढणे. शाब्दिक प्रश्न सोडविण्यासाठी वर्ग समीकरणांचे उपयोजन.

१.७ अंकगणित श्रेणी

अंकगणित श्रेणी हा संख्यांचा विशिष्ट प्रकारचा आकृतीबंध.

अंकगणित श्रेणीचे 'n' वे पद आणि 'n' पदांची बेरीज काढणे.

विभाग २ ः व्यावसायिक गणित

अध्ययन कालावधी : २५ तास गुण : ०८

व्याप्ती व अध्यापनाची दिशा

माध्यमिक स्तरावरील परीक्षा उत्तीर्ण झाल्यावर काही विद्यार्थी बँका, व्यापरी संकुले, विमा कंपन्या इत्यादीत काम करतील. त्यांच्या योगे विद्यार्थ्यांचा संबंध विक्रीकर, आयकर, अबकारी कर इत्यादी आर्थिक व्यवहारांशी येईल. काही जण कारखानदारीत काम करतील तर काही जण स्वत:चा व्यवसाय सुरू करतील. काही उच्च शिक्षणाकडे वळतील. या सर्वांनाच आर्थिक व्यवहाराशी संबंधित असलेल्या गणिताची गरज पडेल. काहीही झाले तरी प्रत्येक नागरीकाचा संबंध गुंतवणूक, व्याज, वस्तुखरेदी इत्यादींशी येतोच. हे संदर्भ समोर ठेवून अध्यापनाची दिशा ठरवावी.

या विभागात चक्रवाढ व्याजाच्या सूत्राचा उपयोग वाढीचा दर (appreciation) आणि घसारा (depreciation) काढण्यासाठी दिला आहे. या सर्वच बाबींशी संबंधित प्रश्न सोडविण्यासाठी सम आणि व्यस्त प्रमाण (चलन) आणि शतमान या मूलभूत संकल्पनाची गरज पडणार आहे.

२.१ शतमान आणि त्याचे उपयोजन

शातमान ही संकल्पना, शतमानाचे दशांश अपूर्णांकात आणि दशांश अपूर्णांकाचे शतमानात रुपांतर, शतमानाचा संबंध असणाऱ्या किंमती काढणेशतमानाचे उपयोजन (१) नफातोटा (२) सरळव्याज (३) सूट (४) विक्रीकर (५) दलाली (६) हप्त्याने खरेदी

२.२ हप्तेबंदीने खरेदी

हप्तेबंदीने खरेदी प्रक्रिया

हप्तेबंदीने खरेदी केली असता (प्रत्येक महिन्याचे) व्याज काढणे (फक्त सहा मासिक हप्त्यांपर्यंत)

विभाग ३ ः भूमिती

अध्ययन कालावधी : ७५ तास गुण : २५

व्याप्ती व अध्यापनाची दिशा

विद्यार्थ्याला त्याच्या सभोवती कोपरे, कडा, टेबलाचा पृष्ठभाग, कडी व बांगड्यासारख्या वर्तुळाकार वस्तु दिसतात. फोटोच्या निगेटिव्ह वरून तयार केलेले लहानमोठ्या आकाराचे फोटो तो पाहतो. या सर्वांमधून भूमिती या विषयांसंबंधी काहीसे कुतुहल त्याच्या मनात निर्माण होते.

या कुतुहलाचे शमन करून त्याच ज्ञानात वृद्धी करण्याच्या उद्देशाने या विभागात रेषा व कोन, एकरूप व समरूप त्रिकोण, वर्तुळे या पाठ्यांशांचा समावेश केला आहे. यासंबंधी काही गुणधर्म पडताळून पाहिले जातील. तर काहींची तर्कशुद्ध सिद्धता देण्यात येईल. विविध चौकोन व त्यांची क्षेत्रफळे या पाठात चौकोनांच्या प्रकारांची ओळख करून दिली जाईल.

भौमितीक साधनांचा वापर करून काही आकृत्या काढण्याचा सराव विद्यार्थ्यांना दिला जाईल. रेषीय समीकरणांचे आलेख काढणे सुकर व्हावे म्हणून निर्देशक भूमितीची संकल्पना या विभागात समाविष्ट केली आहे.

टीप : फक्त अशी खूण केलेल्या प्रमेयांच्या सिद्धता परीक्षेत विचारण्यात येतील. तसेच या आणि खूण नसलेल्या प्रमेयावर आधारित उदाहरणे (riders) विचारली जातील. तसेच खूण नसलेल्या प्रमेयांवर थेट संख्यात्मक प्रश्नही (numerical examples) विचारले जातील.

३.१ रेषा व कोन

मुलभूत भौमितिक संकल्पना, बिंदू, रेषा, प्रतल, प्रतलातील समांतर रेषा व परस्परांना छेदणाऱ्या रेषा. छेदिकेने दोन किंवा अधिक रेषांशी केलेले कोन एखाद्या रेषेवर उभ्या असणाऱ्या एखाद्या किरणामुळे तयार होणाऱ्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज १८०° असते.

दोन रेषा छेदल्यामुळे तयार होणारे विरुद्ध कोन समान असतात. दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदल्यामुळे तयार होणारे संगत कोनसमान असतात.

दोन समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणारे,

(a) व्युंत्क्रम कोन समान असतात.

(b) छेदिकेच्या एकाच अंगाचे आंतर कोन पूरक असतात.

दोन रेषांच्या छेदिकेमुळे होणारे

(a) व्युत्क्रम कोन समान असतील, तर त्या रेषा समांतर असतात.

(b) एकाच अंगाचे आंतरकोन पूरक असतील तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.

त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज १८०° असते.

त्रिकोणाचा बाह्य कोन त्याच्या आंतरविरुद्ध कोनांच्या बेरजे एवढा असतो.

बिंदूपथाची संकल्पना (दैनंदिन व्यवहारातील उदाहरणे देण्यास हरकत नाही.)

(a) दिलेल्या दोन बिंदूपासून (b) दिलेल्या दोन छेदणाऱ्या रेषांपासून समान अंतरावर असणाऱ्या बिंदूचा पथ

३.२ त्रिकोणांची एकरूपता

दैनंदिन व्यवहारातील अनुभवातून एकरूपतेची संकल्पना. एकरूप आकृत्या, त्रिकोणांच्या एकरुपतेच्या बाँबाँबा, बाँकोंबा, कोंबाँको आणि कर्णभूजा या कसोट्या.

- त्रिकोणाच्या समान बाजूसमोरील कोन समान असतात.
- त्रिकोणाच्या समान कोनासमोरील बाजू समान असतात.
- त्रिकोणाच्या दोन बाजू असमान असतील तर मोठ्या बाजूसमोरील कोन लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा मोठा असतो त्रिकोणाच्या मोठ्या कोनासमोरची बाजू मोठी असते.

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षा जास्त असते.

३.३ एकसंपाती रेषा

एकसंपाती रेषांची संकल्पना

त्रिकोणाच्या कोनांचे दुभाजक एकसंपाती असतात.

त्रिकोणांच्या बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती असतात.

त्रिकोणाचे शिरोलंब एकसंपाती असतात.

त्रिकोणाच्या मध्यगा एकसंपाती असतात; संपात बिंदुमुळे प्रत्येक मध्यगा २:१ या प्रमाणात विभागली जाते.

३.४ चौकोन

चौकोन आणि त्याचे प्रकार

विशिष्ट चौकोन व त्यांचे गुणधर्म, समलंब चौकोन, समांतर भुज चौकोन, समभुज चौकोन, आयत, चौरस, त्रिकोणांच्या दोन बाजूंचे मध्य जोडणारी रेषा तिसऱ्या बाजूला समांतर असते आणि तिसऱ्या बाजूच्या निम्मी असते.

त्रिकोणाच्या एका बाजूंच्या मध्यातून दुसऱ्या बाजूला समांतर काढलेली रेषा तिसऱ्या बाजूला दुभागते. तीन किंवा अधिक समांतर रेषांनी एका छेदिकेवर केलेले आंतरछेद एकरूप असतील तर त्या रेषांनी दुसऱ्या कोणत्याही छेदिकेवर केलेले आंतरछेद एकरूप असतात. समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण त्याचे दोन समक्षेत्र त्रिकोणांत विभाजन करतो.

एकाच किंवा समान पायावर असलेले समांतर रेषांच्या एकाच जोडीतील समांतरभुज चौकोन समक्षेत्र असतात. एकाच किंवा समान पायांवर असलेले समांतर रेषांच्या एकाच जोडीतील त्रिकोण समक्षेत्र असतात. समान पाया आणि समान क्षेत्रफळे असणाऱ्या त्रिकोणांच्या संगत उंची समान असतात.

३.५ त्रिकोणांची समरूपता

समरूप आकृत्या, समरूपतेची भूमितीय संकल्पना, प्रमाणाचे मुलभूत प्रमेय आणि त्याचा व्यत्यास. त्रिकोणाच्या एका बाजूला समांतर काढलेल्या रेषेमुळे त्याच्या उरलेल्या बाजू समान गुणोत्तरात विभागल्या जातात. एखादी रेषा त्रिकोणाच्या दोन बाजूना समान गुणोत्तरात विभागत असेल तर ती रेषा तिसऱ्या बाजूला समांतर असते.

दोन त्रिकोणांच्या समरुपतेच्या कोंकोंको, बाँबाँबा आणि बाँकोंबा कसोट्या.

काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावर काढलेल्या शिरोलंबामुळे त्याच्या प्रत्येक बाजूला तयार होणारे दोन त्रिकोण हे मुळच्या त्रिकोणाशी आणि परस्परांशी समरूप असतात. त्रिकोणाच्या आंतरकोनाचा दुभाजक समोरील बाजूला तो कोन समाविष्ट करणाऱ्या बाजूंच्या प्रमाणात विभागतो. दोन समरूप त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर त्यांच्या संगत बाजूंच्या वर्गाच्या गुणोत्तराएवढे असते.

काटकोन त्रिकोणात कर्णावरील चौरस उरलेल्या दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेएवढा असतो. (बौधायनाचे किंवा पायथागोरसचे प्रमेय)

त्रिकोणाच्या एका बाजूवरील चौरस, त्याच्या उरलेल्या दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेएवढा असेल, तर त्या पहिल्या

बाजूसमोरचा कोन काटकोन असतो. (बौधायनाच्या किंवा पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास)

३.६ वर्तुळे

वर्तुळ आणि त्यासंबंधीच्या संकल्पनांच्या व्याख्या. एककेंद्री (समकेंद्री) वर्तुळे, एकरूप वर्तुळे

दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतील तर आणि तरच ती दोन वर्तुळे एकरूप असतात.

एका वर्तुळाचे (किंवा एकरूप वर्तुळांचे) दोन कंस केंद्राशी (किंवा केंद्रांशी) समान कोन करत असतील तर ते कंस एकरूप असतात आणि या विधानाचा व्यत्यास.

एका वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) कंसाच्या संगत जीवा एकरूप असतील तर ते कंस एकरूप असतात आणि या विधानाचा व्यत्यास.

एक वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) समान जीवा वर्तुळ केंद्राशी (किंवा केंद्राशी) समान कोन निश्चित करतात, आणि या विधानाचा व्यत्यास.

वर्तुळ केंद्रातून जीवेवर काढलेला लंब ती जीवा दुभागतो.

वर्तुळ केंद्र आणि जीवेचा मध्य यातून जाणारी रेषा त्या जीवेला लंब असते.

दिलेल्या तीन नैकरेषीय बिंदूतून जाणारे एक आणि एकच वर्तुळ असते.

एका वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप जीवा वर्तुळ केंद्रकापासून (किवा केंद्रांपासून) समान अंतरावर असतात, आणि या विधानाचा व्यत्यास.

३.७ वर्तुळातील कोन आणि चक्रीय कोन

वर्तुळकंसाने वर्तुळकेंद्राशी निश्चित केलेला कोन त्या कंसाने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागावरील कोणत्याही बिंदूशी निश्चित केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो.

एकाच वर्तुळ खंडातील कोन समान असतात.

अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन असतो.

चक्रीय बिंदू

चक्रीय चौकोनाच्या संमुख कोनांची बेरीज १८०° असते.

एखाद्या चौकोनाचे संमुख कोन पूरक असतील तर तो चौकोन चक्रीय असतो.

३.८ वृत्त छेदिका, स्पर्शिका आणि त्यांचे गुणधर्म

रेषा आणि वर्तुळ यांचा छेद, रेषा आणि वर्तुळ यांचा स्पर्शबिंदू

वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूशी असलेली स्पर्शिका ही त्या स्पर्श बिंदूतून काढलेल्या त्रिज्येला लंब असते.

वर्तुळाच्या बाह्य भागातील बिंदूतून त्या वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिका समान लांबीच्या असतात.

वर्तुळाच्या AB आणि CD या जीवा वर्तुळाच्या आंतरभागात किंवा बाह्य भागात x मध्ये छेदत असतील.

तर $PA \times PB = PC \times PD$

जर PAB ही वृत्त छेदिका वर्तुळाला A आणि B मध्ये छेदत असेल आणि PT ही स्पर्शिका वर्तुळाला T मध्ये स्पर्श करत असेल तर $PA \times PB = PT^2$

वर्तुळाच्या स्पर्शिकेच्या स्पर्शबिंदूतून काढलेल्या जीवेने त्या स्पर्शिकेशी केलेले कोन त्या जीवेने अनुक्रमे विरुद्ध वर्तुळ खंडात केलेल्या कोनाएवढे असतात.

३.९ रचना

दिलेल्या रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात आंतर विभाजन करणे.

दिलेल्या माहितीनुसार त्रिकोण रचना काढणे.

(a) दिलेली माहिती ः बाबाबा, बाकोबा, कोबाको काटकोन त्रिकोणाची एक बाजू व कर्ण

(b) परिमिती आणि पायालगतचे कोन.

(c) पाया, उरलेल्या बाजूंची बेरीज किंवा वजाबाकी, आणि पाया लगतचा एक कोन

(d) दिलेल्या त्रिकोणाप्रमाणे त्रिकोण काढणे.

स्पर्शिकांच्या रचना

(a) वर्तुळा बाहेरील दिलेल्या बिंदूतून

(b) वर्तुळ केंद्राचा उपयोग करून वर्तुळावरील बिंदूतून दिलेल्या त्रिकोणाचे आंतर वर्तुळ आणि परीवर्तुळ काढणे.

विभाग ४ ः महत्वमापन

अध्ययन काल : २५ तास **गुण : १०**

व्याप्ती व अध्यापनाची दिशा

या विभागात, दैनंदिन जीवनात उद्भवणारे पुढील प्रकारचे प्रश्न सोडविण्यास विद्यार्थ्यांना उद्युक्त करावे.

आयताकृती बागेभोवती काटेरी कुंपण घालण्यासाठी किती लांबीची तार लागेल, हे शोधणे.

एकमेकांशी काटकोन करणारे सिमेंटचे रस्ते तयार करण्यासाठी किती खर्च येईल?

दिलेली मापे असणाऱ्या खोलीच्या चारही भिंतीचे क्षेत्रफळ किती येईल?

आयताकृती टेबल तयार करण्यासाठी किती मापांची प्लायवूडची फळी लागेल?

प्रतलीच आकृत्यांच्या क्षेत्रफळांची सूत्रे पहिल्या पाठात शिकवावीत.

दुसऱ्या पाठात निरनिराळ्या घनाकृतींची (त्रिमिती आकृत्यांची) पृष्ठफळे आणि घनफळे यांची सूत्रे द्यावीत, त्यावर आधारलेले दैनंदिन अनुभवांवर आधारीत प्रश्न द्यावेत.

४.१ प्रतलीय आकृत्यांची क्षेत्रफळे

सरळ रेषांनी बंदिस्त असलेल्या प्रतलीय आकृत्या. चौरस, आयत, त्रिकोण, समलंब चौकोन, चौकोन, समांतरभूज चौकोन, समभूज चौकोन या आकृत्यांच्या परिमिती व क्षेत्रफळे

हीरोचे सूत्र वापरून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ, आयताकार रस्त्याचे क्षेत्रफळ

वरील सर्वांवर आधारित सोपे प्रश्न

वक्ररेषांनी बंदिस्त असलेल्या प्रतलीय आकृत्या. वर्तुळाचा परीघ व क्षेत्रफळ

वर्तुळाची परिमिती व क्षेत्रफळ

वर्तुळाकार रस्त्याचे क्षेत्रफळ

वरील सर्वांवर आधारित सोपे प्रश्न

४.२ घनाकृतींचे पृष्ठफळ आणि घनफळ

घन, इष्टिकाचिती, वृत्तचिती (दंडगोल), शंकू, गोल आणि अर्धगोल या घनाकृतींचे पृष्ठफळ आणि घनफळ (प्रश्नांमध्ये दोन घनाकृतींचे एकत्रीकरण असू नये.)

खोलीच्या चारही भिंतीचे क्षेत्रफळ

विभाग ५ ँ त्रिकोणमिती

अध्ययन कालावधी : २५ तास **गुण : १०**

व्याप्ती व अध्यापनाची दिशा :

विविध अवकाशीय गोलांचे मार्ग, त्यांची स्थाने यांचे भाकित करण्यासंबंधीचे प्रश्न खगोलशास्त्रात सामोरे येतात. या प्रश्नांचे स्वरूप त्रिकोणांचे काही कोन व बाजू दिल्या असता उरलेल्या कोन व बाजू काढणे. या प्रश्नांच्या स्वरूपासारखेच असते. अशा प्रश्नांच्या उकलींचे उपयोजन अभियांत्रिकी आणि भौगोलिक मोजणी (survey) करणे, समुद्रावरील किंवा अवकाशातील प्रवास (navigations) अशा वेगवेगळ्या क्षेत्रात असते. या विभागात अशा प्रश्नांच्या उकलींचा प्रयत्न आहे. काटकोन त्रिकोणांच्या बाजूची, कोनांसापेक्ष असणाऱ्या गुणोत्तरांच्या आधारे असे प्रश्न सोडविता येतात. या गुणोत्तरांना त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे म्हणतात. एक त्रिकोणमितीय गुणोत्तर माहित असेल तर उरलेली गुणोत्तरे या विभागाच्या अभ्यासाने विद्यार्थी काढू शकतील. तशीच प्रसिद्ध अशी त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे तो सिद्ध करू शकेल आणि त्यांच्या आधारे विविध प्रश्न सोडवू शकेल.

साध्य (accessible) असणाऱ्या बाबींची उंची, अंतरे यांचे मापन (उदाहरणार्थ खांबाची उंची, घरांची उंची इ.) आणि असाध्य (inaccessible) बाबींची उंची, अंतरे (उदाहणार्थ टेकडीचा माथा, पूल नसलेल्या नदीच्या दुसऱ्या तीरावरील दिव्याच्या खांबाची उंची, अवकाशीय गोल इ.) यांचे मापन ही नित्याची गरज आहे. या विभागात विद्यार्थ्यांना अध:कोन आणि उन्नतकोन यांतील फरक समजेल. त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या सहाय्याने दैनंदिन जीवनातील उंची व अंतरे यासंबंधीचे प्रश्न विद्यार्थी सोडवू शकतील. (अशा प्रश्नांत दोनपेक्षा अधिक काटकोनाचा अंतर्भाव असू नये.)

५.१ त्रिकोणमितीची ओळख

काटकोन त्रिकोणाच्या लघुकोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांतील परस्पर संबंध

त्रिकोणमितीय नित्य समीकरणे

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \operatorname{cost}^2\theta$

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे आणि नित्यसमीकरणे यांवर आधारित प्रश्न

५.२ काही विशिष्ट कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

३0°, ४५° आणि ६0° कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तर (ही गुणोत्तरे भूमितीय पद्धतीने सिद्ध करावीत.) कोटीकोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे

उंची व अंतरे यांवरील प्रश्न सोडविण्यासाठी त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचे उपयोजन (या प्रश्नांत दोन पेक्षा अधिक काटकोनांचा समावेश असू नये.)

विभाग ६ ' सांख्यिकी

अध्ययन कालावधी : ३५ तास गुण : १२

फार पूर्वीच्या काळापासून जमाखर्च, अन्य साधने अशा वीबंच्या नोंदी ठेवण्याची प्रथा चालत आली आहे. विद्यार्थी या विभागात अशा नोंदी आटोपशीरपणे ठेवण्याच्या पद्धती, उपलब्ध नोंदीमधून आवश्यक ती माहिती जमा करणे या बावी शिकेल. त्यासाठी सांख्यिक माहिती आणि तिची मांडणी या अभ्यासावर आधारीत पाठ समाविष्ट केला आहे.

निरनिराळ्या सारण्या, आलेख, तक्ते, अशा स्वरूपात दिलेली अर्थव्यवस्था, जाहिराती, इत्यादींसंबंधीची माहिती आपल्या पाहण्यात येते. ती आपल्या नजरेत भरते. ही माहिती वाचता यावी, समजावी, यासाठी माहितीचा आलेख रुपात मांडणी या आशयाचा पाठ समाविष्ट केला आहे.

काही वेळा उपलब्ध माहिती अंकगणित रुपात वर्णन करून सांगावी लागते. उदाहरणार्थ, एखाद्या गटाचे सरासरी वय, एखाद्या गटाचे मध्यक (median) गुण, केलेल्या मापाच्या गळपट्टीचे (collal size) सदरे जास्तीत जास्त वापरले जातात, इत्यादी. अशी माहिती सांगता येण्यासाठी केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन या पाठाचा समावेश केला आहे. विद्यार्थ्यांना या मापनांची वैशिष्ट्ये आणि त्यांच्या मर्यादाही शिकविण्यात याव्यात.

आज पाऊस पडेल, भारत इंग्लंड विरुद्धचा सामना जिंकेल अशा वाक्यातून संभाव्यता व्यक्त होते. या विभागात विद्यार्थ्यांना प्राथमिक संभाव्यता हया अनिश्चिततेचे मापन करण्याची पद्धत सांगणाऱ्या या अभ्यासाची ओळख होईल. त्यासाठी नाणेफेक, फासा टाकणे, पिसलेल्या पत्त्यांमधून यादृच्छिक पत्ता काढणे अशा नशिबावर आधारीत खेळातील उदाहरणे वापरली जातील.

६.१ माहिती (data) आणि तिची मांडणी

सांख्यिकीची ओळख, सांख्यिकी आणि सांख्यिकीय माहिती प्राथमिक आणि (secondary) माहिती अवर्गीकृत (कच्ची) आणि वर्गीकृत माहिती. वर्गमध्य (class mark) वर्गांतर, वर्ग मर्यादा, खऱ्या वर्ग मर्यादा, वारंवारता, वारंवारता वितरणसारणी संचित वारंवारता, संचित वारंवारता सारणी.

६.२ केंद्रीय प्रवृत्तींचे मापन

अवर्गीकृत माहितीचे आणि वर्गीकृत माहितीचे मध्यमान ' (सरासरी mean) अवर्गीकृत माहितीचे मध्यक (median) आणि बहुलक (mode) मध्यमान आणि मध्यक यांचे गुणधर्म

६.३ संभाव्यतेची ओळख

एखादी घटना घडणाऱ्या संभाव्यतेचे मापन म्हणून प्राथमिक संभाव्यता यासंकल्पनेची ओळख (एकाच घटनेपुरती मर्यादित) नाणेफेक, फासा टाकणे, पिसलेल्या पत्त्यांमधून पत्ता काढणे इत्यादींवर आधारीत प्रश्न.

मूल्यमापन योजना		
मूल्यमापन पद्धती	**कालावधि**	**गुण**
लेखी वार्षिक परीक्षा	**२.३० तास**	**८५**
प्रात्यक्षिक	**१.३० तास**	**१५**
१) गणित कृती पुस्तिकेतील कोणतीही एक कृती परीक्षार्थीस करण्यास सांगावी. परीक्षार्थीने ती कृती प्रत्यक्ष करण्यासाठी आखणी करावी व आणखी वर हुकूम कृती करून परीक्षकांना सादर करावी. **१० गुण** २) या कृतीवर आधारित तोंडी परीक्षा **५ गुण**	स्वयंनिर्णित आवश्यक तेवढा	

गृहपाठामध्ये मिळालेली श्रेणी गुणपत्रिकेमध्ये वेगळी दाखविली जाईल.
ही श्रेणी एकूण परीक्षाश्रेणीमध्ये विचारात घेतली जाणार नाहीत.

Mukta Vidya Vani

Mukta Vidya Vani is a pioneering initiative of the National Institute of Open Schooling (NIOS) for using Streaming Audio for educational purposes. This application of ICT will enhance accessibility as well as quality of programme delivery of NIOS Programmes. This is a rare accomplishment of NIOS as the first Open and Distance Learning Institute to start a two way interaction with its learners, using streaming audio and the internet.

Keeping in mind the fact that the transmission is done through the web, the NIOS website (www.nios.ac.in) has a link that will take any user to the Mukta Vidya Vani. Mukta Vidya Vani thus enables a two way communication with any audience that has access to an internet connection, from the studio at its Headquarters in NOIDA, where NIOS has set up a state-of-art studio, which will be used for this purpose as well as for recording educational audio programmes meant for NIOS learners, though others can also take advantage of this facility.

Mukta Vidya Vani is a modern interactive, participatory and cost effective programme, involving an academic perspective along with the technical responsibilities of production of audio and video programmes, which are one of the most important components of the multi channel package offered by the NIOS. These programmes will attempt to present the topic/ theme in a simple, interesting and engaging manner, so that the learners get a clear understanding and insight into the subject matter.

NIOS has launched a scheme to motivate the learners to participate in the Mukta Vidya Vani by sending their Audio CD's to the respective regional centre on various subjects such as-

1. Poetry / Shloka recitation
2. Story telling
3. Radio Drama
4. Music
5. Talks on various topic related to the NIOS curriculum including Painting, Vocational Subjects etc.
6. Quiz
7. Mathematics puzzles etc.

The selected CD can be webcast on Mukta Vidya Vani and the winner participant be rewarded suitably.

Learners may visit the NIOS website and participate in live programmes from 2pm to 5pm on all week days and from 10.30am to 12.30pm on Saturdays, Sundays and all Public Holidays. The Subject Experts in the Studio will respond to their telephonic queries during this time. A weekly schedule of the programmes for webcast is available on the NIOS website. The Studio telephone number are 0120-4626949 and Toll Free No. 1800-180-2543.

Complete and Post the feedback form today

पहिली घडी

प्रतिसाद पाठ क्र. १ ते ९

पा. क्र.	पाठाचे नाव	पाठ्यांश				भाषा		चित्रे आकृत्या		आत्मसात केलेले ज्ञान		
		सोपा	अवघड	मनोरंजक	संदिग्ध	सोपी	अवघड	उपयोगी	निरुपयोगी	अतिशय उपयोगी	थोडे फार उपयोगी	निरुपयोगी
१												
२												
३												
४												
५												
६												
७												
८												
९												

शेवटची घडी व चिटकविणे

चौथी घडी

तिसरी घडी

विद्यार्थी मित्रांनो,

आपण या पुस्तकाचा अभ्यासपूर्ण केला आहे. आपला अभ्यासक्रम जीवनाशी निगडीत व मनाला समाधान देणारा असावा असा आमचा नेहमीच प्रयत्न असतो. पाठयपुस्तके तयार करणे ही द्विमार्गी प्रक्रिया आहे. पाठयपुस्तकांबाबतचा आपला प्रतिसाद अभ्यासविषयक सामग्रीत सुधारणा करताना उपयोगी पडणार आहे. आपल्या अभ्यासातील काही वेळ खर्च करून सोबतचा प्रतिसाद कृपया पूर्ण करा. त्याचा उपयोग उत्तम प्रकारचे अभ्यास साहित्य तयार करताना होईल.

कळावे,

अभ्यासक्रम समन्वयक

गणित

प्रश्नांवरील प्रतिसाद

पा. क्र.	पाठाचे नाव	पाठ्यांशावरील प्रश्न		सहामाही प्रश्न		
		उपयोगी	निरुपयोगी	सोपे	अवघड	अतिअवघड
१						
२						
३						
४						
५						
६						
७						
८						
९						

दुसरी घडी

आपल्या सूचना

____

____

____

____

आपण या विषयासाठी इतर पुस्तके वापरलीत का? होय / नाही

जर उत्तर होय असेल तर त्याची कारणे सांगा.

____

____

नावनोंदणी क्रमांक ____________________

पत्ता ____________________

____

विषय ____________________

पुस्तक क्र. ____________________

Postage Stamp

Course Coordinator,
Mathematics
National Institute of Open Schooling
A-24-25, Institutional Area
Sector-62, NOIDA (U.P.), Pin-201309

No Enclosures allowed