211hi02

2

घातांक तथा करणी

पिछले पाठ में आपने दो या दो से अधिक वास्तविक संख्याओं की गुणा के बारे में सीखा है। आप निम्न को बड़ी आसानी से लिख सकते हैं।

$$4 \times 4 \times 4 = 64, 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641 \text{ तथा}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$$

आप उस समस्या के विषय में सोचिए जब 13 को 15 बार गुणा किया जाना है। इसे

$$13 \times 13 \times 13 \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 15 \text{ बार}$$

रूप में लिखना कठिन है।

हम इस कठिनाई को घातांक संकेतन से परिचय कराकर सुलझायेंगे। इस पाठ में हम घातांक का अर्थ स्पष्ट करेंगे, घातांकों के नियमों को लिखकर सिद्ध करेंगे तथा उन नियमों का प्रयोग करना सीखेंगे। हम संयुक्त संख्याओं को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में प्रकट करेंगे।

इस पाठ के अगले भाग में हम संख्या $a^{1/q}$ को a के q वें मूल का नाम देंगे। हम आपका परिचय करणी, करणी धात से कराएंगे। हम करणी के नियमों के बारे में भी पढ़ेंगे तथा एक करणी का सरलतम रूप भी ज्ञात करेंगे। हम पद ''परिमेयकारी गुणक'' का अर्थ भी सीखेंगे तथा दी गई करणियों के हर का परिमेयकरण करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के पश्चात आप समर्थ हो जाएंगे कि:

- बार–बार आने वाले गुणन को घातांकीय संकेतन में लिख सकेंगे तथा उसका विलोम लिख सकेंगे;
- घातांकीय संकेतन में लिखी संख्याओं के आधार तथा घातांक की पहचान कर सकेंगे;
- प्राकृत संख्याओं को अभाज्य संख्याओं के अद्वितीय गुणनफल के रूप में लिख सकेंगे;

- घातांकों के नियमों को लिख सकेंगे;
- a^0, a^{-m} तथा $a^{\frac{p}{q}}$ के अर्थ की व्याख्या कर सकेंगे;
- घातांकों के नियमों का प्रयोग कर घातांकों वाले व्यंजकों को सरल कर सकेंगे;
- अपरिमेय संख्याओं के समूह में से करणियों को पहचान सकेंगे;
- करणी का करणीघात तथा करणीगत ज्ञात कर सकेंगे;
- करणियों के नियम लिख सकेंगे;
- एक दी गई करणी को उसके सरलतम रूप में लिख सकेंगे;
- सजातीय तथा विजातीय करणियों का वर्गीकरण कर सकेंगे;
- भिन्न करणीघात की करणियों को एक ही करणीघात की करणियों में बदल सकेंगे;
- करणियों पर चार मूलभूत संक्रियाएं कर सकेंगे;
- दी गई करणियों को उनके मान के अनुसार आरोही/अवरोही क्रम में लिख सकेंगे;
- एक दी गई करणी का परिमेयकारी गुणक ज्ञात कर सकेंगे;
- $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ तथा $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, प्रकार की करणियों के हर का परिमेयकरण कर सकेंगे जहाँ x तथा y प्राकृत संख्याएं हैं तथा a और b पूर्णांक हैं;
- करणी वाले व्यंजकों को सरल कर सकेंगे।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- अभाज्य संख्याएं
- संख्याओं पर चार मूलभूत संक्रियाएं
- परिमेय संख्याएं
- संख्याओं में क्रम संबंध

2.1 घातांकीय संकेतन

निम्न गुणनफलों पर विचार कीजिए:

(i) 7×7 (ii) $3 \times 3 \times 3$ (iii) $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

(i) में संख्या 7 को दो बार गुणा किया गया है, अतः 7×7 को 7^2 के रूप में लिखते हैं।

(ii) में संख्या 3 को तीन बार गुणा किया गया है, अतः $3 \times 3 \times 3$ को 3^3 के रूप में लिखते हैं।

(iii) में संख्या 6 को पांच बार गुणा किया गया है, अतः $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ को 6^5 के रूप में लिखते हैं।

7^2 को "7 की घात 2" या "7 की दूसरी घात" पढ़ते है। यहाँ, 7 आधार कहलाता है और 2 को घातांक (या घात) कहते हैं।

इसी प्रकार, 3^3 को "3 की घात 3" या "3 की तीसरी घात" पढ़ते है। यहाँ, 3 आधार है तथा 3 को घातांक (या घात) कहते हैं।

इसी प्रकार, 6^5 को "6 की घात 5" या "6 की पांचवी घात" पढ़ते है। यहाँ, 6 आधार है तथा 5 को घातांक (या घात) कहते हैं।

उपरोक्त से हम कह सकते हैं कि

किसी संख्या को स्वयं से कई बार गुणा करने का संकेतन घातांकीय संकेतन अथवा घातांकीय रूप कहलाता है।

अतः, $5 \times 5 \times \ldots.$ 20 बार $= 5^{20}$ तथा $(-7) \times (-7) \times \ldots.$ 10 बार $= (-7)^{10}$

5^{20} में 5 आधार है तथा 20 घातांक है।

$(-7)^{10}$ में आधार -7 तथा घातांक 10 है।

इसी प्रकार, घातांकीय संकेतन का प्रयोग कर परिमेय संख्या को स्वयं से बार–बार गुणा करने में प्रयोग किया जाता है।

अतः, $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \ldots\ldots\ldots 16$ बार $= \left(\frac{3}{5}\right)^{16}$

तथा $\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \ldots\ldots\ldots 10$ बार $= \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}$

व्यापक रूप से, यदि a एक परिमेय संख्या है, जो स्वयं से m बार गुणा की जाती है, तो उसे a^m द्वारा लिखा जाता है।

यहाँ a को आधार कहा जाता है तथा m को घातांक (या घात)।

उपरोक्त चर्चा को स्पष्ट करने के लिए आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 2.1: निम्न में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ (ii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$

हल: (i) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{(2)^3}{(7)^3} = \frac{8}{343}$

(ii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-3)^4}{(5)^4} = \frac{81}{625}$

उदाहरण 2.2: निम्न गुणन को घातांकीय संकेतन के रूप में लिखिए:

(i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$

(ii) $\left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right)$

हल : (i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^7$

(ii) $\left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) \times \left(\frac{3}{11}\right) = \left(\frac{3}{11}\right)^4$

उदाहरण 2.3: निम्न में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए तथा प्रत्येक में आधार तथा घातांक लिखिए:

(i) 4096 (ii) $\frac{125}{729}$ (iii) -512

हल: (i) $4096 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

$= (4)^6$

यहाँ, आधार $= 4$ और घात $= 6$

विकल्पतः $4096 = (2)^{12}$

आधार $= 2$, घातांक $= 12$

(ii) $\frac{125}{729} = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} = \left(\frac{5}{9}\right)^3$

यहाँ, आधार $= \left(\frac{5}{9}\right)$ और घातांक $= 3$

(iii) $512 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^9$

यहाँ, आधार $= 2$ और घातांक $= 9$

उदाहरण 2.4: निम्न को सरल कीजिए

$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^4$

हल: $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3^3}{2^3}$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{4^4}{3^4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{3^3}{2^3} \times \frac{4^4}{3^4} = \frac{3^3}{2^3} \times \frac{2^8}{3^4}$$

$$= \frac{2^5}{3^1} = \frac{32}{3}$$

उदाहरण 2.5: निम्न में से प्रत्येक का विलोम लिखिए तथा उन्हें घातांकीय रूप में भी लिखिए।:

(i) 3^5 (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

हल: (i) $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 243$

$\therefore$ 3^5 का विलोम $= \frac{1}{243} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$

$\therefore$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ का विलोम $= \frac{4^2}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

(iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9 = \frac{(-5)^9}{6^9}$

$\therefore$ $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$ का विलोम $= \frac{-6^9}{5^9} = \left(\frac{-6}{5}\right)^9$

उपरोक्त उदाहरणों से हम कह सकते हैं कि यदि $\frac{p}{q}$ एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m एक धनात्मक पूर्णांक है, तो $\left(\frac{p}{q}\right)^m$ का विलोम $\left(\frac{q}{p}\right)^m$ है।

देखें आपने कितना सीखा 2.1

1. निम्न को घातांकीय रूप में लिखिए:

   (i) $(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)$

   (ii) $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \ldots$ 10 बार

   (iii) $\left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) \times \ldots$ 20 बार

2. निम्न में से प्रत्येक का आधार तथा घातांक लिखिए:

   (i) $(-3)^5$ (ii) $(7)^4$ (iii) $\left(-\frac{2}{11}\right)^8$

3. निम्न में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

   (i) $\left(\frac{3}{7}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-2}{9}\right)^4$ (iii) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

4. निम्न में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

   (i) $\left(\frac{7}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^6$

   (ii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^2$

5. निम्न में से प्रत्येक का विलोम ज्ञात कीजिए:

   (i) 3^5 (ii) $(-7)^4$ (iii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$

2.2 अभाज्य गुणनखंड

स्मरण कीजिए कि कोई संयुक्त संख्या अभाज्य संख्याओं के गुणनफलों के रूप में लिखी जा सकती है। आइए हम संयुक्त संख्याएं 72, 760 तथा 7623 लें।

(i) $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^3 \times 3^2$

(ii) $760 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 19$

$= 2^3 \times 5^1 \times 19^1$

(iii) $7623 = 3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 11$

$= 3^2 \times 7^1 \times 11^2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ 2 & 36 \\ 2 & 18 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 760 \\ 2 & 380 \\ 2 & 190 \\ 5 & 95 \\ & 19 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 7623 \\ 3 & 2541 \\ 7 & 847 \\ 11 & 121 \\ & 11 \end{array}$$

हम देख सकते हैं कि 1 के अतिरिक्त प्रत्येक प्राकृत संख्या, अद्वितीय रूप से अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल के रूप में लिखी जा सकती है, यदि उनके आने वाले क्रम को छोड़ दिया जाए। आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 2.6: 24300 को अभाज्य संख्याओं के घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए:

हल: $24300 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3$

$\therefore 24300 = 2^2 \times 3^5 \times 5^2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24300 \\ 2 & 12150 \\ 3 & 6075 \\ 3 & 2025 \\ 3 & 675 \\ 3 & 225 \\ 3 & 75 \\ 5 & 25 \\ & 5 \end{array}$$

उदाहरण 2.7: 98784 को अभाज्य संख्याओं के घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए:

हल:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 98784 \\ 2 & 49392 \\ 2 & 24696 \\ 2 & 12348 \\ 2 & 6174 \\ 3 & 3087 \\ 3 & 1029 \\ 7 & 343 \\ 7 & 49 \\ & 7 \end{array}$$

$\therefore 98784 = 2^5 \times 3^2 \times 7^3$

देखें आपने कितना सीखा 2.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक को अभाज्य संख्याओं के घाताकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) 429 (ii) 648 (iii) 1512

2. निम्न में से प्रत्येक को अभाज्य संख्याओं के घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 729 (ii) 512 (iii) 2592

(iv) $\frac{1331}{4096}$ (v) $-\frac{243}{32}$

2.3 घातांकों के नियम

निम्न पर विचार कीजिए:

(i) $3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 3^5 = 3^{2+3}$

(ii) $(-7)^2 \times (-7)^4 = [(-7) \times (-7)] \times [(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)]$

$= [(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)]$

$= (-7)^6 = (-7)^{2+4}$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$

$= \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^{3+4}$

(iv) $a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a) = a^7 = a^{3+4}$

उपरोक्त उदाहरणों से हम अवलोकन करते हैं कि

नियम 1: यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m तथा n दो धन पूर्णांक हैं, तो

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

उदाहरण 2.8: $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a = -\frac{3}{2}$, $m = 3$ and $n = 5$.

$$\therefore \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3+5} = \left(-\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{6561}{256}$$

उदाहरण 2.9: निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^3$$

हल: पहले की तरह

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \left(\frac{7}{4}\right)^{2+3} = \left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{16807}{1024}$$

अब निम्न को पढ़िए:

(i) $7^5 \div 7^3 = \dfrac{7^5}{7^3} = \dfrac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = 7\times7 = 7^2 = 7^{5-3}$

(ii) $(-3)^7 \div (-3)^4 = \dfrac{(-3)^7}{(-3)^4} = \dfrac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}$

$$= (-3)(-3)(-3) = (-3)^3 = (-3)^{7-4}$$

उपरोक्त में हम देखते हैं कि

नियम 2: यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या है, तथा m तथा n धन पूर्णांक हैं $(m > n)$, तो

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

उदाहरण 2.10: $\left(\dfrac{35}{25}\right)^{16} \div \left(\dfrac{35}{25}\right)^{13}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\left(\frac{35}{25}\right)^{16} \div \left(\frac{35}{25}\right)^{13}$$

$$= \left(\frac{35}{25}\right)^{16-13} = \left(\frac{35}{25}\right)^3 = \left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{343}{125}$$

नियम 2 में $m < n \Rightarrow n > m$,

तो $$a^m \div a^n = a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

नियम 3: जब $n > m$ है

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{m-n}}$$

उदाहरण 2.11: $\left(\frac{3}{7}\right)^6 \div \left(\frac{3}{7}\right)^9$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a = \frac{3}{7}$, $m = 6$ तथा $n = 9$.

$$\therefore \left(\frac{3}{7}\right)^6 \div \left(\frac{3}{7}\right)^9 = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{9-6}}$$

$$= \frac{7^3}{3^3} = \frac{343}{27}$$

आइए निम्न को देखें

(i) $\left(3^3\right)^2 = 3^3 \times 3^3 = 3^{3+3} = 3^6 = 3^{3\times 2}$

(ii) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{2+2+2+2+2} = \left(\frac{3}{7}\right)^{10} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2\times 5}$$

उपरोक्त दो स्थितियों से हम निम्न परिणाम निकालते हैं:

नियम 4: यदि a एक कोई शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m तथा n दो धन पूर्णांक हैं, तो

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

आइए हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 2.12: $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left[\frac{2}{5}\right]^{2\times 3} = \left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{64}{15625}$

2.3.1 शून्य घातांक

स्मरण कीजिए कि $a^m \div a^n = a^{m-n}$, यदि $m > n$

$$= \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ यदि } n > m$$

आइए हम वह अवस्था लें जब $m = n$

$$\therefore\ a^m \div a^m = a^{m-m}$$

$$\Rightarrow \frac{a^m}{a^m} = a^0$$

$$\Rightarrow 1 = a^0$$

नियम 5: यदि a कोई शून्येतर परिमेय संख्या है, तो $a^o = 1$.

उदाहरण 2.13: मान ज्ञात कीजिए

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^0$ (ii) $\left(\frac{-3}{4}\right)^0$

हल: (i) $a^0 = 1$ का प्रयोग करके हमें मिलता है $\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$

(ii) फिर $a^0 = 1$ का प्रयोग करके हमें मिलता है $\left(\frac{-3}{4}\right)^0 = 1.$

देखें आपने कितना सीखा 2.3

1. निम्न को सरल करके परिणाम को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $(7)^2 \times (7)^3$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{7}{8}\right)^1 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^2 \times \left(-\frac{7}{8}\right)^3$

2. निम्न को सरल करके परिणाम को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $(-7)^9 \div (-7)^7$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^8 \div \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{-7}{3}\right)^{18} \div \left(\frac{-7}{3}\right)^3$

3. निम्न को सरल करके परिणाम को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $\left(2^6\right)^3$ (ii) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^2$ (iii) $\left[\left(-\frac{5}{9}\right)^3\right]^5$

(iv) $\left(\frac{11}{3}\right)^5 \times \left(\frac{15}{7}\right)^0$ (v) $\left(-\frac{7}{11}\right)^0 \times \left(-\frac{7}{11}\right)^3$

4. निम्न में से कौन–कौन से कथन सत्य हैं?

(i) $7^3 \times 7^3 = 7^6$

(ii) $\left(\frac{3}{11}\right)^5 \times \left(\frac{3}{11}\right)^2 = \left(\frac{3}{11}\right)^7$

(iii) $\left[\left(\frac{4}{9}\right)^5\right]^4 = \left(\frac{4}{9}\right)^9$

(iv) $\left[\left(\frac{3}{19}\right)^6\right]^2 = \left(\frac{3}{19}\right)^8$

(v) $\left(\frac{3}{11}\right)^0 = 0$

(vi) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$

(vii) $\left(\frac{8}{15}\right)^5 \times \left(\frac{7}{6}\right)^0 = \left(\frac{8}{15}\right)^5$

2.4 ऋणात्मक पूर्णांक घातांक के रूप में

i) हम जानते हैं कि 5 का व्युत्क्रम $\frac{1}{5}$ है। हम इसे '5^{-1}' लिखते हैं तथा '5 की घात –1' पढ़ते हैं।

ii) (–7) का व्युत्क्रम $-\frac{1}{7}$ है। हम इसे '$(-7)^{-1}$' लिखते हैं तथा '(–7) की घात –1' पढ़ते हैं।

iii) 5^2 का व्युत्क्रम $\frac{1}{5^2}$ है। हम इसे '5^{-2}' लिखते हैं तथा '5 की घात (–2)' पढ़ते हैं।

उपरोक्त से हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं।

यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m एक धनपूर्णांक है, तो a^m का व्युत्क्रम $\frac{1}{a^m}$ होता है। इसे 'a^{-m}' लिखते हैं तथा 'a की घात (–m)' पढ़ते हैं। अतः

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 2.14: निम्न में से प्रत्येक को धनात्मक घातांकों के साथ लिखिए:

(i) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$ (ii) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-7}$

हल:

(i) $$\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)^{2}}=\frac{1}{\frac{3^2}{8^2}}=\frac{8^2}{3^2}=\left(\frac{8}{3}\right)^{2}$$

(ii) $$\left(-\frac{4}{7}\right)^{-7}=\frac{1}{\left(-\frac{4}{7}\right)^{7}}=\frac{7^7}{(-4)^7}=\left(-\frac{7}{4}\right)^{7}$$

उपरोक्त उदाहरण से हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं

यदि $\frac{p}{q}$ एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा **m** कोई धनपूर्णांक है, तो $\left(\frac{p}{q}\right)^{-m}=\frac{q^m}{p^m}=\left(\frac{q}{p}\right)^{m}$.

2.5 पूर्णांकीय घातांकों के लिए घातांकों के नियम

ऋणात्मक पूर्णांकों का घातांकों के रूप में अर्थ निश्चित करने के बाद आइए देखें कि इस पाठ में पहले पढ़े गए घातांकों के नियम क्या ऋणात्मक घातांकों के लिए भी सत्य हैं। उदाहरणतया

(i) $$\left(\frac{3}{5}\right)^{-4}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{3}=\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{4}}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{3}=\left(\frac{3}{5}\right)^{3-4}$$

(ii) $$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}}\times\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}}=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2+3}}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2-3}$$

(iii) $$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\div\left(-\frac{3}{4}\right)^{-7}=\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}}\div\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{7}}=\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}}\times\left(-\frac{3}{4}\right)^{7}=\left(-\frac{3}{4}\right)^{7-3}$$

(iv) $$\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}\right)^{3}=\left[\left(\frac{7}{2}\right)^{2}\right]^{3}=\left(\frac{7}{2}\right)^{6}=\left(\frac{2}{7}\right)^{-6}=\left(\frac{2}{7}\right)^{-2\times 3}$$

उपरोक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि नियम 1 से नियम 5 तक सभी नियम ऋणात्मक घातांकों के लिये भी सत्य हैं।

यदि a तथा b कोई शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं तथा m, n कोई पूर्णांक है, तो

1. $a^m \times a^n \quad = a^{m+n}$

2. $a^m \div a^n \quad = a^{m-n}$ यदि $m > n$

   $= a^{-(n-m)} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ यदि $n > m$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

देखें आपने कितना सीखा 2.4

1. $\left(\dfrac{-3}{7}\right)^{-2}$ को $\dfrac{p}{q}$ के रूप की परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए।

2. निम्न को एक परिमेय संख्या के धनात्मक घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-4}$ (ii) $12^5 \times 12^{-3}$ (iii) $\left[\left(\dfrac{3}{13}\right)^{-3}\right]^4$

3. निम्न को एक परिमेय संख्या के ऋणात्मक घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^4$ (ii) $\left[(7)^2\right]^5$ (iii) $\left[\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2\right]^5$

4. सरल कीजिए:

   (i) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^7$ (ii) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^4$ (iii) $\left(-\dfrac{7}{5}\right)^{-4} \div \left(-\dfrac{7}{5}\right)^{-7}$

5. निम्न में से कौन–कौन से कथन सत्य हैं?

   (i) $a^{-m} \times a^n = a^{-m-n}$ (ii) $(a^{-m})^n = a^{-mn}$

   (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (iv) $a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

   (v) $a^{-m} \times a^o = a^m$

2.6 $a^{p/q}$ से अभिप्राय

हमने देखा है कि m तथा n के सभी पूर्णांकीय मानों के लिए

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

यदि a एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा q एक प्राकृत संख्या है तो हम $a^{1/q}$ को किस प्रकार से परिभाषित करते हैं।

निम्न गुणन पर विचार कीजिए:

$$\underbrace{a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \ldots\ldots\ldots \times a^{\frac{1}{q}}}_{q \text{ बार}} = a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\ldots\ldots q \text{ बार}}$$

$$= a^{\frac{q}{q}} = a$$

दूसरे शब्दों में $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$ की घात $q = a$ है।

दूसरे शब्दों में $a^{\frac{1}{q}}$, a का qवां मूल है है तथा इसे $\sqrt[q]{a}$ के रूप में लिखते हैं।

उदाहरणतया

$$7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 7^{\frac{4}{4}} = 7^1 = 7$$

आइए a की परिमेय घात को परिभाषित करें।

यदि a एक धनात्मक संख्या है, p एक पूर्णांक संख्या है तथा q एक प्राकृत संख्या है, तो

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

हम देखते हैं कि

$$\underbrace{a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \ldots\ldots\ldots \times a^{\frac{p}{q}}}_{q \text{ बार}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\ldots\ldots q \text{ बार}} = a^{\frac{p}{q}.q} = a^p$$

$$\therefore a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

अतः $a^{p/q}$, a^p का q वां मूल है।

अतः $7^{\frac{2}{3}}$, 7^2 का घनमूल है।

आइए अब परिमेय घातांकों के लिए घातांकों के नियम लिखें:

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $(ab)^m = a^m b^m$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

उपरोक्त नियमों के सत्यापन के लिए आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 2.15: मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(625)^{\frac{1}{4}}$ (ii) $(243)^{\frac{2}{5}}$ (iii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-3/4}$

हल:

(i) $(625)^{\frac{1}{4}} = (5\times5\times5\times5)^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5^{4\times\frac{1}{4}} = 5$

(ii) $(243)^{\frac{2}{5}} = (3\times3\times3\times3\times3)^{\frac{2}{5}} = (3^5)^{\frac{2}{5}} = 3^{5\times\frac{2}{5}} = 3^2 = 9$

(iii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3}\right)^{\frac{-3}{4}}$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4\times\left(\frac{-3}{4}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

देखें आपने कितना सीखा 2.5

1. निम्न में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

   (i) $(16)^{3/4}$ (ii) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$

2. निम्न में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

   (i) $(625)^{-\frac{1}{4}} \div (25)^{-\frac{1}{2}}$

(ii) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}}$

(iii) $\left(\frac{13}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{13}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$

2.7 करणी

हम पहले पाठ में सीख चुके हैं कि $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ तथा $\sqrt{5}$ प्रकार की संख्याएं अपरिमेय संख्याएं हैं। अब हम एक विशेष प्रकार की अपरिमेय संख्याओं का अध्ययन करेंगे जो **करणी** कहलाती हैं।

एक करणी को $\sqrt[n]{x}$ के रूप वाली उस धनात्मक अपरिमेय संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसमें x का nवां ठीक मूल ज्ञात करना संभव न हो, जहाँ x एक धनात्मक परिमेय संख्या है।

संख्या $\sqrt[n]{x}$ एक करणी होगी यदि और केवल यदि

(i) यह एक अपरिमेय संख्या हो।

(ii) यह एक धनात्मक परिमेय संख्या का मूल हो।

2.7.1 कुछ परिभाषाएं

करणी $\sqrt[n]{x}$, में चिन्ह $\sqrt{\ }$ को करणी चिन्ह कहा जाता है। घात 'n' को 'करणी की घात' तथा x को 'करणीगत' कहते हैं।

नोट: i) जब करणी की घात नहीं लिखी हो तो उसे 2 लिया जाता है। उदाहरणतया, $\sqrt{7}\left(=\sqrt[2]{7}\right)$ में करणी की घात 2 है।

ii) $\sqrt[3]{8}$ करणी नहीं है क्योंकि इसका ठीक मान 2 प्राप्त हो जाता है, जो एक परिमेय संख्या है।

iii) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, हालांकि एक अपरिमेय संख्या है, पर करणी नहीं है क्योंकि यह एक अपरिमेय संख्या का वर्गमूल है।

2.8 शुद्ध तथा मिश्रित करणियां

i) ऐसी करणी जिसका एक परिमेय गुणनखंड संख्या 1 है तथा दूसरा गुणनखंड एक अपरिमेय संख्या है शुद्ध करणी कहलाती है। उदाहरण के लिए $\sqrt[5]{16}$ और $\sqrt[3]{50}$ शुद्ध करणियां हैं।

ii) ऐसी करणी, जिसका परिमेय गुणनखंड 1 के अतिरिक्त अन्य परिमेय संख्या हो जबकि अन्य गुणनखंड अपरिमेय संख्या है, मिश्रित करणी कहलाती है। उदाहरण के लिए $2\sqrt{3}$ और $3\sqrt[3]{7}$ मिश्रित करणियां हैं।

2.9 करणी की घात

करणी $5\sqrt[3]{4}$, में 5 को करणी का गुणांक, 3 को करणी की घात तथा 4 को करणीगत कहते हैं। आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 2.16: बताइए निम्न में से कौन–कौन सी करणियाँ हैं:

(i) $\sqrt{49}$ (ii) $\sqrt{96}$ (iii) $\sqrt[3]{81}$ (iv) $\sqrt[3]{256}$

हल: (i) $\sqrt{49} = 7$, जो एक परिमेय संख्या है।

अतः $\sqrt{49}$ एक करणी नहीं है।

(ii) $\sqrt{96} = \sqrt{4\times4\times6} = 4\sqrt{6}$

$\therefore$ $\sqrt{96}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$\Rightarrow \sqrt{96}$ एक करणी है।

(iii) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3\times3\times3\times3} = 3\sqrt[3]{3}$, जो एक अपरिमेय संख्या है।

$\therefore$ $\sqrt[3]{81}$ एक करणी है।

(iv) $\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{4\times4\times4\times4} = 4\sqrt[3]{4}$

अतः $\sqrt[3]{256}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$\Rightarrow \sqrt[3]{256}$ एक करणी है।

अतः (ii), (iii) तथा (iv) करणी हैं।

उदाहरण 2.17: निम्न में से प्रत्येक में करणी की घात तथा करणीगत ज्ञात कीजिए:

(i) $\sqrt[5]{117}$ (ii) $\sqrt{162}$ (iii) $\sqrt[4]{213}$ (iv) $\sqrt[4]{214}$

हल: (i) करणी की घात 5 है तथा करणीगत 117 है।

(ii) करणी की घात 2 है तथा करणीगत 162 है।

(iii) करणी की घात 4 है तथा करणीगत 213 है।

(iv) करणी की घात 4 है तथा करणीगत 214 है।

उदाहरण 2.18: निम्न में से शुद्ध तथा मिश्रित करणियां पहचान कर लिखिए:

(i) $\sqrt{42}$ (ii) $4\sqrt[3]{18}$ (iii) $2\sqrt[4]{98}$

हल: (i) $\sqrt{42}$ एक शुद्ध करणी है।

(ii) $4\sqrt[3]{18}$ एक मिश्रित करणी है।

(iii) $2\sqrt[4]{98}$ एक मिश्रित करणी है।

2.10 करणी चिन्हों के नियम

नीचे करणियों के कुछ नियम (उपपति के बिना) दिये जा रहे हैं:

(i) $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$

(ii) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(iii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

जहाँ a तथा b धनात्मक परिमेय संख्याएं हैं तथा n एक धन पूर्णांक है।

आइए कुछ उदाहरण लेकर स्पष्ट करें।

उदाहरण 2.19: निम्न में से कौन–कौन सी करणियाँ हैं तथा कौन सी नहीं हैं? करणी चिन्हों के नियमों का प्रयोग कर निश्चित कीजिए।

(i) $\sqrt{5}\times\sqrt{80}$ (ii) $2\sqrt{15}\div4\sqrt{10}$

(iii) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}$ (iv) $\sqrt{32}\div\sqrt{27}$

हल: (i) $\sqrt{5}\times\sqrt{80} = \sqrt{5\times80} = \sqrt{400} = 20$

जो एक परिमेय संख्या है।

$\therefore$ $\sqrt{5}\times\sqrt{80}$ एक करणी नहीं है।

(ii) $2\sqrt{15}\div4\sqrt{10} = \dfrac{2\sqrt{15}}{4\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{10}}$

$= \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{2\times2\times10}} = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{40}} = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$, जो अपरिमेय है।

$\therefore\ 2\sqrt{15} \div 4\sqrt{10}$ एक करणी है

(iii) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = 4,$ अतः यह एक करणी नहीं है।

(iv) $\sqrt{32} \div \sqrt{27} = \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{32}{27}}$, जो अपरिमेय है

$\therefore\ \sqrt{32} \div \sqrt{27}$ एक करणी है।

देखें आपने कितना सीखा 2.6

1. निम्न में से प्रत्येक के लिए करणी की घात तथा करणीगत लिखिए:

   (i) $\sqrt[4]{64}$ (ii) $\sqrt[6]{343}$ (iii) $\sqrt{119}$

2. बताइए निम्न में से कौन–कौन सी करणियां हैं:

   (i) $\sqrt[3]{64}$ (ii) $\sqrt[4]{625}$ (iii) $\sqrt[6]{216}$

   (iv) $\sqrt{5} \times \sqrt{45}$ (v) $3\sqrt{2} \times 5\sqrt{6}$

3. निम्न में से शुद्ध तथा मिश्रित करणियां पहचान कर लिखिए:

   (i) $\sqrt{32}$ (ii) $2\sqrt[3]{12}$ (iii) $13\sqrt[3]{91}$ (iv) $\sqrt{35}$

2.11 करणियों के नियम

स्मरण कीजिए करणियों को भिन्नात्मक घातांकों वाली संख्याओं के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसलिए इस पाठ में दिये गए घातांकों के नियम करणियों पर भी लागू होते हैं। आइए उन्हें पुनः स्मरण करें।

(i) $\sqrt[n]{x} \, . \, \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ अथवा $x^{\frac{1}{n}} . y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}}$

(ii) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ अथवा $\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$

(iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$ अथवा $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$

(iv) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ अथवा $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$

(v) $\sqrt[m]{x^p} = \sqrt[mn]{x^{pn}}$ अथवा $\left(x^p\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{p}{m}} = x^{\frac{pn}{mn}} = \left(x^{pn}\right)^{\frac{1}{mn}}$

यहाँ x तथा y धनात्मक परिमेय संख्याएं हैं तथा m, n और p धनपूर्णांक हैं।

आइए इन नियमों को हम उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें।

(i) $\sqrt[3]{3}\ \sqrt[3]{8} = 3^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} = (24)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3\times 8}$

(ii) $\dfrac{(5)^{\frac{1}{3}}}{(9)^{\frac{1}{3}}} = \left(\dfrac{5}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}$

(iii) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{7}} = \sqrt[3]{7^{\frac{1}{2}}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{7} = \sqrt[2\times 3]{7} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{7}}$

(iv) $\sqrt[5]{4^3} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{3}{5}} = 4^{\frac{9}{15}} = \sqrt[15]{4^9} = \sqrt[3\times 5]{4^{3\times 3}}$

अतः हम देखते हैं कि उपरोक्त नियमों का सत्यापन हुआ है।

एक मुख्य बिन्दु: एक करणी की घात को बदलने के लिए हम करणी की घात को तथा करणीगत की घात को एक ही धनात्मक पूर्णांक से गुणा कर देते हैं।

उदाहरण के लिए $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

तथा $\sqrt[4]{3} = \sqrt[8]{3^2} = \sqrt[8]{9}$

2.12 सजातीय करणियां

दो करणियां सजातीय कहलाती हैं यदि उन्हें एक ही अपरिमेय गुणनखंड में बदला जा सके, चाहे उनके गुणांक कुछ भी हों।

उदाहरणतया, $3\sqrt{5}$ तथा $7\sqrt{5}$ सजातीय करणियां हैं। पुनः आप $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ पर विचार कीजिए। यहाँ $\sqrt{75}$ तथा $\sqrt{12}$ को $5\sqrt{3}$ तथा $2\sqrt{3}$ के रूप में प्रदर्शित किया गया है। अतः वह सजातीय करणियां हैं।

2.13 करणी का सरलतम (न्यूनतम) रूप

एक करणी अपने सरलतम (न्यूनतम) रूप में होती है यदि इसके

a) करणी चिन्ह की न्यूनतम संभव घात हो

b) करणी चिन्ह के अंतर्गत कोई भिन्न न हो

c) n घात के करणी चिन्ह में a^n, रूप का कोई गुणनखंड न हो, जहाँ a धन पूर्णांक है,

जैसे, $\sqrt[3]{\frac{125}{18}} = \sqrt[3]{\frac{125 \times 12}{18 \times 12}} = \frac{5}{6}\sqrt[3]{12}$

आइए कुछ उदाहरण लें:

उदाहरण 2.20: निम्न में से प्रत्येक को शुद्ध करणी के सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए

(i) $2\sqrt{7}$ (ii) $4\sqrt[4]{7}$ (iii) $\frac{3}{4}\sqrt{32}$

हल:

(i) $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \times 7} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{28}$, जो एक शुद्ध करणी है।

(ii) $4\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{4^4 \times 7} = \sqrt[4]{256 \times 7} = \sqrt[4]{1792}$, जो एक शुद्ध करणी है।

(iii) $\frac{3}{4}\sqrt{32} = \sqrt{32 \times \frac{9}{16}} = \sqrt{18}$, जो एक शुद्ध करणी है।

उदाहरण 2.21: निम्न में से प्रत्येक को मिश्रित करणी के सरलतम रूप में लिखिए:

(i) $\sqrt{128}$ (ii) $\sqrt[6]{320}$ (iii) $\sqrt[3]{250}$

हल:

(i) $\sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$, जो एक मिश्रित करणी है।

(ii) $\sqrt[6]{320} = \sqrt[6]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5}$

$= \sqrt[6]{2^6 \times 5} = 2\sqrt[6]{5}$, जो एक मिश्रित करणी है।

(iii) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5 \times 2} = 5\sqrt[3]{2}$, जो एक मिश्रित करणी है।

देखें आपने कितना सीखा 2.7

1. बताइए निम्न में से कौन–कौन से सजातीय करणी युग्म हैं:

(i) $\sqrt{8}, \sqrt{32}$ (ii) $5\sqrt{3}, 6\sqrt{18}$ (iii) $\sqrt{20}, \sqrt{125}$

2. शुद्ध करणी के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $7\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt[3]{16}$ (iii) $\frac{5}{8}\sqrt{24}$

3. मिश्रित करणी के सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\sqrt[3]{250}$ (ii) $\sqrt[3]{243}$ (iii) $\sqrt[4]{512}$

2.14 करणियों पर चारों मूलभूत संक्रियाएं

2.14.1 करणियों का योग तथा व्यवकलन

परिमेय संख्याओं की तरह करणियों का योग तथा व्यवकलन किया जाता है

जैसे, $5\sqrt{3}+17\sqrt{3}=(5+17)\sqrt{3}=22\sqrt{3}$

तथा $12\sqrt{5}-7\sqrt{5}=[12-7]\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

करणियों का योग तथा व्यवकलन करने के लिए हम पहले उन्हें सजातीय करणियां बनाकर उन पर संक्रियाएं करते हैं

उदाहरणतया, i) $\sqrt{50}+\sqrt{288}$

$=\sqrt{5\times5\times2}+\sqrt{12\times12\times2}$

$=5\sqrt{2}+12\sqrt{2}=\sqrt{2}(5+12)=17\sqrt{2}$

ii) $\sqrt{98}-\sqrt{18}$

$=\sqrt{7\times7\times2}-\sqrt{3\times3\times2}$

$=7\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(7-3)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

उदाहरण 2.22: निम्न में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

(i) $4\sqrt{6}+2\sqrt{54}$

(ii) $45\sqrt{6}-3\sqrt{216}$

हल: (i) $4\sqrt{6}+2\sqrt{54}$

$=4\sqrt{6}+2\sqrt{3\times3\times6}$

$= 4\sqrt{6}+6\sqrt{6}=10\sqrt{6}$

(ii) $45\sqrt{6}-3\sqrt{216}$

$= 45\sqrt{6}-3\sqrt{6\times6\times6}$

$= 45\sqrt{6}-18\sqrt{6}$

$= 27\sqrt{6}$

उदाहरण 2.23: दिखाइए कि

$$24\sqrt{45}-16\sqrt{20}+\sqrt{245}-47\sqrt{5}=0$$

हल: $24\sqrt{45}-16\sqrt{20}+\sqrt{245}-47\sqrt{5}$

$= 24\sqrt{3\times3\times5}-16\sqrt{2\times2\times5}+\sqrt{7\times7\times5}-47\sqrt{5}$

$= 72\sqrt{5}-32\sqrt{5}+7\sqrt{5}-47\sqrt{5}$

$= \sqrt{5}[72-32+7-47]$

$= \sqrt{5}\times0=0=\text{RHS}$

उदाहरण 2.24: सरल कीजिए: $2\sqrt[3]{16000}+8\sqrt[3]{128}-3\sqrt[3]{54}+\sqrt[4]{32}$

हल: $2\sqrt[3]{16000}=2\sqrt[3]{10\times10\times10\times8\times2}=2\times10\times2\sqrt[3]{2}=40\sqrt[3]{2}$

$8\sqrt[3]{128}=8\sqrt[3]{4\times4\times4\times2}=32\sqrt[3]{2}$

$3\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{3\times3\times3\times2}=9\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[4]{32}=2\sqrt[4]{2}$

$\therefore$ वांछित व्यंजक

$=40\sqrt[3]{2}+32\sqrt[3]{2}-9\sqrt[3]{2}+2\sqrt[4]{2}$

$=(40+32-9)\sqrt[3]{2}+2\sqrt[4]{2}$

$=63\sqrt[3]{2}+2\sqrt[4]{2}$

देखें आपने कितना सीखा 2.8

निम्न में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

1. $\sqrt{175}+\sqrt{112}$
2. $\sqrt{32}+\sqrt{200}+\sqrt{128}$
3. $3\sqrt{50}+4\sqrt{18}$
4. $\sqrt{108}-\sqrt{75}$
5. $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-8\sqrt[3]{3}$
6. $6\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{128}$
7. $12\sqrt{18}+6\sqrt{20}-6\sqrt{147}+3\sqrt{50}+8\sqrt{45}$

2.14.2 करणियों में गुणा तथा भाग

दो करणियों में गुणा अथवा भाग किया जा सकता है यदि उनकी एक ही करणी की घात हो। हमने सीखा है कि एक करणी की घात बदलने के लिए करणी की घात तथा करणीगत की घात को एक ही धनात्मक संख्या से गुणा अथवा भाग करना होता है। इसलिए गुणा अथवा भाग करने से पहले हम उन्हें एक ही घात की करणियों में बदलते हैं।

आइए कुछ उदाहरण लें

$$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times2}=\sqrt{6} \qquad [\sqrt{3} \text{ तथा } \sqrt{2} \text{ की घात समान हैं}]$$

$$\sqrt{12}\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

आइए अब $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt[3]{2}$ को गुणा करें।

$$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{4}$$

$$\therefore \sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{27}\times\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{108}$$

$$\text{तथा } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{4}}=\sqrt[6]{\frac{27}{4}}$$

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 2.25: (i) $5\sqrt[3]{16}$ तथा $11\sqrt[3]{40}$ की गुणा कीजिए।

(ii) $15\sqrt[3]{13}$ को $6\sqrt[6]{5}$ से भाग कीजिए।

हल: (i) $5\sqrt[3]{16} \times 11\sqrt[3]{40}$

$$= 5\times11\times\sqrt[3]{2\times2\times2\times2}\times\sqrt[3]{2\times2\times2\times5}$$

$$= 55\times2\times2\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{5}$$

$$= 220\sqrt[3]{10}$$

(ii) $$\frac{15\sqrt[3]{13}}{6\sqrt[6]{5}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt[6]{13^2}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{5}{2}\sqrt[6]{\frac{169}{5}}$$

उदाहरण 2.26: सरल कीजिए तथा परिणाम को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए:

$$2\sqrt{50}\times\sqrt{32}\times2\sqrt{72}$$

हल: $$2\sqrt{50} = 2\sqrt{5\times5\times2} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2\times2\times2\times2\times2} = 4\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{72} = 2\times6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $= 10\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times12\sqrt{2}$

$$= 960\sqrt{2}$$

2.15 करणियों की तुलना

करणियों की तुलना करने के लिए हम पहले उन्हें एक ही घात की करणियों में बदलते हैं और फिर उनके करणीगतों की उनके गुणाकों सहित तुलना करते हैं। आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 2.27: $\sqrt{\frac{1}{4}}$ तथा $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ में से कौन सा बड़ा है?

हल: $$\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{1}{9} > \frac{1}{64} \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{9}} > \sqrt[6]{\frac{1}{64}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{3}} > \sqrt{\frac{1}{4}}$$

उदाहरण 2.28: आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt[6]{5}$.

हल: 2, 3, तथा 6 का ल. स. 6 है।

$$\therefore \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5}$$

अब $\sqrt[6]{4} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[6]{27}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt[6]{5} < \sqrt{3}$$

देखें आपने कितना सीखा 2.9

1. $\sqrt[3]{32}$ तथा $5\sqrt[3]{4}$ को परस्पर गुणा कीजिए।
2. $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt[3]{5}$ को परस्पर गुणा कीजिए।
3. $\sqrt[3]{135}$ को $\sqrt[3]{5}$ से भाग दीजिए।
4. $2\sqrt{24}$ को $\sqrt[3]{320}$ से भाग दीजिए।
5. कौन सा बड़ा है: $\sqrt[4]{5}$ or $\sqrt[3]{4}$?
6. कौन सा छोटा है: $\sqrt[5]{10}$ or $\sqrt[4]{9}$?
7. आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए:

   $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[3]{4}$
8. अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए:

   $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{4}$

2.16 करणियों का परिमेयकरण

निम्न गुणनफलों पर विचार कीजिए:

(i) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3$

(ii) $5^{\frac{7}{11}} \times 5^{\frac{4}{11}} = 5$

(iii) $7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{3}{4}} = 7$

उपरोक्त तीन गुणनफलों में से प्रत्येक में हम देखते हैं कि दो करणियों को गुणा करने पर हमें परिणाम एक परिमेय संख्या मिलती है। ऐसी दशा में प्रत्येक करणी को दूसरी करणी का परिमेयकारी गुणक कहते हैं।

(i) $\sqrt{3}$ का परिमेयकारी गुणक $\sqrt{3}$ है तथा विलोमतः

(ii) $\sqrt[11]{5^4}$ का परिमेयकारी गुणक $\sqrt[11]{5^7}$ है तथा विलोमतः

(iii) $\sqrt[4]{7}$ का परिमेयकारी गुणक $\sqrt[4]{7^3}$ है तथा विलोमतः

दूसरे शब्दों में करणियों को परिमेय संख्याओं में बदलने की प्रक्रिया को हम परिमेयकरण कहते हैं तथा वे दो संख्याएं, जो गुणा करने पर परिणाम एक परिमेय संख्या देती हैं, एक दूसरे का परिमेयकारी गुणक कही जाती हैं।

उदाहरणतया: $\sqrt{x}$ का परिमेयकारी गुणक $\sqrt{x}$ है, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ का $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ है।

नोट:

(i) $x-\sqrt{y}$ तथा $x+\sqrt{y}$ संयुग्मी करणियां कहलाती हैं।

(ii) परिमेयकरण का प्रयोग प्रायः भिन्न के हर का परिमेयकरण करने के लिए किया जाता है।

आइए कुछ उदाहरण लें:

उदाहरण 2.29: $\sqrt{18}$ तथा $\sqrt{12}$ के परिमेयकारी गुणक ज्ञात कीजिए।

हल: $\sqrt{18} = \sqrt{3\times3\times2} = 3\sqrt{2}$

अतः परिमेयकारी गुणक $\sqrt{2}$ है।

$\sqrt{12} = \sqrt{2\times2\times3} = 2\sqrt{3}$.

अतः परिमेयकारी गुणक $\sqrt{3}$ है।

उदाहरण 2.30: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल:
$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}{-3}$$

$$=-\frac{7+2\sqrt{10}}{3}=-\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{10}$$

उदाहरण 2.31: $\dfrac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल:
$$\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}=\frac{\left(4+3\sqrt{5}\right)\left(4+3\sqrt{5}\right)}{\left(4-3\sqrt{5}\right)\left(4+3\sqrt{5}\right)}$$

$$=\frac{16+45+24\sqrt{5}}{16-45}=-\frac{61}{29}-\frac{24}{29}\sqrt{5}$$

उदाहरण 2.32: $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल:
$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-1}{\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+1\right]\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-1\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{6}}\times\frac{4+2\sqrt{6}}{4+2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{2}-4+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{16-24}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{4}$$

उदाहरण 2.33: यदि $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$, है, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\times\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{9+4+9\sqrt{2}}{9-2}$$

$$=\frac{13+9\sqrt{2}}{7}=\frac{13}{7}+\frac{9}{7}\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$$

अतः $a=\frac{13}{7}$, $\quad b=\frac{9}{7}$

देखें आपने कितना सीखा 2.10

1. निम्न में से प्रत्येक का परिमेयकारी गुणक ज्ञात कीजिए:

   (i) $\sqrt[3]{49}$ (ii) $\sqrt{2}+1$ (iii) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}$

2. निम्न में से प्रत्येक के हर का परिमेयकरण करके सरल कीजिए:

   (i) $\frac{12}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$ (iii) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$ (iv) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

3. सरल कीजिए: $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

4. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

5. यदि $a=3+2\sqrt{2}$ है तो, $a+\frac{1}{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\frac{2+5\sqrt{7}}{2-5\sqrt{7}}=x+\sqrt{7}y$ है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

आइए दोहराएँ

- $a\times a\times a\times .....\, m$ बार $=a^m$ घातांकीय रूप है जहाँ a आधार है तथा m घातांक है।
- घातांकों के नियम हैं:

  (i) $a^m\times a^n=a^{m+n}$ (ii) $a^m\div a^n=a^{m-n}$ (iii) $(ab)^m=a^mb^m$ (iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$

(v) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vi) $a^o = 1$ (vii) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
- एक अपरिमेय संख्या $\sqrt[n]{x}$ करणी कहलाती है, यदि x एक परिमेय संख्या है तथा $\sqrt[n]{x}$ में, n करणी की घात है तथा x करणीगत कहलाता है।
- एक करणी जिसमें गुणनखंड 1 के अतिरिक्त कोई और संख्या हो, एक मिश्रित करणी कहलाती है।
- करणी की घात वह संख्या है जो मूल को दर्शाती है।
- $\sqrt[n]{x}$ की घात n है।
- करणी चिन्ह के नियम $(a > 0, b > 0)$

(i) $\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$ (ii) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (iii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

- करणियों पर संक्रियाएं

$$x^{\frac{1}{n}} \times y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}};\ \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}};\ \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$(x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}};\ \sqrt[m]{x^a} = \sqrt[mn]{x^{an}} \text{ or } (x^a)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{a}{m}} = x^{\frac{an}{mn}} = (x^{an})^{\frac{1}{mn}}$$

- करणियां सजातीय होती हैं यदि उनके अपरिमेय गुणनखंड समान हों।
- सजातीय करणियों का योग तथा व्यवकलन किया जा सकता है।
- करणियों की घात को बदला जा सकता है। इसके लिए करणी की घात तथा करणीगत की घात को एक ही धनात्मक संख्या से गुणा किया जाता है।
- सजातीय करणियों के परस्पर गुणा तथा भाग किया जा सकता है।
- करणियों की तुलना करने के लिए हम करणियों को एक ही घात वाली करणियों में बदल लेते हैं और फिर उनके करणीगतों (गुणांकों सहित) से उनकी तुलना करते हैं।
- यदि दो करणियों का गुणन एक परिमेय संख्या है, तो प्रत्येक को दूसरे का परिमेयकारी गुणक कहा जाता है।
- $x+\sqrt{y}$, को $x-\sqrt{y}$ का परिमेयकारी गुणक कहा जाता है तथा विलोमतः

आइए अभ्यास करें

1. घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9$

   (ii) $\left(\frac{-7}{9}\right) \times \left(\frac{-7}{9}\right) \times \left(\frac{-7}{9}\right) \times \left(\frac{-7}{9}\right)$

2. सरल कीजिए:

   (i) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3$

   (ii) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \frac{35}{27} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2$

3. सरल कीजिए तथा परिणाम को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $(10)^2 \times (6)^2 \times (5)^2$

   (ii) $\left(-\frac{37}{19}\right)^{20} \div \left(-\frac{37}{19}\right)^{20}$

   (iii) $\left[\left(\frac{3}{13}\right)^3\right]^5$

4. सरल कीजिए:

   (i) $3^0 + 7^0 + 37^0 - 3$ (ii) $(7^0 + 3^0)\,(7^0 - 3^0)$

5. सरल कीजिए:

   (i) $(32)^{12} \div (32)^{-6}$ (ii) $(111)^6 \times (111)^{-5}$ (iii) $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-3} \times \left(-\frac{2}{9}\right)^5$

6. x का मान ज्ञात कीजिए यदि $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{11} = \left(\frac{3}{7}\right)^x$

7. x का मान ज्ञात कीजिए यदि $\left(\frac{3}{13}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{13}\right)^{-9} = \left(\frac{3}{13}\right)^{2x+1}$

8. निम्न में से प्रत्येक को अभाज्य गुणनखंडों के गुणन के रूप में ज्ञात कर परिणाम को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए

   (i) 6480000 (ii) 172872 (iii) 11863800

9. साइरस सितारा पृथ्वीसे 8.1×10^{13} किमी की दूरी पर है। यह मानते हुए कि प्रकाश 3.0×10^{5} किमी की गति से यात्रा करता है, तो ज्ञात कीजिए कि साइरस से प्रकाश कितनी देर में पृथ्वी तक पहुंचेगा?

10. निम्न में से कौन–कौन सी करणियां हैं?

    (i) $\sqrt{\dfrac{36}{289}}$ (ii) $\sqrt[9]{729}$ (iii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+1}$ (iv) $\sqrt[4]{3125}$

11. शुद्ध करणी के रूप में व्यक्त कीजिए:

    (i) $3\sqrt[2]{3}$ (ii) $5\sqrt[3]{4}$ (iii) $5\sqrt[5]{2}$

12. निम्न को सरलतम रूप की मिश्रित करणी के रूप में व्यक्त कीजिए:

    (i) $\sqrt[4]{405}$ (ii) $\sqrt[5]{320}$ (iii) $\sqrt[3]{128}$

13. निम्न में से कौन से सजातीय करणी के युग्म हैं:

    (i) $\sqrt{112}, \sqrt{343}$ (ii) $\sqrt[3]{625}, \sqrt[3]{3125 \times 25}$ (iii) $\sqrt[6]{216}, \sqrt{250}$

14. निम्न में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

    (i) $4\sqrt{48} - \dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{1}{3}} + 6\sqrt{3}$

    (ii) $\sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{175}$

    (iii) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$

15. कौन सा बड़ा है

    (i) $\sqrt{2}$ अथवा $\sqrt[3]{3}$? (ii) $\sqrt[3]{6}$ अथवा $\sqrt[4]{8}$?

16. अवरोही क्रम में लगाइए:

    (i) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$ (ii) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$

17. आरोही क्रम में लगाइए:

    $\sqrt[3]{16}, \sqrt{12}, \sqrt[6]{320}$

18. हर का परिमेयकरण करके सरल कीजिए:

(i) $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

19. निम्न में से प्रत्येक के हर का परिमेयकरण करके सरल कीजिए:

(i) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{12}}$

20. यदि $\frac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3}$, है तो, a तथा b के मान ज्ञात कीजिए जहाँ a तथा b परिमेय संख्याएं है।

21. यदि $x = 7+4\sqrt{3}$ है तो, $x+\frac{1}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

2.1

1. (i) $(-7)^4$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ (iii) $\left(\frac{-5}{7}\right)^{20}$

2.

	आधार	घात
(i)	-3	5
(ii)	7	4
(iii)	$-\frac{2}{11}$	8

3. (i) $\frac{81}{2401}$ (ii) $\frac{16}{6561}$ (iii) $-\frac{27}{64}$

4. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{625}{324}$

5. (i) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ (ii) $\left(-\frac{1}{7}\right)^4$ (iii) $\left(-\frac{5}{3}\right)^4$

2.2

1. (i) $3^1 \times 11^1 \times 13^1$ (ii) $2^3 \times 3^4$ (iii) $2^3 \times 3^3 \times 7^1$

2. (i) 3^6 (ii) 2^9 (iii) $2^5 \times 3^4$

   (iv) $\frac{11^3}{2^{12}}$ (v) $\left(-\frac{3}{2}\right)^5$

2.3

1. (i) $(7)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ (iii) $\left(-\frac{7}{8}\right)^6$

2. (i) $(-7)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (iii) $\left(-\frac{7}{3}\right)^{15}$

3. (i) 2^{18} (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (iii) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{15}$

   (iv) $\left(\frac{11}{3}\right)^5$ (v) $\left(-\frac{7}{11}\right)^3$

4. सही: (i), (ii), (vii)

   गलत: (iii), (iv), (v), (vi)

2.4

1. $\frac{49}{9}$

2. (i) $\left(\frac{7}{3}\right)^4$ (ii) 12^2 (iii) $\left(\frac{13}{3}\right)^{12}$

3. (i) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-4}$ (ii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-10}$ (iii) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-10}$

4. (i) $\frac{81}{16}$ (ii) $-\frac{2}{3}$ (iii) $-\frac{343}{125}$

5. सही: (ii), (iii), (iv), गलत: (i), (v)

2.5

1. (i) 8 (ii) $\frac{25}{9}$

2. (i) 1 (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{13}{16}$

2.6

1. (i) 4, 6, 2 (ii) 64, 343, 119
2. (iii), (iv)
3. शुद्ध करणी: (i), (iv)

   मिश्रित करणी: (ii), (iii)

2.7

1. (i), (iii)
2. (i) $\sqrt{147}$ (ii) $\sqrt[3]{432}$ (iii) $\sqrt{\frac{75}{8}}$
3. (i) $5\sqrt[3]{2}$ (ii) $3\sqrt[3]{9}$ (iii) $4\sqrt[4]{2}$

2.8

1. $9\sqrt{7}$ 2. $22\sqrt{2}$ 3. $27\sqrt{2}$ 4. $\sqrt{3}$

5. $-3\sqrt[3]{3}$ 6. $30\sqrt[3]{2}$ 7. $51\sqrt{2}+36\sqrt{5}-42\sqrt{3}$

2.9

1. $20\sqrt[3]{2}$ 2. $3\sqrt[3]{5}$ 3. 3 4. $\sqrt[6]{\frac{216}{25}}$

5. $\sqrt[3]{4}$ 6. $\sqrt[4]{9}$ 7. $\sqrt[6]{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ 8. $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{2}$

2.10

1. (i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $\sqrt{2}-1$ (iii) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$
2. (i) $\frac{12}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$ (iii) $\frac{8}{3}-\frac{\sqrt{55}}{3}$ (iv) $2+\sqrt{3}$

3. 14

4. $-\frac{1}{4}\left[2+\sqrt{6}+\sqrt{2}\right]$

5. 6

6. $-\frac{179}{171}-\frac{20\sqrt{7}}{171}$

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (i) $5^2 \times 3^2 \times 7^3 \times 9^2$ (ii) $\left(-\frac{7}{9}\right)^4$

2. (i) $-\frac{5}{56}$ (ii) $\frac{1}{105}$

3. (i) $2^4 \times 3^2 \times 5^4$ (ii) 1 (iii) $\left(\frac{3}{13}\right)^{15}$

4. (i) शून्य (ii) शून्य

5. (i) $(32)^{18}$ (ii) 111 (iii) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$

6. $x = 8$

7. $x = -6$

8. $2^7 \times 3^4 \times 5^4$

9. $3^3 \times 10^7$ से.

10. (ii), (iii), (iv)

11. (i) $\sqrt[2]{27}$ (ii) $\sqrt[3]{500}$ (iii) $\sqrt[5]{6250}$

12. (i) $3\sqrt[4]{5}$ (ii) $2\sqrt[5]{10}$ (iii) $4\sqrt[3]{2}$

13. (i), (ii)

14. (i) $\frac{127}{6}\sqrt{3}$ (ii) शून्य (iii) $5\sqrt{2}$

15. (i) $\sqrt[3]{3}$ (ii) $\sqrt[3]{6}$

16. (i) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$ (ii) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}$

17. $\sqrt[3]{16}, \sqrt[6]{320}, \sqrt{12}$

18. (i) $-3\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)$ (ii) $3\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$ (ii) $9-4\sqrt{5}$

19. (i) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (ii) $\frac{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}+2\sqrt{105}}{70}$

20. a = 11, b = –6

21. 14