211hi22

मॉड्यूल 5

त्रिकोणमिति

मान लीजिए कि एक मनुष्य एक पहाड़ी के निचले सिरे पर खड़ा पहाड़ी के ऊपर स्थित मंदिर के शिखर को देख रहा है। मंदिर की ओर चढ़ने से पहले वह मंदिर से अपनी दूरी का निकटतम मान जानना चाहता है। इस प्रकार के तथा संबंधित प्रश्न त्रिकोणिमिति की सहायता से हल किए जा सकते हैं।

*इस विज्ञान के विषय में प्रथम बार जिक्र हिप्पार्कस् (140 ई.पू.) ने किया जब उसने कहा कि पहुंच से बाहर की वस्तुओं की दूरी तथा ऊँचाई ज्ञात की जा सकती है। उसके कुछ वर्ष बाद 150 ई. में टौलेमी ने भी इसी प्रकार उसे समकोण त्रिभुज की सहायता से करने की संभावना जताई। परन्तु वह आर्यभट्ट (476 ई.) थे जिन्होंने प्रथम बार **ज्या** शब्द का प्रयोग किया जिसे बाद में **साईन** (sine) कहा गया। इस कार्य को भास्कराचार्य (1114 ई) ने अपने गोलाध्याय की रचना करके आगे बढ़ाया। इसमें उन्होंने **ज्या, कोटिज्या** तथा **स्पर्शज्या** का प्रयोग साईन (sine), कोसाईन(cosine) तथा स्पर्शज्या(tangent) अनुपातों के लिए किया परन्तु इस कार्य का पूर्ण श्रेय नीलकंठ सोमसुत्वन (1500 ई.) को जाता है जिन्होंने इस कार्य में **उन्नयन** और **अवनमन** का प्रयोग करके ऊँचाई तथा दूरी से संबंधित कुछ प्रश्न हल किए।*

इस पाठ में हम धन अथवा ऋण कोण, को एक घूमने वाली किरण की प्रथम तथा अन्तिम स्थिति के बीच झुकाव द्वारा प्रदर्शित करेंगे, त्रिकोणमितीय अनुपातों को समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों से परिभाषित करेंगें, कुछ त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को हल करेंगे, पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करेंगे तथा दूसरे अध्याय में 0°, 30°, 45°, 60°, 90° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करेंगे तथा ऊँचाई और दूरी के साधारण प्रश्न जिनमें केवल दो त्रिभुज तथा 30°, 45°, 60° के कोण आते हों, को हल करेंगे।

22

त्रिकोणमिति का परिचय

त्रिभुजों के अध्ययन का गणित में बहुत महत्व है। क्योंकि त्रिभुज न्यूनतम भुजाओं द्वारा बनाई गई आकृति है, इसलिए यह सरल रेखाओं द्वारा घिरी किसी भी आकृति के अध्ययन की संरचना के लिए एक आधार का काम करती है। समकोण त्रिभुज, त्रिभुजों के अध्ययन के साथ सरल सम्बन्ध रखते हैं।

ज्यामिति में हमने त्रिभुजों का अध्ययन किया है, जहाँ पर अधिकतम परिणाम कथनों के रूप में दिये जाते हैं। यहाँ त्रिकोणमिति में हमारा अध्ययन भिन्न रूप में हैं, जो कि काफी सरल है। यहाँ अधिकतर परिणाम सूत्रों के रूप में हैं। त्रिकोणमिति में मुख्य अध्ययन समकोण त्रिभुजों के बारे में है। आइए, हम भिन्न स्थितियों पर विचार करें, जहाँ पर हम समकोण त्रिभुजों की संरचना का अवलोकन करते हैं।

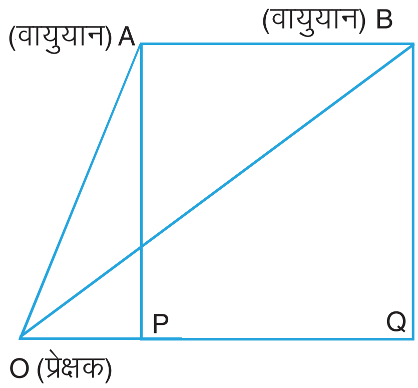
क्या आपने एक लम्बा नारियल का वृक्ष देखा है? वृक्ष को देखने पर उसकी ऊँचाई का विचार हमारे मस्तिष्क में आता है। क्या आप, बिना वास्तविक माप के, नारियल के वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कर सकते हैं? यदि आप वृक्ष के शिखर को देखें, तो आप अपनी आँख से वृक्ष के शिखर, आंख के बिन्दु से होकर जाने वाली क्षैतिज रेखा तथा वृक्ष के शिखर से क्षैतिज रेखा पर उर्ध्वाधर रेखा के द्वारा बनी एक समकोण त्रिभुज की कल्पना कर सकते हैं।

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

मान लीजिए कि आप एक पतंग उड़ा रहे हैं। जब पंतग आकाश में होती है, तो क्या आप इसकी ऊँचाई ज्ञात कर सकते हैं? पुनः पतंग, आपकी आँख, आँख के एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा तथा पतंग के एक बिन्दु से क्षैतिज रेखा पर उर्ध्वाधर रेखा के बीच समकोण त्रिभुज की संरचना की कल्पना की जा सकती है।

आइए हम एक अन्य स्थिति पर विचार करें, जिसमें एक व्यक्ति नदी के किनारे पर खड़ा होकर नदी के दूसरे किनारे पर स्थित एक मन्दिर को देखता है। क्या आप नदी की चौड़ाई ज्ञात कर सकते हैं, यदि आपको मन्दिर की ऊँचाई दी हुई हो? इस अवस्था में भी आप समकोण त्रिभुज की कल्पना कर सकते हैं।

अन्त में, मान लीजिए कि आप अपने घर की छत पर खड़े हैं और अचानक आप आकाश में एक वायुयान देखते हैं। जब आप इसे देखते हैं तो पुनः एक समकोण त्रिभुज की कल्पना की जा सकती है। आप वायुयान को स्वयं से दूर जाते हुआ पातें हैं। कुछ सेकन्डों के बाद यदि आप वायुयान को पुनः देखें तो एक बार फिर आप अपनी आँख, वायुयान, आँख (बिन्दु) से होकर जाने वाली क्षैतिज रेखा के बीच समकोण त्रिभुज की कल्पना कर सकते हैं, जैसा कि आकृति 22.1 में दर्शाया गया है।



आकृति 22.1

क्या आप इस अन्तराल में वायुयान द्वारा चली गई दूरी AB ज्ञात कर सकते हैं।

उपरोक्त चारों ऐसी ही अनेक स्थितियों में, ऊँचाइयाँ या दूरियाँ (बिना मापे) गणित की कुछ तकनीक के प्रयोग द्वारा ज्ञात की जा सकती हैं। यह तकनीक गणित की एक शाखा 'त्रिकोणमिति' में आती है।

शब्द 'Trigonometry' की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों 'Tri' (जिसका अर्थ है तीन) 'Gon' (जिसका अर्थ है भुजा) और 'Metron' (जिसका अर्थ है मापना) से हुई है। अतः 'Trigonometry' का शाब्दिक अर्थ त्रिभुज की भुजाओं और कोणो का मापना है। मूलतः त्रिकोणमिति को गणित की वह शाखा माना जाता था जो त्रिभुज की भुजाओं और कोणों को मापने से सम्बन्ध रखती है। इसका अनुप्रयोग खगोलशास्त्र, भूगोल, सर्वे, इन्जीनियरिंग तथा नेवीगेशन में होता है। प्राचीन काल में खगोलविद् त्रिकोणमिति का प्रयोग पृथ्वी से तारों और ग्रहों की दूरियाँ मापने में करते थे। आजकल इंजीनियरिंग में प्रयुक्त अधिकांश प्रौद्योगिकीय उन्नत विधियाँ त्रिकोणमिति संकल्पनाओं पर आधारित हैं।

इस पाठ में, हम कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को समकोण त्रिभुज की भुजाओं के रूप में परिभाषित करेंगे तथा भिन्न त्रिकोणमितीय अनुपातों में सम्बन्ध स्थापित करेंगे। हम कुछ मानक त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ भी स्थापित करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि

- एक समकोण त्रिभुज के न्यून कोण के सापेक्ष त्रिकोणमितीय अनुपातों को लिख सकें;
- समकोण त्रिभुज के कोण और भुजाएँ ज्ञात कर सकें जब उसकी कुछ भुजाएँ और त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हों;
- त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच सम्बन्धों को लिख सकें;
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को स्थापित कर सकें;
- त्रिकोणमितीय अनुपातों और सर्वसमिकाओं पर आधारित समस्याओं को हल कर सकें;

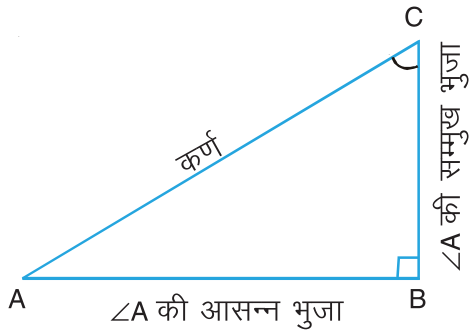
- पूरक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात कर सकें तथा इस पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- एक कोण का अर्थ
- समकोण त्रिभुजों की रचना करना
- समांतर तथा लंब रेखाओं का खींचना
- कोणों के प्रकार– न्यून कोण, अधिक कोण तथा समकोण
- त्रिभुजों के प्रकार – न्यून कोण त्रिभुज, अधिक कोण त्रिभुज और समकोण त्रिभुज
- पूरक कोण

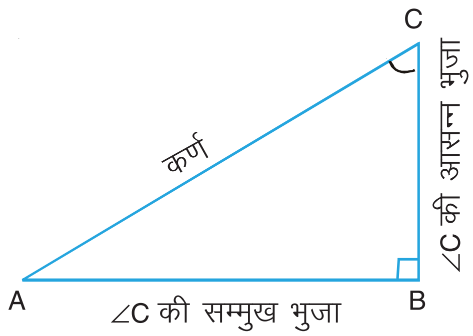
22.1 एक समकोण त्रिभुज के न्यूनकोण के त्रिकोणमितीय अनुपात

मान लीजिए एक समकोण ΔABC में, $\angle B$ समकोण है। यहाँ $\angle A$ (अर्थात $\angle CAB$) एक न्यून कोण है, AC कर्ण है, भुजा BC, $\angle A$ के सामने की भुजा (सम्मुख) तथा भुजा AB, $\angle A$ की आसन्न भुजा है।



आकृति 22.2

पुनः, यदि हम $\angle C$ पर विचार करें, तो भुजा AB, $\angle C$ के सामने की भुजा है तथा भुजा BC, $\angle C$ की आसन्न भुजा है।



आकृति 22.3

अब हम समकोण त्रिभुज की भुजाओं के रूप में कुछ अनुपात परिभाषत करते हैं, जो **त्रिकोणमितीय अनुपात** कहलाते हैं।

समकोण ΔABC में, $\angle A$ के त्रिकोणमितीय अनुपात इस प्रकार हैं:

(i) $\text{sine } A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC}$

(ii) $\text{cosine } A = \dfrac{\angle A \text{ की आसन्न (या संलग्न भुजा) भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC}$

(iii) $\text{tangent } A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}} = \dfrac{BC}{AB}$

(iv) $\text{cosecant } A = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AC}{BC}$

(v) $\text{secant } A = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}} = \dfrac{AC}{AB}$

(vi) $\text{cotangent } A = \dfrac{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AB}{BC}$

उपरोक्त त्रिकोणमितीय अनुपातों को हम संक्षेप में क्रमशः $\sin A, \cos A, \tan A, \operatorname{cosec} A, \sec A$ और $\cot A$ द्वारा व्यक्त कर सकते हैं। त्रिकोणमितीय अनुपातों को हम संक्षेप में **t-ratios** या **t-**अनुपात भी कहते हैं।

यदि हम $\angle A = \theta$ मान लें, तो उपरोक्त परिणाम बन जाएंगे:

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC}, \qquad \cos\theta = \frac{AB}{AC}, \qquad \tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}, \qquad \sec\theta = \frac{AC}{AB} \qquad \text{और} \quad \cot\theta = \frac{AB}{BC}$$

नोट: अवलोकन कीजिए कि $\sin\theta$ तथा $\operatorname{cosec}\theta$ एक दूसरे के व्युत्क्रम (प्रतिलोम) हैं। इसी प्रकार, $\cot\theta$ तथा $\sec\theta$ क्रमशः $\tan\theta$ तथा $\cos\theta$ के प्रतिलोम हैं।

टिप्पणी:

यदि समकोण त्रिभुज ABC में

$AB = 4$ सेमी, $BC = 3$ सेमी तथा $AC = 5$ सेमी हों, तो

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

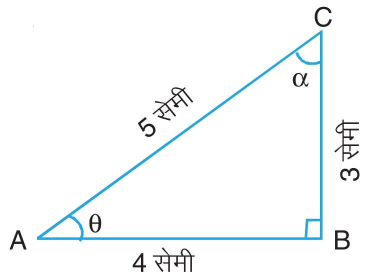
$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

और $$\cot\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$



आकृति 22.4

उपरोक्त आकृति में, यदि हम $\angle C = \alpha$ लें, तो

$$\sin\alpha = \frac{\alpha \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{\alpha \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\alpha \text{ की सम्मुख भुजा}}{\alpha \text{ की आसन्न भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{\text{कर्ण}}{\alpha \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

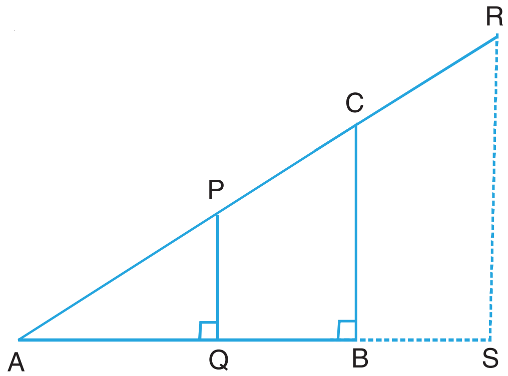
$$\sec\alpha = \frac{\text{कर्ण}}{\alpha \text{ की आसन्न भुजा}} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

और $$\cot\alpha = \frac{\alpha \text{ की आसन्न भुजा}}{\alpha \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

टिप्पणी:

1. $\sin A$ या $\sin \theta$ एक संकेत हैं तथा sin को A या θ से अलग नहीं किया जा सकता। यहाँ यह $\sin \times \theta$ के बराबर नहीं है। यही कथन अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों पर भी लागू होता है।
2. प्रत्येक त्रिकोणमितीय अनुपात एक वास्तविक संख्या है।
3. सुविधा के लिए हम $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$, और $(\tan\theta)^2$ को क्रमशः $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ तथा $\tan^2\theta$ द्वारा व्यक्त करते हैं। यही संकेत हम त्रिकोणमितीय अनुपातों के बड़े घातांकों के लिए अपनाते हैं।
4. हम अपने को न्यून कोण A या θ के लिए सीमित रखते हैं।

अब प्रश्न उठता है : क्या एक त्रिकोणमितीय अनुपात का मान भिन्न–भिन्न समकोण त्रिभुजों के एक ही कोण के लिए वही रहता है? उत्तर पाने के लिए हम समकोण त्रिभुज ABC पर विचार करते हैं। माना AC पर कोई बिंदु P है।



आकृति 22.5

माना $PQ \perp AB$ है।

अब समकोण ΔABC में,

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \qquad \text{----(i)}$$

तथा समकोण ΔAQP में,

$$\sin A = \frac{PQ}{AP} \qquad \text{----(ii)}$$

अब ΔAQP तथा ΔABC में,

$\angle Q = \angle B$ ----(प्रत्येक = 90°)

तथा $\angle A = \angle A$ ----(उभयनिष्ठ)

$\therefore \quad \Delta AQP \sim \Delta ABC$

$$\therefore \frac{AP}{AC} = \frac{QP}{BC} = \frac{AQ}{AB}$$

या
$$\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{AP} \qquad \text{----(iii)}$$

(i), (ii) तथा (iii), से हम पाते हैं कि दोनों त्रिभुजों में $\sin A$ का मान वही है।

इसी प्रकार, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AP}$ और $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{PQ}{AQ}$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात का समकोण त्रिभुज के माप पर निर्भर नहीं करता। यह केवल कोण पर ही निर्भर करता है।

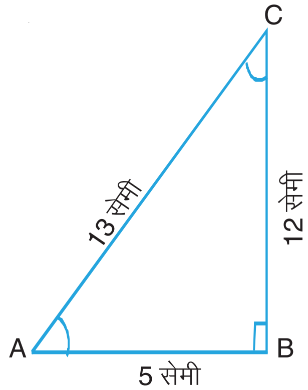
उदाहरण 22.1: आकृति 22.6 में, ΔABC शीर्ष B समकोण वाला त्रिभुज है। यदि AB = 5 सेमी, BC = 12 सेमी तथा AC = 13 सेमी हो, तो tan C, cosec C and sec C के मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$\tan C = \frac{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle C \text{ की आसन्न भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$$

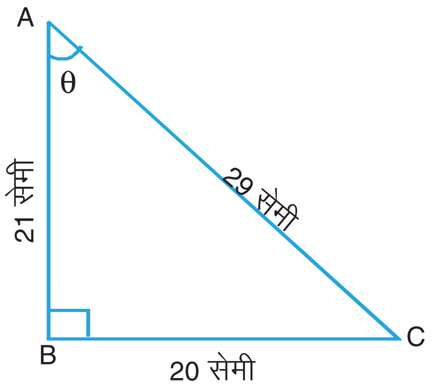
$$\operatorname{cosec} C = \frac{\text{कर्ण}}{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{5}$$

तथा $$\sec C = \frac{\text{कर्ण}}{\angle C \text{ की आसन्न भुजा}} = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{12}$$



आकृति 22.6

उदाहरण 22.2 : आकृति 22.7 में, $\sin\theta$, $\cot\theta$ और $\sec\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 22.7

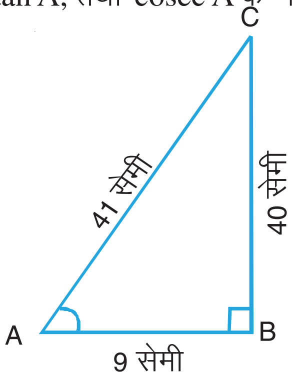
हल:

$$\sin\theta = \frac{\theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{20}{29}$$

$$\cot\theta = \frac{\theta \text{ की आसन्न भुजा}}{\theta \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{21}{20}$$

तथा $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\theta \text{ की आसन्न भुजा}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{29}{21}$

उदाहरण 22.3 : आकृति 22.8 में, ΔABC शीर्ष B पर समकोण वाला त्रिभुज है। यदि AB = 9 सेमी, BC = 40 सेमी तथा AC = 41 सेमी हो, तो cos C, cot C, tan A, तथा cosec A के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 22.8

हल:

$$\cos C = \frac{\angle C \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{40}{41}$$

तथा $$\cot C = \frac{\angle C \text{ की संलग्न भुजा}}{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{40}{9}$$

$\angle A$ के सापेक्ष, $\angle A$ की संलग्न भुजा AB है तथा $\angle A$ की सम्मुख भुजा BC है।

$$\therefore \quad \tan A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की संलग्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{40}{9}$$

तथा $$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{BC} = \frac{41}{40}$$

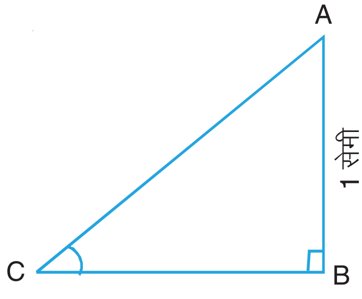
उदाहरण 22.4 : आकृति 22.9 में, B पर समकोण ΔABC में, $\angle A = \angle C, AC = \sqrt{2}$ सेमी तथा AB = 1 सेमी है। sin C, cos C and tan C के मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में, $\angle A = \angle C$

$\therefore$ BC = AB = 1 सेमी (दिया है)

$$\therefore \quad \sin C = \frac{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos C = \frac{\angle C \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



आकृति 22.9

तथा $$\tan C = \frac{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle C \text{ की संलग्न भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{1} = 1$$

टिप्पणी: उपरोक्त उदाहरण से हम जानते हैं कि $\angle A = \angle C$ तथा $\angle B = 90^\circ$

$\therefore \ \angle A = \angle C = 45^\circ$ है।

$\therefore$ हम ज्ञात करते हैं कि $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

तथा $\tan 45° = 1$

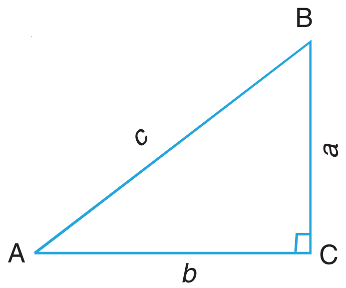
उदाहरण 22.5 : आकृति 22.10 में, ΔABC शीर्ष C पर समकोण वाला त्रिभुज है। यदि $AB = c$, $AC = b$ तथा $BC = a$ हो, तो निम्न में से कौन सा कथन सत्य है:

(i) $\tan A = \dfrac{b}{c}$

(ii) $\tan A = \dfrac{c}{b}$

(iii) $\cot A = \dfrac{b}{a}$

(iv) $\cot A = \dfrac{a}{b}$



आकृति 22.10

हल: यहाँ पर $\tan A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की संलग्न भुजा}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{b}$

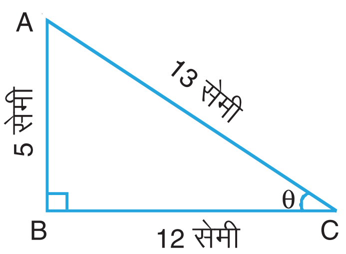
तथा $\cot A = \dfrac{\angle A \text{ की संलग्न भुजा}}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{b}{a}$

अतः परिणाम (iii), $\cot A = \dfrac{b}{a}$ सत्य है।

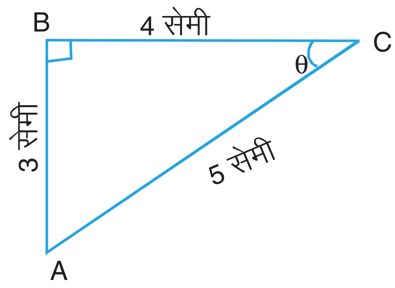
देखें आपने कितना सीखा 22.1

1. निम्न में प्रत्येक आकृति 22.11, ΔABC शीर्ष B पर समकोण वाला त्रिभुज है। θ के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए:

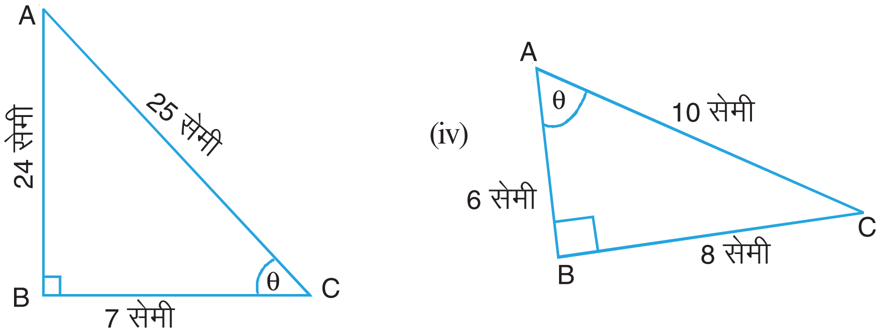
(i)



(ii)



(iii) (iv)



आकृति 22.11

2. ΔABC में, $\angle B = 90°$, BC = 5 सेमी, AB = 4 सेमी, तथा AC = $\sqrt{41}$ सेमी हैं। sin A, cos A, तथा tan A के मान ज्ञात कीजिए।

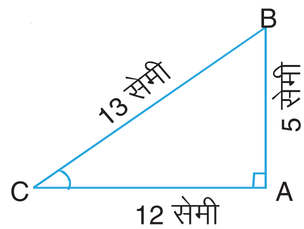
3. ΔABC में, कोण B समकोण है। यदि AB = 40 सेमी, BC = 9 सेमी तथा AC = 41 सेमी हो, तो sin C, cot C, cos, A तथा cot A में मान ज्ञात कीजिए।

4. ΔABC में, $\angle B = 90°$ है। यदि AB = BC = 2 सेमी तथा AC = $2\sqrt{2}$ सेमी हो तो sec C, cosec C, तथा cot C के मान ज्ञात कीजिए।

5. आकृति 22.12 में, ΔABC में कोण A समकोण है। निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है?

(i) $\cot C = \frac{13}{12}$ (ii) $\cot C = \frac{12}{13}$

(iii) $\cot C = \frac{5}{12}$ (iv) $\cot C = \frac{12}{5}$

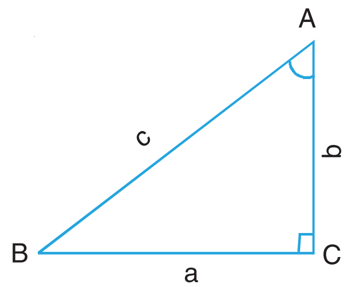


आकृति 22.12

6. आकृति 22.13 में, AC = b, BC = a तथा AB = c है। निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है?

(i) $\text{cosec } A = \frac{a}{b}$ (ii) $\text{cosec } A = \frac{c}{a}$

(iii) $\text{cosec } A = \frac{c}{b}$ (iv) $\text{cosec } A = \frac{b}{a}$.



आकृति 22.13

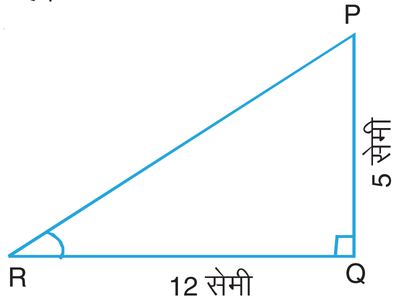
22.2 एक समकोण त्रिभुज की दो भुजाएँ दी हुई हों, तो त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना

जब समकोण त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ दी हुई हों, तो पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कर इसकी

तीसरी भुजा का मान ज्ञात कर लिया जाता है। इसके बाद हम दिए हुए कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात पिछले खण्ड में सीखी गई विधि से ज्ञात कर लेते हैं।

कुछ उदाहरण लेकर हम इस विधि को स्पष्ट करते हैं:

उदाहरण 22.6: आकृति 22.14 में, ΔPQR शीर्ष Q पर समकोण त्रिभुज है। यदि $PQ = 5$ सेमी तथा $QR = 12$ सेमी हो, तो sin R, cos R तथा tan R के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 22.14

हल: Θ ΔPQR समकोण त्रिभुज है।

$$\therefore PR = \sqrt{PQ^2 + QR^2} \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय)}$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2} \text{ सेमी}$$

$$= \sqrt{25 + 144} \text{ सेमी}$$

$$= \sqrt{169} \text{ or } 13 \text{ सेमी}$$

त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषा से

$$\sin R = \frac{\angle R \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

$$\cos R = \frac{\angle R \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$$

तथा $$\tan R = \frac{\angle R \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle R \text{ की संलग्न भुजा}} = \frac{5}{12}$$

उपरोक्त उदाहरण से, हम निम्न प्राप्त करते हैं:

त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने की विधि के चरण जब त्रिभुज की दो भुजाएँ दी हुई हों।

चरण 1: पाइथागोरस प्रमेय द्वारा त्रिभुज की अज्ञात (तीसरी) भुजा ज्ञात कीजिए।

चरण 2: त्रिकोणमितीय अनुपात की परिभाषा का प्रयोग कर भुजाओं के मान प्रतिस्थापित कर दीजिए।

उदाहरण 22.7 : आकृति 22.15 में, ΔPQR शीर्ष Q पर समकोण वाला त्रिभुज है। $PR = 25$ सेमी, $PQ = 7$ सेमी तथा $\angle PRQ = \theta$ है। $\tan\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ तथा $\sec\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$\because$ ΔPQR, शीर्ष Q पर समकोणिक है।

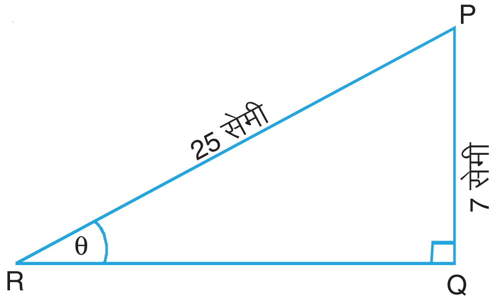
$\therefore$ $QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$

$= \sqrt{25^2 - 7^2}$ सेमी

$= \sqrt{625 - 49}$ सेमी

$= \sqrt{576}$ सेमी

$= 24$ सेमी



आकृति 22.15

$\therefore$ $\tan\theta = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{7}{24}$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{25}{7}$

तथा $\sec\theta = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{25}{24}$

उदाहरण 22.8 : ΔABC में, $\angle B = 90°$ है। यदि $AB = 4$ सेमी तथा $BC = 3$ सेमी हो, तो sin C, cos C, cot C, tan A, sec A तथा cosec A के मान ज्ञात कीजिए। tan A तथा cot C के मानों की समीक्षा कीजिए। tan A – cot C का मान भी ज्ञात कीजिए।

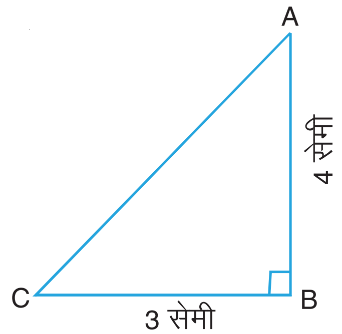
हल: ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ सेमी

$= \sqrt{25}$ सेमी

$= 5$ सेमी



आकृति 22.16

अब $\sin C = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$

$\cos C = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{5}$

$\cot C = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{4}$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

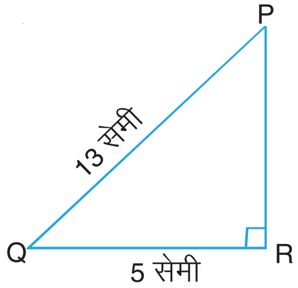
$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

तथा $$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

tan A तथा cot C के मान समान हैं।

$$\therefore \quad \tan A - \cot C = 0.$$

उदाहरण 22.9: आकृति 22.17 में, ΔPQR शीर्ष R पर समकोणिक है। यदि PQ = 13 सेमी तथा QR = 5 सेमी हो, तो निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है?



आकृति 22.17

(i) $\sin Q + \cos Q = \frac{17}{13}$ (ii) $\sin Q - \cos Q = \frac{17}{13}$

(iii) $\sin Q + \sec Q = \frac{17}{13}$ (iv) $\tan Q + \cot Q = \frac{17}{13}$

हल : यहाँ $PR = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ सेमी

$$\therefore \quad \sin Q = \frac{PR}{PQ} = \frac{12}{13} \text{ तथा } \cos Q = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \quad \sin Q + \cos Q = \frac{12}{13} + \frac{5}{13} = \frac{17}{13}$$

कथन (i) अर्थात $\sin Q + \cos Q = \frac{17}{13}$ सत्य है।

देखें आपने कितना सीखा 22.2

1. समकोण ΔABC में, शीर्ष B पर समकोण है, AC = 10 सेमी, तथा AB = 6 सेमी है। sin C, cos C, तथा tan C के मान ज्ञात कीजिए।

2. ΔABC में $\angle C = 90°$, BC = 24 सेमी तथा AC = 7 सेमी है। sin A, cosec A तथा cot A के मान ज्ञात कीजिए।

3. ΔPQR में $\angle Q = 90°$, PR = $10\sqrt{2}$ सेमी तथा QR = 10 सेमी है। sec P, cot P तथा cosec P के मान ज्ञात कीजिए।

4. ΔPQR में $\angle Q = 90°$, $PQ = \sqrt{3}$ सेमी तथा $QR = 1$ सेमी है। $\tan R$, $\operatorname{cosec} R$, $\sin P$ तथा $\sec P$ के मान ज्ञात कीजिए।

5. ΔABC में, $\angle B = 90°$, $AC = 25$ सेमी, $AB = 7$ सेमी तथा $\angle ACB = \theta$ हैं। $\cot \theta$, $\sin \theta$, $\sec \theta$ तथा $\tan \theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

6. समकोण ΔPQR में, $\angle Q = 90°$, $PQ = 5$ सेमी तथा $PR = 7$ सेमी हैं। $\sin P$, $\cos P$, $\sin R$ तथा $\cos R$ के मान ज्ञात कीजिए। $\sin P - \cos R$ का मान भी ज्ञात कीजिए।

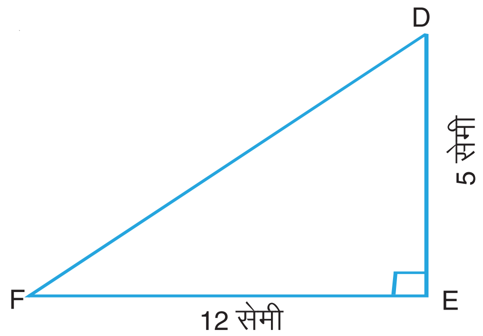
7. आकृति 22.18 में शीर्ष E पर, ΔDEF समकोणिक है। यदि $DE = 5$ सेमी तथा $EF = 12$ सेमी हो, तो निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है?

(i) $\sin F = \dfrac{5}{12}$

(ii) $\sin F = \dfrac{12}{5}$

(iii) $\sin F = \dfrac{5}{13}$

(iv) $\sin F = \dfrac{12}{13}$



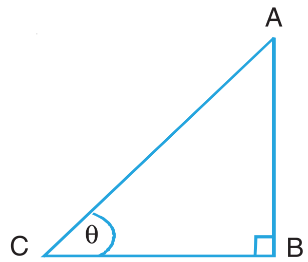
आकृति 22.18

22.3 एक त्रिकोणमितीय अनुपात दिया हुआ हो, तो दूसरे त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करना

कभी कभी हम एक त्रिकोणमितीय अनुपात का मान जानते हैं तथा हमें दूसरे t-अनुपातों के मान ज्ञात करने होते है।। हम t-अनुपातों की परिभाषा तथा पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग द्वारा उन्हें आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। माना $\sin \theta = \dfrac{12}{13}$ है। अब हम दूसरे t-अनुपात ज्ञात करते हैं। हम एक समकोण त्रिभुज ABC की रचना करते हैं।

$\sin \theta = \dfrac{12}{13}$ का अर्थ है भुजाएँ AB और AC, 12 : 13 के अनुपात में हैं।

माना $AB = 12\,k$ तथा $AC = 13\,k$ है।



आकृति 22.19

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{(13k)^2 - (12k)^2}$$

$$= \sqrt{169k^2 - 144k^2}$$

$$= \sqrt{25k^2} = 5\,k$$

अब हम दूसरे t-अनुपात ज्ञात कर सकते हैं।

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{13k}{12k} = \frac{13}{12}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$$

तथा $$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

उपरोक्त विधि से हमें हल करने के लिए निम्न चरण प्राप्त होते हैं:

जब एक t-अनुपात दिया हुआ हो, तो दूसरे t-अनुपात ज्ञात करने के लिए अपनाने वाले चरण

1. एक समकोण ΔABC की रचना कीजिए।
2. दिए गए t-अनुपात को दो भुजाओं के रूप में प्रकट कीजिए तथा अनुपात का अचर k लीजिए।
3. दोनों भुजाओं को k के रूप में ज्ञात कर लीजिए।
4. पाइथागोरस के प्रमेय द्वारा, तीसरी भुजा ज्ञात कीजिए।
5. अब शेष t-अनुपातों के मान परिभाषा द्वारा ज्ञात कर लीजिए।

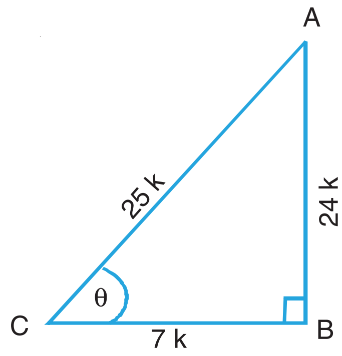
आइए अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 22.10.: यदि $\cos\theta = \frac{7}{25}$ हो, तो $\sin\theta$ तथा $\tan\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = 90°$ तथा $\angle C = \theta$ है।

हम जानते हैं कि

$$\cos\theta = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$



आकृति 22.20

माना $BC = 7\,k$ तथा $AC = 25\,k$ है।

पाइथागोरस प्रमेय द्वारा,

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(25k)^2 - (7k)^2}$$

$$= \sqrt{625k^2 - 49k^2}$$

$$= \sqrt{576k^2} \text{ अथवा } 24\,k$$

$\therefore$ ΔABC में,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{24k}{25k} = \frac{24}{25}$$

तथा $$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$$

उदाहरण 22.11.: यदि $\cot\theta = \frac{40}{9}$ हो, तो $\frac{\cos\theta . \sin\theta}{\sec\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90°$ तथा $\angle C = \theta$.

हम जानते हैं कि

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{40}{9}$$

माना $BC = 40k$ तथा $AB = 9k$ है।

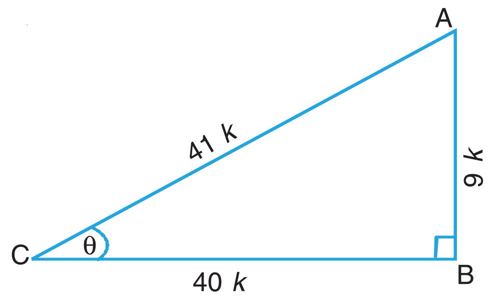
समकोण ΔABC में,

$$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2}$$

$$= \sqrt{(40k)^2 + (9k)^2}$$

$$= \sqrt{1600k^2 + 81k^2}$$

$$= \sqrt{1681k^2} \text{ or } 41\text{ k}$$



आकृति 22.21

अब $\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{9k}{41k} = \frac{9}{41}$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{40k}{41k} = \frac{40}{41}$$

और $\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{41k}{40k} = \frac{41}{40}$

$$\therefore \quad \frac{\cos\theta.\sin\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{9}{41} \times \frac{40}{41}}{\frac{41}{40}}$$

$$= \frac{9}{41} \times \frac{40}{41} \times \frac{40}{41}$$

$$= \frac{14400}{68921}$$

उदाहरण 22.12.: त्रिभुज PQR में, $\angle Q = 90°$ तथा $\tan R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है। दर्शाइए कि

$$\sin P \cos R + \cos P \sin R = 1$$

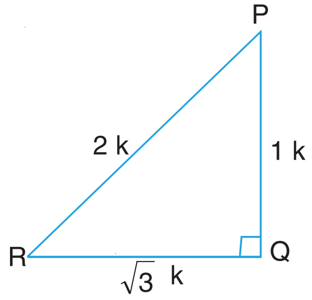
हल: दिया है त्रिभुज PQR में, $\angle Q = 90°$ तथा $\tan R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

हम जानते हैं कि

$$\tan R = \frac{PQ}{QR} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

माना $PQ = k$ तथा $QR = \sqrt{3}k$

तब, $PR = \sqrt{PQ^2 + QR^2}$



आकृति 22.22

$$= \sqrt{k^2 + \left(\sqrt{3}k\right)^2}$$

$$= \sqrt{k^2 + 3k^2}$$

$$= \sqrt{4k^2} \text{ अथवा } 2\,k$$

$$\therefore \quad \sin P = \frac{\angle P \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos P = \frac{\angle P \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{1k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\sin R = \frac{\angle R \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{1k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\text{दक } \cos R = \frac{\angle R \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin P \cos R + \cos P \sin R = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

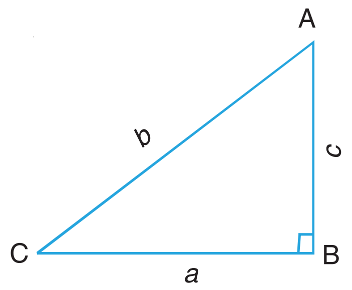
उदाहरण 22.13.: ΔABC में, $\angle B$ समकोण है। यदि $AB = c$, $BC = a$ तथा $AC = b$ हो, तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

(i) $\cos C + \sin A = \dfrac{2b}{a}$

(ii) $\cos C + \sin A = \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$

(iii) $\cos C + \sin A = \dfrac{2a}{b}$

(iv) $\cos C + \sin A = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}$



आकृति **22.23**

हल: यहाँ $\cos C = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{b}$

तथा $\sin A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{b}$

$\therefore \quad \cos C + \sin A = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{2a}{b}$

$\therefore$ कथन (iii), अर्थात $\cos C + \sin A = \dfrac{2a}{b}$ सत्य है।

देखें आपने कितना सीखा 22.3

1. यदि $\sin\theta = \dfrac{20}{29}$ हो, तो $\cos\theta$ तथा $\tan\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\tan\theta = \dfrac{24}{7}$ हो, तो $\sin\theta$ तथा $\cos\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\cos A = \dfrac{7}{25}$ हो, तो $\sin A$ तथा $\tan A$ के मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\cos\theta = \dfrac{m}{n}$ हो, तो $\cot\theta$ तथा $\operatorname{cosec}\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ हो, तो $\dfrac{\cos\theta \,.\cot\theta}{1-\sec^2\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ हो, तो $\sin^2\theta\cos\theta + \tan^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि $\cot B = \dfrac{5}{4}$ हो, तो दर्शाइए कि $\operatorname{cosec}^2 B = 1 + \cot^2 B$ है।

8. ΔABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C = 90^\circ$ है। यदि $\tan A = \dfrac{3}{2}$ हो, तो $\sin B$ तथा $\tan B$ के मान ज्ञात कीजिए।

9. यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तथा $\tan B = \sqrt{3}$ हो, तो दर्शाइए कि $\cos A \cos B - \sin A \sin B = 0$.

10. यदि $\cot A = \frac{12}{5}$ हो, तो दर्शाइए कि $\tan^2 A - \sin^2 A = \sin^4 A \sec^2 A$.

[संकेत: tan A, sin A तथा sec A के मान ज्ञात कीजिए तथा इन मानों को प्रतिस्थापित करें]

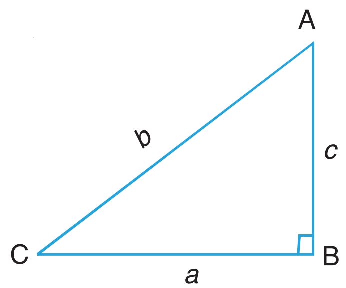
11. आकृति 22.24 में, ΔABC, शीर्ष B पर समकोणिक है। यदि AB = *c*, BC = *a* तथा CA = *b*, हो, तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

(i) $\sin A + \cos A = \frac{b+c}{a}$

(ii) $\sin A + \cos A = \frac{a+c}{b}$

(iii) $\sin A + \cos A = \frac{a+b}{c}$

(iv) $\sin A + \cos A = \frac{a+b+c}{b}$



आकृति 22.24

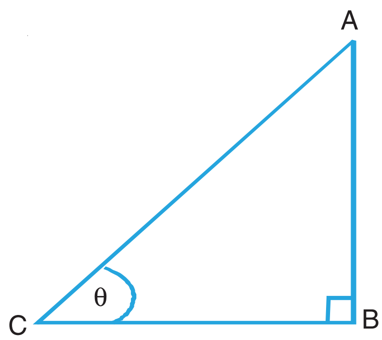
22.4 त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच सम्बन्ध

शीर्ष B पर समकोण ΔABC में, हम जानते हैं कि

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

तथा $$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$



आकृति 22.25

पुनः लिखते हुए , $\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AC} \div \frac{BC}{AC}$

$$= \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ है।

हम इस परिणाम को AB = 3 सेमी, BC = 4 सेमी तथा $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 5^2}$ या 5 सेमी लेकर सत्यापित कर सकते हैं।

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{3}{5},\ \cos\theta = \frac{4}{5} \text{ तथा } \tan\theta = \frac{3}{4}$$

$$\text{अब } \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \tan\theta.$$

इस प्रकार परिणाम सत्यापित हो जाता है।

पुनः $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$ से,

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB} = \operatorname{cosec}\theta$$

अतः $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ या $\operatorname{cosec}\theta \,.\, \sin\theta = 1$

हम कहते हैं कि $\sin\theta$ का व्युत्क्रम $\operatorname{cosec}\theta$ है।

पुनः, $\cos\theta = \dfrac{BC}{AC}$ से,

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC} = \sec\theta$$

अतः $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ या $\sec\theta \,.\, \cos\theta = 1$

अतः हम कहते हैं कि $\cos\theta$ का व्युत्क्रम $\sec\theta$ है।

अन्त में, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ से,

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}} = \frac{BC}{AB} = \cot\theta$$

अतः, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ या $\tan\theta \,.\, \cot\theta = 1$

पुनः $\cot\theta = \frac{1}{\sin\theta/\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

हम कहते हैं कि $\tan\theta$ का व्युत्क्रम $\cot\theta$ है।

इस प्रकार $\text{cosec}\,\theta$, $\sec\theta$ तथा $\cot\theta$ क्रमशः $\sin\theta$, $\cos\theta$ तथा $\tan\theta$ के व्युत्क्रम हैं।

हमने इस प्रकार, निम्न परिणाम स्थापित किए:

(i) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(ii) $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

(iii) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

(iv) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

अब हम उपरोक्त परिणामों को त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करने में प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 22.14: यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}$ तथा $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हो, तो $\text{cosec}\,\theta$, $\sec\theta$ तथा $\tan\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं,

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

तथा $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

उदाहरण 22.15: यदि शीर्ष C पर समकोण त्रिभुज ABC में, $\tan A = 1$ है, तो $\cos B$ का मान ज्ञात कीजिए।

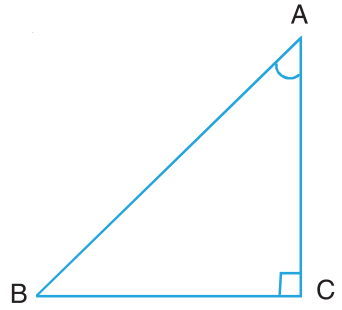
हल: आइए हम ΔABC बनायें जिसमें $\angle C = 90^\circ$.

$\tan A = 1$ (दिया है)

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = 1$$

$\therefore$ BC तथा AC बराबर हैं।

माना $BC = AC = k$



आकृति 22.26

तब $$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$$

$$= \sqrt{k^2 + k^2}$$

$$= \sqrt{2}\,k$$

अब $$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{\sqrt{2}\,k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अतः $$\cos B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

देखें आपने कितना सीखा 22.4

1. यदि $\sin\theta = \frac{1}{2}$ तथा $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हो, तो $\cot\theta$ तथा $\sec\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\tan\theta = \sqrt{3}$ हो, तो $\cos^2\theta + \sin\theta\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. समकोण ΔABC में, कोण C समकोण है तथा $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है।

   $\sin A \sin B + \cos A \cos B$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\operatorname{cosec} A = 2$ हो, तो $\sin A$ तथा $\tan A$ के मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि शीर्ष B पर समकोण ΔABC में, $\tan A = \sqrt{3}$ हो, तो $\tan^2 B \sec^2 A - (\tan^2 A + \cot^2 B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

22.5 सर्वसमिका

हमने पिछली कक्षाओं में, बीजगणित में समीकरणों के बारे में पढ़ा है। याद कीजिए कि जब दो व्यंजकों को चिन्ह '=' से मिलाया जाए, तो हमें एक समीकरण प्राप्त होता है। इस खण्ड में, हम 'सर्वसमिका' की संकल्पना से आपका परिचय करायेंगे। जब हम दो व्यंजकों को समानता के चिन्ह से जोड़ते हैं तो हमें सर्वसमिता प्राप्त होती है। जब हम यह कहते हैं कि दो व्यंजकों को चिन्ह '=' से जोड़ने पर समीकरण या सर्वसमिका प्राप्त होती है तो दोनों में क्या अन्तर है।

दोनों में मुख्य अंतर यह है कि चर में समीकरण चर के कुछ मानों के लिए सत्य होता है जबकि चर में वह समीकरण जो चर के प्रत्येक मान के लिए सत्य होता है, सर्वसमिका कहलाता है।

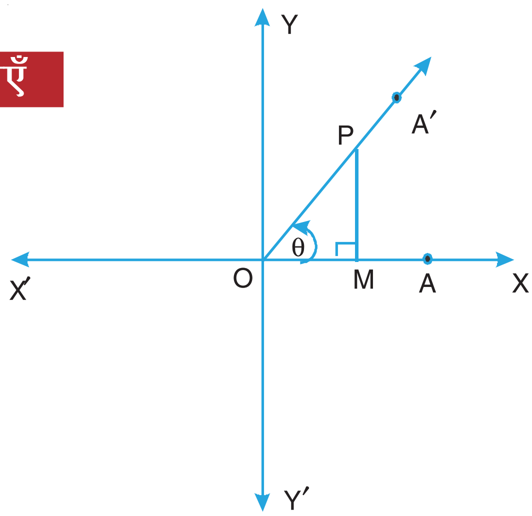
इस प्रकार $x^2 - 2x + 1 = 0$ एक समीकरण है क्योंकि यह $x = 1$ के लिए सत्य है।

$x^2 - 5x + 6 = 0$ एक समीकरण है क्योंकि यह $x = 2$ तथा $x = 3$ के लिए सत्य है।

यदि हम $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ पर विचार करें, तो यह एक सर्वसमिका हो जाता है क्योंकि यह $x = 2, x = 3, x = 0, x = 10$ इत्यादि सभी के लिए सत्य है अर्थात x के सभी मानों के लिए सत्य है। अगले खंड में हम त्रिकोणमिति में कुछ सर्वसमिकाओं पर विचार करेंगे।

22.6 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

आपने एक कोण, जो एक किरण को प्रारम्भिक स्थिति से अन्तिम स्थिति तक घुमाने से प्राप्त किया जाता है, एक परिभाषा के रूप में सीखा है। आपने इस कोण से जुड़े हुए सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषा भी सीखी है। हम इनको यहाँ फिर से दोहराते हैं।



आकृति 22.27

माना XOX′ तथा YOY′ निर्देशांकों के आयताकार अक्ष हैं। माना अक्ष OX पर कोई बिन्दु A है। अब हम किरण OA को तल में

आरंभिक स्थिति OX से बिन्दु O के गिर्द घड़ी की सुई के विपरीत दिशा में घुमाना प्रारम्भ करते हैं, जब तक कुछ अन्तराल में यह अन्तिम स्थिति OA′ पर न पहुँच जाए। माना $\angle A'OA = \theta$। किरण OA′ पर कोई बिन्दु P लेकर $PM \perp OX$ खींचिए।

समकोण ΔPMO में

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}$$

और $$\cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

दोनों का वर्ग करने तथा जोड़ने पर,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$= \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$$

$$= 1$$

अतः, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ...(1)

हम यह भी जानते हैं कि

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM}$$

और $$\tan\theta = \frac{PM}{OM}$$

दोनों का वर्ग करके घटाने पर,

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2 - \left(\frac{PM}{OM}\right)^2$$

$$= \frac{OP^2 - PM^2}{OM^2}$$

$$= \frac{OM^2}{OM^2}$$ [पाइथागोरस प्रमेय द्वारा $OP^2 - PM^2 = OM^2$]

$$= 1$$

अतः, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ ...(2)

पुनः, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{OP}{PM}$

और $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM}$

दोनों का वर्ग करके घटाने पर

$$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \left(\frac{OP}{PM}\right)^2 - \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$$

$$= \frac{OP^2 - OM^2}{PM^2} = \frac{PM^2}{PM^2}$$

[पाइथागोरस प्रमेय द्वारा, $OP^2 - OM^2 = PM^2$]

$$= 1$$

अतः, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ ...(3)

नोट: बीजगणितीय संक्रियाओं द्वारा, हम सर्वसमिकाओं (1), (2) और (3) को क्रमशः इस प्रकार लिख सकते हैं:

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ या $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ या $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

तथा $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ या $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

अब हम उपरोक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करते हुए, कुछ उदाहरण हल करेंगे।

उदाहरण 22.16: सिद्ध कीजिए कि

$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

हल: बायाँ पक्ष $= \tan\theta + \cot\theta$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \qquad (\Theta\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

= दायाँ पक्ष

अतः, $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

उदाहरण 22.17: सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$$

हल: बायाँ पक्ष

$$= \frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1+\cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + (1+\cos A)^2}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A + 1 + \cos^2 A + 2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 + 2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{1+1+2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{2+2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{2\,(1+\cos A)}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{2}{\sin A}$$

$$= 2\operatorname{cosec} A$$

= दायाँ पक्ष

अतः, $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{1+\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$

उदाहरण 22.18: सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1-\sin A}{1+\sin A} = (\sec A - \tan A)^2$$

हल: दायाँ पक्ष $= (\sec A - \tan A)^2$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \frac{(1 - \sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1 - \sin A)^2}{1 - \sin^2 A} \qquad (\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A)$$

$$= \frac{(1 - \sin A)^2}{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}$$

$$= \frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}$$

= बायाँ पक्ष

अतः, $\dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A} = (\sec A - \tan A)^2$

दूसरी विधि

हम बायें पक्ष से प्रारम्भ कर, इस प्रश्न को निम्न विधि से भी हल कर सकते हैं:

बायाँ पक्ष $= \dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A}$

$$= \frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} \times \frac{1 - \sin A}{1 - \sin A}$$

$$= \frac{(1 - \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}$$

$$= \frac{(1 - \sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$= \left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= (\sec A - \tan A)^2$$

= दायाँ पक्ष

टिप्पणी: उपरोक्त उदाहरणों से त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं पर प्रश्नों को हल करने की निम्न विधि प्राप्त करते हैं:

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं पर प्रश्न हल करने की विधि

चरण 1: बायें पक्ष या दायें पक्ष को सुविधा अनुसार चुन लीजिए।

चरण 2: बायें पक्ष (या दायें पक्ष) को सरल करने के लिए, भिन्न सर्वसमिकाओं का प्रयोग कीजिए और दूसरे पक्ष के परिणाम पर पहुंचिए।

चरण 3: यदि आप बायें पक्ष (या दायें पक्ष) के परिणाम पर नहीं पहुंचते, तो एक उचित परिणाम पर पहुंचकर, दूसरे पक्ष को भी सरल कर लीजिए तथा पहले प्राप्त परिणाम पर पहुंच जाइए।

चरण 4: क्योंकि दोनों पक्ष की सर्वसमिकाएं एक ही सर्वसमिका के बराबर सिद्ध हो जाती हैं, दोनों पक्ष भी समान होंगे।

अब हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं पर कुछ और प्रश्न हल करते हैं।

उदाहरण 22.19: सिद्ध कीजिए कि:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

हल: बायां पक्ष $= \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}} \times \frac{\sqrt{1+\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{1+\sin\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{1+\sin\theta} \qquad (\because 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta)$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \text{दायां पक्ष}$$

अतः, $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

उदाहरण 22.20: सिद्ध कीजिए कि

$$\cos^4 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$$

हल: बायां पक्ष $= \cos^4 A - \sin^4 A$

$= (\cos^2 A)^2 - (\sin^2 A)^2$

$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)$

$= \cos^2 A - \sin^2 A \qquad (\because \cos^2 A + \sin^2 A = 1)$

= दायां पक्ष

पुनः $\cos^2 A - \sin^2 A = (1-\sin^2 A) - \sin^2 A \qquad (\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A)$

$= 1 - 2\sin^2 A$

= दायां पक्ष

अतः $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

उदाहरण 22.21: सिद्ध कीजिए कि

$$\sec A\,(1-\sin A)(\sec A + \tan A) = 1$$

हल: बायां पक्ष $= \sec A\,(1-\sin A)(\sec A + \tan A)$

$$= \frac{1}{\cos A}(1-\sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$$

$= 1$ = दायां पक्ष

अतः, $\sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A) = 1$

उदाहरण 22.22: सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$$

हल: बायाँ पक्ष $= \dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad (\because 1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta$$

$$= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$$

= दायां पक्ष

पुनः $\dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$

$$= \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

= दायाँ पक्ष

अतः, $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

उदाहरण 22.23: यदि $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ हो, तो दर्शाइए कि

$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta.$$

हल: हमें दिया गया है: $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

या $\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$

या $\cos\theta = (\sqrt{2}+1)\sin\theta$

या $\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} = \sin\theta$

या $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} \times \dfrac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}$

या $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta}{2-1}$

या $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

अतः, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta.$

उदाहरण 22.24: यदि $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$ हो, तो दर्शाइए कि

$$\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$$

हल: हमें दिया गया है, $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$

या $\tan^2\theta\,(\tan^2\theta + 1) = 1$

या $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \cot^2\theta$

या $\sec^2\theta = \cot^2\theta \qquad (1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$

या $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

या $\sin^2\theta = \cos^4\theta$

या $1 - \cos^2\theta = \cos^4\theta \qquad (\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta)$

या $\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$

देखें आपने कितना सीखा 22.5

निम्नलिखित सर्वसमिकाओं में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए:

1. $(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\sin^2\theta = \cos^2\theta$
2. $\sin^4 A + \sin^2 A\cos^2 A = \sin^2 A$
3. $\cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta) = 1$
4. $(1 + \tan^2\theta)\sin^2\theta = \tan^2\theta$
5. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{\sin A}{1-\cos A} = 2\operatorname{cosec} A$
6. $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$
7. $\sqrt{\dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}} = \dfrac{\cos A}{1+\sin A}$
8. $(\sin A - \cos A)^2 + 2\sin A\cos A = 1$
9. $\cos^4\theta + \sin^4\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\cos^2\theta - 1)^2$
10. $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$

11. $(\text{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cos\theta) = 1$

12. $\sin A(1 + \tan A) + \cos A(1 + \cot A) = \sec A + \text{cosec}\,A$

13. $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A} = (\text{cosec}A - \cot A)^2$

14. $\dfrac{\tan A}{1-\cot A} + \dfrac{\cot A}{1-\tan A} = 1 + \sec A\,\text{cosec}A$

15. $\dfrac{\cot A + \text{cosec}A - 1}{\cot A - \text{cosec}A + 1} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

$$= \frac{\sin A}{1-\cos A}$$

16. यदि $\sin^2\theta + \sin\theta = 1$, तो दर्शाइए कि

$$\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$$

निम्नलिखित प्रश्नों में से दिये गए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए (17 - 20):

17. $(\sin A + \cos A)^2 - 2\sin A\cos A$ बराबर है

(i) 0 (ii) 2 (iii) 1 (iv) $\sin^2 A - \cos^2 A$

18. $\sin^4 A - \cos^4 A$ बराबर है

(i) 1 (ii) $\sin^2 A - \cos^2 A$ (iii) 0 (iv) $\tan^2 A$

19. $\sin^2 A - \sec^2 A + \cos^2 A + \tan^2 A$ बराबर है

(i) 0 (ii) 1 (iii) $\sin^2 A$ (iv) $\cos^2 A$

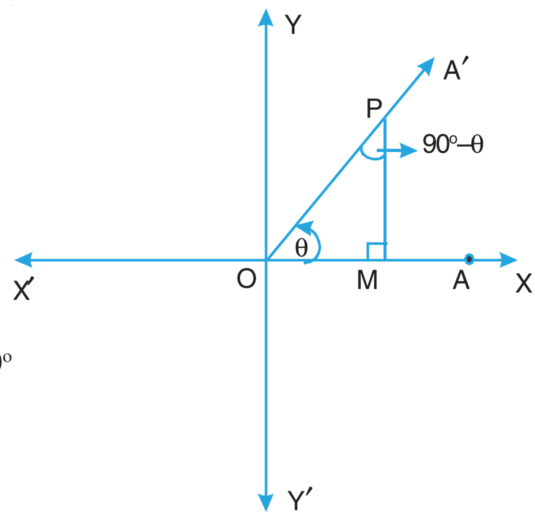
20. $(\sec A - \tan A)(\sec A + \tan A) - (\text{cosec}\,A - \cot A)(\text{cosec}\,A + \cot A)$ बराबर है

(i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\dfrac{1}{2}$

22.7 पूरक कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

ज्यामिति में, हमने पूरक तथा सम्पूरक कोणों के बारे में पढ़ा है। याद कीजिए कि दो कोण पूरक होते हैं यदि उनका जोड़ 90^0 है। यदि दो कोणों A तथा B का योग 90^o हो, तो $\angle A$ तथा $\angle B$ पूरक कोण होते हैं तथा प्रत्येक कोण, दूसरे कोण का पूरक होता है। इस प्रकार 20^o तथा 70^o के कोण पूरक कोण हैं। 20^o का कोण 70^o के कोण का पूरक है तथा विलोमतः 70^0 का कोण 20^0 के कोण का पूरक है।

माना X′OX तथा YOY′ दो आयताकार अक्ष हैं। माना OX पर कोई बिन्दु A है। माना किरण OA घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में घूमती हुई प्रारम्भिक स्थिति OX से कोण θ बनाती है। माना ∠ POM = θ। OX पर PM लम्ब खींचिए। तब ΔPMO एक समकोण त्रिभुज है।



आकृति 22.28

अब, $\angle POM + \angle OPM + \angle PMO = 180^\circ$

या $\angle POM + \angle OPM + 90^\circ = 180^\circ$

या $\angle POM + \angle OPM = 90^\circ$

$\therefore$ $\angle OPM = 90^\circ - \angle POM = 90^\circ - \theta$

इस प्रकार, ∠OPM तथा ∠POM पूरक कोण हैं।

अब समकोण त्रिभुज PMO में,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}, \cos\theta = \frac{OM}{OP} \text{ तथा } \tan\theta = \frac{PM}{OM}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}, \sec\theta = \frac{OP}{OM} \text{ तथा } \cot\theta = \frac{OM}{PM}$$

अब (90°–θ) के कोण के लिए,

समकोण ΔOPM में,

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \frac{PM}{OM} = \tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

टिप्पणी

तथा $\sec(90^\circ - \theta) = \dfrac{OP}{PM} = \operatorname{cosec}\theta$

उपरोक्त 6 परिणाम, पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात कहलाते हैं। उदाहरणार्थ

$\sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$ अर्थात $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$

$\tan(90^\circ - 40^\circ) = \cot 40^\circ$ अर्थात $\tan 50^\circ = \cot 40^\circ$ इत्यादि

आइए उपरोक्त परिणामों के प्रयोग से कुछ प्रश्न हल करें।

उदाहरण 22.25: सिद्ध कीजिए कि $\tan 13^\circ = \cot 77^\circ$ है।

हल: दायां पक्ष $= \cot 77^\circ$

$= \cot(90^\circ - 13^\circ)$

$= \tan 13^\circ$ ....[$\because \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$]

= बायां पक्ष

अतः, $\tan 13^\circ = \cot 77^\circ$

उदाहरण 22.26: मान ज्ञात कीजिए: $\sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ$

हल: $\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ)$

$= \sin 40^\circ$ ....[$\because \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$]

$\therefore$ $\sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ = \sin^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ = 0$

उदाहरण 22.27: मान ज्ञात कीजिए: $\dfrac{\cos 41^\circ}{\sin 49^\circ} + \dfrac{\sec 37^\circ}{\operatorname{cosec} 53^\circ}$

हल: $\sin 49^\circ = \sin(90^\circ - 41^\circ) = \cos 41^\circ$ ...[$\because \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$]

तथा $\operatorname{cosec} 53^\circ = \operatorname{cosec}(90^\circ - 37^\circ) = \sec 37^\circ$ ...[$\because \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$]

$\therefore$ $\dfrac{\cos 41^\circ}{\sin 49^\circ} + \dfrac{\sec 37^\circ}{\operatorname{cosec} 53^\circ} = \dfrac{\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} + \dfrac{\sec 37^\circ}{\sec 37^\circ}$

$= 1 + 1 = 2$

उदाहरण 22.28: दर्शाइए कि

$3\sin 17^\circ \sec 73^\circ + 2\tan 20^\circ \tan 70^\circ = 5$

हल: $3\sin 17^\circ \sec 73^\circ + 2\tan 20^\circ \tan 70^\circ$

$= 3\sin 17^\circ \sec(90^\circ - 17^\circ) + 2\tan 20^\circ \tan(90^\circ - 20^\circ)$

$= 3 \sin 17^o \operatorname{cosec} 17^o + 2 \tan 20^o \cot 20^o$

...[Θ $\sec(90^o - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$ and $\tan(90^o - \theta) = \cot\theta$]

$$= 3\sin 17^o.\frac{1}{\sin 17^o} + 2\tan 20^o.\frac{1}{\tan 20^o}$$

$= 3 + 2 = 5$

उदाहरण 22.29: दर्शाइए कि $\tan 7^o \tan 23^o \tan 67^o \tan 83^o = 1$

हल: $\tan 67^o = \tan(90^o - 23^o) = \cot 23^o$

तथा $\tan 83^o = \tan(90^o - 7^o) = \cot 7^o$

अब. बायां पक्ष $= \tan 7^o \tan 23^o \tan 67^o \tan 83^o$

$= \tan 7^o \tan 23^o \cot 23^o \cot 7^o$

$= (\tan 7^o \cot 7^o)(\tan 23^o \cot 23^o)$

$= 1\ .1 = 1$

= दायां पक्ष

अतः, $\tan 7^o \tan 23^o \tan 67^o \tan 83^o = 1$

उदाहरण 22.30: यदि $\tan A = \cot B$, हो, तो सिद्ध कीजिए $A + B = 90^o$.

हल: हमें दिया गया है

$\tan A = \cot B$

या $\tan A = \tan(90^o - B)$ ... [Θ $\cot\theta = \tan(90^o - \theta)$]

$\therefore$ $A = 90^o - B$

या $A + B = 90^o$

उदाहरण 22.31: ΔABC के लिए, दर्शाइए कि $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)$, जबकि A, B और C, त्रिभुज ABC के आन्तरिक कोण हैं।

हल: हम जानते हैं कि त्रिभुज के कोणों का जोड़ 180^o होता है।

$\therefore$ $A + B + C = 180^o$

या $B + C = 180^o - A$

या $$\frac{B+C}{2} = 90^o - \frac{A}{2}$$

$\therefore \qquad \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$

या $\qquad \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)$

उदाहरण 22.32: सिद्ध कीजिए: $\frac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90^\circ - \theta)} = 2$

हल: बायां पक्ष $= \frac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90^\circ - \theta)}$

$= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$ ... [$\because$ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ and $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$]

$= 1 + 1 = 2$

= दायां पक्ष

अतः, $\frac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90^\circ - \theta)} = 2$

उदाहरण 22.33: सिद्ध कीजिए: $\frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)} + \frac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sec(90^\circ - \theta)} = 1$

हल: बांया पक्ष $= \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)} + \frac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sec(90^\circ - \theta)}$

$= \frac{\cos\theta}{\sec\theta} + \frac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta}$ ...[$\because$ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$,

$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$ and $\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$]

$= \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} + \frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta}} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

= दायां पक्ष

अतः, $\frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)} + \frac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sec(90^\circ - \theta)} = 1$

उदाहरण 22.34: सरल कीजिए

$$\frac{\cos(90^\circ-\theta)\sec(90^\circ-\theta)\tan\theta}{\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)\sin(90^\circ-\theta)\cot(90^\circ-\theta)}+\frac{\tan(90^\circ-\theta)}{\cot\theta}$$

हल: दिया गया व्यंजक

$$=\frac{\cos(90^\circ-\theta)\sec(90^\circ-\theta)\tan\theta}{\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)\sin(90^\circ-\theta)\cot(90^\circ-\theta)}+\frac{\tan(90^\circ-\theta)}{\cot\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta\operatorname{cosec}\theta\tan\theta}{\sec\theta\cos\theta\tan\theta}+\frac{\cot\theta}{\cot\theta}\quad \ldots[\because \sin\theta\,.\operatorname{cosec}\theta=1 \text{ and } \sec\theta\,.\cos\theta=1]$$

$= 1 + 1$

$= 2$

उदाहरण 22.35: $\tan 68^\circ + \sec 68^\circ$ को 0° से 45° के बीच के कोणों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$

तथा $\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore$ $\tan 68^\circ = \tan(90^\circ - 22^\circ) = \cot 22^\circ$

तथा $\sec 68^\circ = \sec(90^\circ - 22^\circ) = \operatorname{cosec} 22^\circ$

अतः $\tan 68^\circ + \sec 68^\circ = \cot 22^\circ + \operatorname{cosec} 22^\circ$.

टिप्पणी: पूरक कोणों के प्रश्नों में, प्रायः हम 45° से बड़े कोण को उसके पूरक कोण में बदलते हैं।

उदाहरण 22.36: यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$ हो, जबकि 2A एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल: हमें दिया गया है $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$

या $\cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$ ...[$\because$ $\cot(90^\circ - 2A = \tan 2A$]

$\therefore$ $90^\circ - 2A = A - 18^\circ$

या $3A = 90^\circ + 18^\circ$

या $3A = 108^\circ$

या $A = 36^\circ$

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 22.6

1. दर्शाइए कि

(i) $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$

(ii) $\sin^2 11^\circ - \cos^2 79^\circ = 0$

(iii) $\cos^2 51^\circ - \sin^2 39^\circ = 0$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\dfrac{3\sin 19^\circ}{\cos 71^\circ}$ (ii) $\dfrac{\tan 65^\circ}{2\cot 25^\circ}$ (iii) $\dfrac{\cos 89^\circ}{3\sin 1^\circ}$

(iv) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ (v) $\dfrac{3\sin 5^\circ}{\cos 85^\circ} + \dfrac{2\tan 33^\circ}{\cot 57^\circ}$

(vi) $\dfrac{\cot 54^\circ}{\tan 36^\circ} + \dfrac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ} - 2$

(vii) $\sec 41^\circ \sin 49^\circ + \cos 49^\circ \operatorname{cosec} 41^\circ$

(viii) $\dfrac{\cos 75^\circ}{\sin 15^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\left(\dfrac{\sin 47^\circ}{\cos 43^\circ}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 43^\circ}{\sin 47^\circ}\right)^2$

(ii) $\dfrac{\cos^2 20^o + \cos^2 70^o}{3\left(\sin^2 59^o + \sin^2 31^o\right)}$

4. सिद्ध कीजिए:

(i) $\sin\theta \cos(90^\circ - \theta) + \cos\theta \sin(90^\circ - \theta) = 1$

(ii) $\cos\theta \cos(90^\circ - \theta) - \sin\theta \sin(90^\circ - \theta) = 0$

(iii) $\dfrac{\cos(90^\circ - \theta)}{1 + \sin(90^\circ - \theta)} + \dfrac{1 + \sin(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ - \theta)} = 2\operatorname{cosec}\theta$

(iv) $\sin(90^\circ - \theta)\cos(90^\circ - \theta) = \dfrac{\tan(90^\circ - \theta)}{1 + \tan^2(90^\circ - \theta)}$

(v) $\tan 45^\circ \tan 13^\circ \tan 77^\circ \tan 85^\circ = 1$

(vi) $2 \tan 15^\circ \tan 25^\circ \tan 65^\circ \tan 75^\circ = 2$

(vii) $\sin 20^\circ \sin 70^\circ - \cos 20^\circ \cos 70^\circ = 0$

5. दर्शाइए कि $\sin (50^\circ + \theta) - \cos (40^\circ - \theta) = 0$

6. यदि $\sin A = \cos B$ जबकि A तथा B न्यूनकोण हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$.

7. ΔABC में, सिद्ध कीजिए:

(i) $\tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cot\left(\dfrac{A}{2}\right)$

(ii) $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{C}{2}\right)$

8. $\tan 59^\circ + \text{cosec } 85^\circ$ को 0° से 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

9. $\sec 46^\circ - \cos 87^\circ$ को 0° से 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

10. $\sec^2 62^\circ + \sec^2 69^\circ$ को 0° से 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

निम्नलिखित प्रश्नों के लिए सही उत्तर चुनिए (11-12):

11. $\dfrac{\sin 40^\circ}{2\cos 50^\circ} - \dfrac{2\sec 41^\circ}{3\text{cosec } 49^\circ}$ का मान है

(i) -1 (ii) $\dfrac{1}{6}$ (iii) $-\dfrac{1}{6}$ (iv) 1

12. यदि $\sin (\theta + 36^\circ) = \cos \theta$, जबकि $\theta + 36^\circ$ एक न्यून कोण है, तो θ का मान होगा

(i) 54° (ii) 18° (iii) 21° (iv) 27°

आइए दोहराएँ

- एक समकोण त्रिभुज ABC में हम त्रिकोणमितीय अनुपात इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$\sin \theta = \frac{\theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

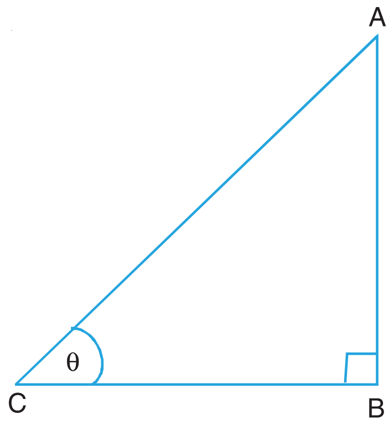
$$\cos\theta = \frac{\theta \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\theta \text{ की संलग्न भुजा}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cot\theta = \frac{\theta \text{ की संलग्न भुजा}}{\theta \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\theta \text{ की संलग्न भुजा}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\theta \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{AB}$$



- भिन्न–भिन्न त्रिकोणमितीय अनुपातों में निम्न संबंध होते हैं:

(i) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (ii) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(iii) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ (iv) $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

(v) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ हैं:

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(ii) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

(iii) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

- दो कोण, जिनका योग 90° हो, पूरक कोण कहलाते हैं।
- $\sin(90^\circ - A) = \cos A$, $\cos(90^\circ - A) = \sin A$ और $\tan(90^\circ - A) = \cot A$.
- $\text{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$, $\sec(90^\circ - A) = \text{cosec}\,A$ तथा $\cot(90^\circ - A) = \tan A$

सहायक वैबसाइट

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld:wolfram.com

आइए अभ्यास करें

1. यदि $\sin A = \frac{4}{5}$ हो, तो $\cos A$ तथा $\tan A$ के मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\tan A = \frac{20}{21}$ हो, तो $\operatorname{cosec} A$ तथा $\sec A$ के मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\cot\theta = \frac{3}{4}$ हो, तो $\sin\theta + \cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\sec\theta = \frac{m}{n}$ हो, तो $\sin\theta$ तथा $\tan\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\cos\theta = \frac{3}{5}$ हो, तो $\frac{\sin\theta\tan\theta - 1}{2\tan^2\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\sec\theta = \frac{5}{4}$ हो, तो $\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि $\tan A = 1$ तथा $\tan B = \sqrt{3}$ हो, तो $\cos A\cos B - \sin A\sin B$ का मान ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित में से प्रत्येक सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए (प्रश्न 8 –20):

8. $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = \cos\theta.$

9. $\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sec\theta}$

10. $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2$

11. $\frac{\tan\theta + \sin\theta}{\tan\theta - \sin\theta} = \frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}$

12. $\frac{\tan A + \cot B}{\cot A + \tan B} = \tan A\cot B$

13. $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \operatorname{cosec} A + \cot A$

14. $\sqrt{\frac{\operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec} A - 1}} = \frac{\cos A}{1-\sin A}$

15. $\sin^3 A - \cos^3 A = (\sin A - \cos A)(1 + \sin A \cos A)$

16. $\dfrac{\cos A}{1 - \tan A} + \dfrac{\sin A}{1 - \cot A} = \cos A + \sin A$

17. $\sqrt{\dfrac{\sec A - 1}{\sec A + 1}} + \sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = 2\operatorname{cosec} A$

18. $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

19. $(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

20. $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1 = 0$

21. यदि $\sec\theta + \tan\theta = p$ हो, तो दर्शाइए कि $\sin\theta = \dfrac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$ है।

22. सिद्ध कीजिए : $\dfrac{\cos(90^\circ - A)}{1 + \sin(90^\circ - A)} + \dfrac{1 + \sin(90^\circ - A)}{\cos(90^\circ - A)} = 2\sec(90^\circ - A)$

23. सिद्ध कीजिए : $\dfrac{\sin(90^\circ - A).\cos(90^\circ - A)}{\tan A} = \sin^2(90^\circ - A)$

24. यदि $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ तथा $\theta + \alpha = 90^\circ$ हो, तो $\cot\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

25. यदि $\cos(2\theta + 54^\circ) = \sin\theta$ तथा $(2\theta + 54^\circ)$ एक न्यून कोण है, तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

26. यदि $\sec Q = \operatorname{cosec} P$ तथा P और Q न्यून कोण हैं, तो दर्शाइए कि $P + Q = 90^\circ$ है।

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

22.1

1. (i) $\sin\theta = \dfrac{5}{13}, \cos\theta = \dfrac{12}{13}, \tan\theta = \dfrac{5}{12}$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{13}{5}, \sec\theta = \dfrac{13}{12}$ और $\cot\theta = \dfrac{12}{5}$

(ii) $\sin\theta = \dfrac{3}{5}, \cos\theta = \dfrac{4}{5}, \tan\theta = \dfrac{3}{4}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$ और $\cot\theta = \frac{4}{3}$

(iii) $\sin\theta = \frac{24}{25}$, $\cos\theta = \frac{7}{25}$, $\tan\theta = \frac{24}{7}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{25}{24}$, $\sec\theta = \frac{25}{7}$ और $\cot\theta = \frac{7}{24}$

(iv) $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$ और $\cot\theta = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{5}{\sqrt{41}}$, $\cos A = \frac{4}{\sqrt{41}}$ और $\tan A = \frac{5}{4}$

3. $\sin C = \frac{40}{41}$, $\cot C = \frac{9}{40}$, $\cos A = \frac{40}{41}$ और $\cot A = \frac{40}{9}$

4. $\sec C = \sqrt{2}$, $\text{cosec}\,C = \sqrt{2}$ और $\cot C = 1$

5. (iv)

6. (ii)

22.2

1. $\sin C = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$ और $\tan C = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{24}{25}$, $\text{cosec}\,A = \frac{25}{24}$ और $\cot A = \frac{7}{24}$

3. $\sec P = \sqrt{2}$, $\cot P = 1$, और $\text{cosec}\,P = \sqrt{2}$

4. $\tan R = \sqrt{3}$, $\text{cosec}\,R = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin P = \frac{1}{2}$ और $\sec P = \frac{2}{\sqrt{3}}$

5. $\cot\theta = \frac{24}{7}$, $\sin\theta = \frac{7}{25}$, $\sec\theta = \frac{25}{24}$ और $\tan\theta = \frac{7}{24}$

6. $\sin P = \frac{2\sqrt{6}}{7}, \cos P = \frac{5}{7}, \sin R = \frac{5}{7}$ और $\cos R = \frac{2\sqrt{6}}{7}, \sin P - \cos R = 0$

7. (iii)

22.3

1. $\cos\theta = \frac{21}{29}$ और $\tan\theta = \frac{20}{21}$

2. $\sin\theta = \frac{24}{25}$ और $\cos\theta = \frac{7}{25}$

3. $\sin A = \frac{24}{25}$ और $\tan A = \frac{24}{7}$

4. $\cot\theta = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ और $\operatorname{cosec}\theta = \frac{n}{\sqrt{n^2 - m^2}}$

5. $-\frac{256}{135}$

6. $\frac{27}{8}$

7. $\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}}$ और $\tan B = \frac{2}{3}$

11. (ii)

22.4

1. $\cot\theta = \sqrt{3}$ और $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

2. $\frac{3}{4}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sin A = \frac{1}{2}$ और $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5. $-\frac{14}{3}$

22.5

17. (iii)

18. (ii)

19. (i)

20. (iii)

22.6

1. (i) 3 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) 0

   (v) 5 (vi) 0 (vii) 2 (viii) 1

3. (i) 2 (ii) $\frac{1}{3}$

8. $\cot 31^\circ + \sec 5^\circ$

9. $\operatorname{cosec} 44^\circ - \sin 3^\circ$

10. $\operatorname{cosec}^2 28^\circ + \operatorname{cosec}^2 21^\circ$

11. (ii)

12. (iv)

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. $\cos A = \frac{3}{5}$ और $\tan A = \frac{4}{3}$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{29}{20}$ और $\sec A = \frac{29}{21}$

3. $\frac{7}{5}$

4. $\sin\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$ और $\tan\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{n}$

5. $\frac{3}{160}$

6. $\frac{3}{7}$

7. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

24. $\frac{3}{4}$

25. 12^{o}