211hi03

3

बीजीय व्यंजक तथा बहुपद

अब तक, आप अंकगणितीय संख्याओं जिनमें प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, भिन्नात्मक संख्याएँ, इत्यादि सम्मिलित हैं, का प्रयोग करते रहे हैं। इन संख्याओं पर आप मूलभूत संक्रियाएँ भी प्रयोग मे लाते रहे हैं। इस पाठ में, हम आपका परिचय बीजगणितीय संख्याओं तथा बीजगणित की कुछ अन्य मौलिक संकल्पनाओं जैसे अचर, चर, बीजीय व्यंजक, विशिष्ट बीजीय व्यंजक, जो बहुपद कहलाते हैं, तथा इन पर कुछ मूलभूत संक्रियाओं से करायेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे किः

- एक व्यंजक में चर तथा अचर की पहचान कर सकें;
- बीजीय व्यंजक के उदाहरण दे सकें;
- एक बहुपद को एक बीजीय व्यंजक के रूप में समझ तथा पहचान सकें;
- एक तथा दो चरों में बहुपदों के प्रकारों के उदाहरण दे सकें;
- बहुपद के सजातीय (समान) तथा विजातीय (असमान) पदों की पहचान कर सकें;
- एक बहुपद की घात ज्ञात कर सकें।
- एक बहुपद के शून्यों को सम्मिलित करते हुए, दिये हुए चर (चरों) के मान (मानों) के लिए बहुपद का मान ज्ञात कर सकें;
- बहुपद पर चारों मूलभूत संक्रियाएँ कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- विभिन्न संख्याओं के निकाय और उन पर चारों मूलभूत संक्रियाओं का ज्ञान।
- प्राथमिक तथा उच्चतर प्राथमिक स्तरों की गणित की सामान्य संकल्पनाओं का ज्ञान।

3.1 बीजगणित से परिचय

आप संख्याओं 0, 1, 2, 3, ..., $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, ...\sqrt{2}, ...$इत्यादि तथा इन पर योग (+), घटा (–), गुणन (×) तथा भाग (÷) की संक्रियाओं से पहले से ही परिचित हैं। कभी कभी अक्षरों, जो **अक्षर संख्याएँ** कहलाती हैं, का भी संख्याओं को निरूपित करने के लिए प्रयोग किया जाता है।

मान लीजिए कि हम कहना चाहते हैं कि ''एक पुस्तक का मूल्य ₹ 20 है।''

गणित में हम लिखते हैं: एक पुस्तक का मूल्य = ₹ 20। बीजगणित में हम इस प्रकार लिखते हैं:

एक पुस्तक का मूल्य (₹ में) x है। इस प्रकार, x एक संख्या को प्रदर्शित करता है।

इसी प्रकार, अक्षर a, b, c, x, y, z, इत्यादि, कुर्सियों, मेजों, बंदरों, कुत्तों, गायों, वृक्षों, इत्यादि की संख्याओं को प्रदर्शित करने के लिए प्रयोग किये जा सकते हैं। अक्षरों के प्रयोग से हम अधिक व्यापक रूप में सोच सकते हैं।

आइए एक उदाहरण पर विचार करें:

आप जानते हैं कि यदि किसी वर्ग की एक भुजा 3 इकाई है, तो इस का परिमाप 4 × 3 इकाई होता है। बीजगणित में इसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं:

$$p = 4\,s$$

जबकि p परिमाप की इकाइयों की संख्या तथा s वर्ग की भुजा की इकाइयों की संख्या को प्रदर्शित करता है।

अंकगणित तथा बीजगणित की भाषाओं की तुलना करने पर हम पाते हैं कि बीजगणित की भाषा

(a) अंकगणित की भाषा से अधिक स्पष्ट है।

(b) अंकगणित की भाषा से अधिक व्यापक है।

(c) समझने में सरल है तथा प्रश्नों के हलों को आसान बना देती है।

तुलनात्मक रूप के कुछ अन्य उदाहरण उपरोक्त निष्कर्षों की पुष्टि करते हैं।

शाब्दिक कथन	बीजीय कथन
(i) एक संख्या में 3 बढ़ाने पर 8 प्राप्त होता है।	$a + 3 = 8$
(ii) संख्या में स्वयं को जोड़ने पर 12 मिलता है।	$x + x = 12$, या $2x = 12$
(iii) दूरी = गति × समय	$d = s \times t$, जिसे $d = st$ लिखा जाता है।
(iv) एक संख्या को स्वयं से गुणा करने के बाद 5 जोड़ने पर 9 मिलता है।	$b \times b + 5 = 9$, या $b^2 + 5 = 9$

(v) दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 30 है। $y \times (y + 1) = 30$, या $y\,(y + 1) = 30$, जबकि y एक प्राकृत संख्या है।

क्योंकि अक्षर संख्याओं का अंकगणितीय संख्याओं को व्यक्त करने के लिए प्रयोग किया जाता है, अतः संक्रियाओं +, –, × तथा ÷ का बीजगणित में वही अर्थ है जो इनका अंकगणित में है। बीजगणित में गुणन के चिन्ह को प्रायः लुप्त रखा जाता है। जैसे हम $5 \times a$ को 5a तथा $a \times b$ को ab द्वारा व्यक्त करते हैं।

3.2 अचर तथा चर

वर्ष 2009 के महीनों जनवरी, फरवरी, मार्च...., दिसम्बर पर विचार कीजिए। यदि हम 'वर्ष 2009' को 'a' द्वारा तथा 'एक मास' को x द्वारा प्रदर्शित करें, तो इस स्थिति में 'a' (वर्ष 2009) एक निश्चित संख्या है तथा x जनवरी, फरवरी, ... दिसम्बर में से कोई भी हो सकता है। यहाँ पर x निश्चित नहीं है। इसका मान बदलता रहता है। ऐसी अवस्था में हम 'a' को **अचर** तथा 'x' को **चर** कहते हैं।

इसी प्रकार, जब हम कक्षा X के विद्यार्थियों पर विचार करते हैं और कक्षा X को हम 'b' द्वारा तथा एक विद्यार्थी को 'y' द्वारा प्रदर्शित करते हैं, तो इस स्थिति में b अचर है और y एक चर राशि है क्योंकि यह कक्षा X का कोई एक विद्यार्थी हो सकता है।

आइए एक अन्य स्थिति पर विचार करें। यदि एक विद्यार्थी एक हॉस्टल में रहता है, तो उसे निश्चित कमरे का किराया (मान लीजिए ₹ 1000 प्रतिदिन) देना पड़ता है। भोजन खर्च (मान लीजिए ₹ 100 प्रतिदिन) इस पर निर्भर करता है कि वह कितने दिन भोजन लेता है। इस अवस्था में कमरे का किराया 'अचर' है तथा दिनों की संख्या जब वह भोजन लेता है, चर राशि है।

अब, निम्नलिखित संख्याओं पर विचार कीजिए:

$$4, -14, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{4}{15}, 3x, \frac{21}{8}y, \sqrt{2}z$$

आप जानते हैं कि $4, -14, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$, तथा $-\frac{4}{15}$ वास्तविक संख्याएं हैं, जिनमें से प्रत्येक का मान निश्चित है। $3x, \frac{21}{8}y$ तथा $\sqrt{2}z$ में क्रमशः x, y तथा z अज्ञात राशियां हैं। अतः संख्याएं 4, –14, आदि के समान इनका कोई निश्चित मान नहीं है। इनके मान क्रमश x, y तथा z पर निर्भर करते हैं। इसलिए x, y तथा z चर राशियाँ हैं।

अतः चर एक ऐसी अक्षर संख्या है जिसके विभिन्न मान हो सकते हैं, जबकि अचर का मान निश्चित होता है।

बीजगणित में, प्रायः हम अचर राशियों के लिए a, b, c तथा चर राशियों के लिए x, y, z प्रयुक्त करते हैं। फिर भी संदर्भ से स्पष्ट हो जाएगा कि अक्षर अचर है अथवा चर।

3.3 बीजीय व्यंजक तथा बहुपद

उन व्यंजकों, जिनमें अंकगणितीय संख्याओं, चर राशियों तथा मूलभूत संक्रियाओं के चिन्हों का समावेश होता है, को बीजीय व्यंजक कहते हैं। इस प्रकार $3 + 8$, $8x + 4$, $5y$, $7x - 2y + 6$, $\frac{1}{\sqrt{2x}}, \frac{x}{\sqrt{y-2}}, \frac{ax+by+cz}{x+y+z}$ सभी बीजीय व्यंजक हैं। आप नोट कर सकते हैं कि $3 + 8$ अंकगणितीय तथा बीजीय दोनों प्रकार का व्यंजक है।

एक बीजीय व्यंजक संख्याओं, चरों तथा मूलभूत संक्रियाओं का संयोजन होता है।

+ या – में से एक या अधिक चिह्न बीजीय व्यंजक को कई भागों में विभाजित करते हैं। चिन्ह सहित लिखने में प्रत्येक भाग व्यंजक का **पद** कहलाता है। प्रायः बीजीय व्यंजक के पहले पद के योग के चिन्ह को छोड़ दिया जाता है। उदाहरणार्थ $+x - 5y + 4$ को हम $x - 5y + 4$ लिखते हैं। यहाँ x, $-5y$ तथा $+4$ व्यंजक के तीन पद हैं।

$\frac{1}{3}xy$ में $\frac{1}{3}$ को पद का संख्यात्मक गुणांक और xy का भी गुणांक कहते हैं। x का गुणांक $\frac{1}{3}y$ तथा y का गुणांक $\frac{1}{3}x$ है। जब किसी पद का गुणांक +1 या –1 हो, तो लिखते समय '1' को नहीं लिखा जाता। इस प्रकार, पद x^2y का संख्यात्मक गुणांक 1 और $-x^2y$ का संख्यात्मक गुणांक –1 है।

एक बीजीय व्यंजक, जिसके हर में चर न हो तथा चरों के घातांक पूर्ण संख्याओं में हों तथा विभिन्न पदों के संख्यात्मक गुणांक वास्तविक संख्याएँ हों, बहुपद कहलाता है।

दूसरे शब्दों में,

(i) एक बहुपद के किसी भी पद में चर हर में नहीं होता

(ii) बहुपद के प्रत्येक पद में चर का घातांक ऋणेत्तर पूर्णांक होता है।

(iii) प्रत्येक पद का संख्यात्मक गुणांक वास्तविक संख्या होता है।

इस प्रकार उदाहरणार्थ 5, $3x - y$, $\frac{1}{3}a - b + \frac{7}{2}$ तथा $\frac{1}{4}x^3 - 2y^2 + xy - 8$ सभी बहुपद हैं।

जबकि $x^3 - \frac{1}{x}, \sqrt{x+y}$ तथा $x^{\frac{2}{3}} + 5$ बहुपद नहीं हैं।

$x^2 + 8$ एक चर x में बहुपद है तथा $2x^2 + y^3$ दो चरों x तथा y में बहुपद है। इस पाठ में, हम अपनी चर्चा दो चरों तक के बहुपदों के अध्ययन तक ही सीमित रखेंगे।

एक चर x में एक बहुपद का व्यापक रूप निम्नलिखित है:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

जिसमें $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ वास्तविक संख्याएं हैं, x एक चर है तथा n एक पूर्ण संख्या है। $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ बहुपद के $(n + 1)$ पद हैं।

एक बीजीय व्यंजक या एक बहुपद जिसका एक पद हो, **एकपदी** कहलाता है। इस प्रकार

$-2, 3y, -5x^2, xy, \frac{1}{2}x^2y^3$ सभी एकपदी हैं।

एक बीजीय व्यंजक या बहुपद, जिसके दो पद हों, **द्विपद** कहलाता है। इस प्रकार $5 + x, y^2 - 8x, x^3 - 1$ सभी द्विपद हैं।

एक बीजीय व्यंजक या बहुपद जिसके तीन पद हों, **त्रिपद** कहलाता है। इस प्रकार $x + y + 1, x^2 + 3x + 2, x^2 + 2xy + y^2$ सभी त्रिपद हैं।

एक बहुपद के वे पद, जिनमें समान चर (एक या एक से अधिक) हों और चरों के समान घातांक हों, ***सजातीय (समान) पद*** *कहलाते हैं।*

उदाहरणार्थ व्यंजक

$$3xy + 9x + 8xy - 7x + 2x^2$$

में पद 3xy तथा 8 xy सजातीय पद हैं। इसी प्रकार, पद 9x तथा –7x भी सजातीय हैं, जबकि पद 9x और $2x^2$ सजातीय पद नहीं हैं। जो पद सजातीय पद नहीं होते, वे **विजातीय (असमान) पद** कहलाते हैं। उपरोक्त उदाहरण में पद 3xy तथा –7x विजातीय पद हैं।

ध्यान रखिए कि अंकगणितीय संख्याएं सजातीय पद होते हैं। उदाहरणार्थ, बहुपदों $x^2 + 2x + 3$ तथा $x^3 - 5$ में, 3 तथा – 5 को सजातीय पद लिया जाता है, क्योंकि $3 = 3x^0$ तथा $-5 = -5x^0$.

बहुपद

$$2x^2 - 3xy + 9y^2 - 7y + 8$$

के सभी पद विजातीय हैं, क्योंकि व्यंजक में कोई भी सजातीय पद नहीं है।

उदाहरण 3.1: बहुपद $2x^2y + 5$ में चर तथा अचर लिखिए।

हल: चर : x और y

अचर: 2 तथा 5

उदाहरण 3.2: $8x^2y^3$ में

(i) x^2y^3 (ii) x^2 (iii) y^3

के गुणांक लिखिए।

हल: (i) $8x^2y^3 = 8 \times (x^2y^3)$

$\therefore$ x^2y^3 का गुणांक 8 है।

(ii) $8x^2y^3 = 8y^3 \times (x^2)$

$\therefore$ x^2 का गुणांक $8y^3$ है।

(iii) $8x^2y^3 = 8x^2 \times (y^3)$

$\therefore$ y^3 का गुणांक $8x^2$ है।

उदाहरण 3.3: व्यंजक $3x^2y - \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}y + 2$ के पद लिखिए।

हल: दिये हुए बहुपद के पद हैं:

$3x^2y,\ -\frac{5}{2}x,\ -\frac{1}{3}y,\ +2$

उदाहरण 3.4: निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों में से कौन कौन से बहुपद हैं:

(i) $\frac{1}{2} + x^3 - 2x^2 + \sqrt{6}x$ (ii) $x + \frac{1}{x}$

(iii) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{x} + 6$ (iv) $5 - x - x^2 - x^3$

हल: (i) तथा (iv) बहुपद हैं।

(ii) में, दूसरा पद $\frac{1}{x} = x^{-1}$ है। क्योंकि दूसरे पद में चर x का घातांक ऋणात्मक है, अतः व्यंजक बहुपद नहीं है।

(iii) में, तीसरा पद $-5\sqrt{x} = -5x^{\frac{1}{2}}$ है। क्योंकि तीसरे पद में चर x का घातांक एक भिन्न है, अतः व्यंजक बहुपद नहीं है।

उदाहरण 3.5: निम्नलिखित व्यंजकों में प्रत्येक के सजातीय पद लिखिए।

(i) $x + y + 2$ (ii) $x^2 - 2y - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}y - 8$

(iii) $1 - 2xy + 2x^2y - 2xy^2 + 5x^2y^2$ (iv) $\frac{2}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{3}z + \frac{\sqrt{5}}{3}y + \frac{1}{3}$

हल: (i) इस व्यंजक में कोई सजातीय पद नहीं है।

(ii) x^2 तथा $-\frac{1}{2}x^2$ सजातीय पद है। $-2y$ तथा $\sqrt{3}\,y$ भी सजातीय पद हैं।

(iii) इसमें कोई भी सजातीय पद नहीं है।

(iv) $\frac{2}{\sqrt{3}}y$ तथा $\frac{\sqrt{5}}{3}y$ सजातीय पद हैं।

देखें आपने कितना सीखा 3.1

1. निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए चर तथा अचर लिखिए:

   (i) $1+y$ (ii) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+7$ (iii) $\frac{4}{5}x^2y^3$

   (iv) $\frac{2}{5}xy^5+\frac{1}{2}$ (v) $2x^2+y^2-8$ (vi) $x+\frac{1}{x}$

2. $2x^2y$ में,

   (i) x^2y (ii) x^2 (iii) y

   के गुणांक लिखिए।

3. चर तथा संक्रियाओं के चिन्हों का प्रयोग करके निम्नलिखित शाब्दिक कथनों को बीजीय कथनों में व्यक्त कीजिए:

   (i) एक संख्या से तीन कम 15 के बराबर होता है।

   (ii) एक संख्या से 5 अधिक 22 होता है।

4. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक के पद लिखिए:

   (i) $2+abc$ (ii) $a+b+c+2$ (iii) $x^2y-2xy^2-\frac{1}{2}$

   (iv) $\frac{1}{8}x^3y^2$

5. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक में सजातीय पदों को पहचानिए:

   (i) $-xy^2+x^2y+y^2+\frac{1}{3}y^2x$ (ii) $6a+6b-3ab+\frac{1}{4}a^2b+ab$

   (iii) $ax^2+by^2+2c-a^2x-b^2y-\frac{1}{3}c^2$

6. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों में से कौन कौन से बहुपद हैं?

(i) $\frac{1}{3}x^3 + 1$ (ii) $5^2 - y^2 - 2$ (iii) $4x^{-3} + 3y$

(iv) $5\sqrt{x+y} + 6$ (v) $3x^2 - \sqrt{2}\,y^2$ (vi) $y^2 - \; + 4$

7. निम्नलिखित में एकपदी, द्विपद तथा त्रिपद पहचानिए:

(i) $x^3 + 3$ (ii) x^3y^3 (iii) $2y^2 + 3yz + z^2$

(iv) $5 - xy - 3x^2y^2$ (v) $7 - 4x^2y^2$ (vi) $-8x^3y^3$

3.4 बहुपद की घात

एक पद में चरों के घातांकों का योगफल उस पद की **घात** कहलाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{1}{2}x^2y$ की घात 3 है, क्योंकि x तथा y के घातांकों का योग $2 + 1 = 3$ है। इसी प्रकार, पद $2x^5$ की घात 5 है। शून्येतर अचर, मान लीजिए 3 की घात 0 है, क्योंकि $3 = 3 \times 1 = 3 \times x^0$ तथा $x^0 = 1$ है।

एक बहुपद के कई पद होते हैं जो चिन्ह + या – से अलग होते हैं। **एक बहुपद की घात उस बहुपद के विभिन्न पदों में अधिकतम घात तथा शून्येतर गुणांक वाले पद की घात होती है।**

उदाहरणार्थ,

बहुपद $3x^4y^3 + 7\,xy^5 - 5x^3y^2 + 6xy$ के पदों की घात क्रमशः 7, 6, 5, और 2 है, जिनमें 7 अधिकतम है। अतः इस बहुपद की घात 7 है।

दो घात वाला बहुपद **द्विघात बहुपद** कहलाता है। उदाहरणार्थ $3 - 5x + 4x^2$ तथा $x^2 + xy + y^2$ द्विघात बहुपद हैं। ध्यान रखिए कि शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य (0) ली जाती है।

जब बहुपद के सभी पदों में चर के गुणांक शून्य हों, तो बहुपद शून्य बहुपद कहलाता है। शून्य बहुपद की घात परिभाषित नहीं है।

3.5 बहुपदों के मान ज्ञात करना

हम बहुपद का मान चर के दिए गए मान के लिए ज्ञात कर सकते हैं। आइए हम बहुपद $3x^2 - x + 2$ का मान $x = 2$ के लिए ज्ञात करने की क्रिया को समझें। यहाँ हम अपने को एक चर वाले बहुपदों तक ही सीमित रखेंगे।

चरण 1: चर के स्थान पर दिए गए मान को प्रतिस्थापित कीजिए।

यहाँ पर $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$3 \times (2)^2 - 2 + 2$

चरण 2: चरण 1 में प्राप्त व्यंजक को सरल कीजिए।

$3 \times (2)^2 - 2 + 2 = 3 \times 4 = 12$

अतः जब $x = 2,\ 3x^2 - x + 2 = 12$

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 3.6: मान ज्ञात कीजिए:

(i) $1 - x^5 + 2x^6 + 7x;\ x = \frac{1}{2}$ के लिए

(ii) $5x^3 + 3x^2 - 4x - 4;\ x = 1$ के लिए

हल: (i) $x = \frac{1}{2}$ के लिए दिए हुए बहुपद का मान

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 7 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

(ii) $x = 1$ के लिए दिये हुए बहुपद का मान

$5 \times (1)^3 + 3 \times (1)^2 - 4 \times 1 - 4$

$= 5 + 3 - 4 - 4 = 0$

3.6 बहुपद का शून्यक

चर का वह मान, जिसके लिए एक चर में बहुपद का मान शून्य हो जाए, **बहुपद का शून्यक** कहलाता है। उदाहरण 3.6(ii) में, $x = 1$ के लिए बहुपद $5x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ का मान 0 है। अतः $x = 1$ बहुपद $5x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ का एक शून्यक है।

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 3.7: ज्ञात कीजिए कि क्या दिया गया मान दिए गए बहुपद का शून्यक है:

(i) $x^3 + 3x^2 + 3x + 2;\ \ x = -1$

(ii) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1;\ \ x = 1$

हल: (i) $x = -1$ के लिए, दिये हुए बहुपद का मान

$(-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 2$

$= -1 + 3 - 3 + 2$

$= 1 \ (\neq 0)$

अतः, $x = -1$, दिये हुए बहुपद का शून्यक नहीं है।

(ii) $x = 1$ के लिए, दिये हुए बहुपद का मान

$(1)^4 - 4 \times (1)^3 + 6 \times (1)^2 - 4 \times 1 + 1$

$= 1 - 4 + 6 - 4 + 1$

$= 0$

अतः, $x = 1$ दिये हुए बहुपद का शून्यक है।

देखें आपने कितना सीखा 3.2

1. निम्नलिखित एकपदियों में से प्रत्येक की घात लिखिए:

   (i) $\frac{18}{5}x^7$ (ii) $\frac{7}{8}y^3$ (iii) $10x$ (iv) 27

2. निम्नलिखित एकपदियों को घातों के आरोही क्रम में लिखिए:

   $-3x^6, \frac{2}{9}x^2, 9x, -25x^3, 2.5$

3. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक की घात लिखिए:

   (i) $5x^6y^4 + 1$ (ii) $10^5 + xy^3$ (iii) $x^2 + y^2$ (iv) $x^2y + xy^2 - 3xy + 4$

4. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक का मान उसके सामने लिखे गए चर के मान के लिए ज्ञात कीजिए

   (i) $x^2 - 25$ for $x = 5$ (ii) $x^2 + 3x - 5$ for $x = -2$

   (iii) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{7}{5}$ for $x = -1$ (iv) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 12$ for $x = -2$

5. सत्यापित कीजिए कि $x = 2$ तथा $x = 3$ बहुपद $x^2 - 5x + 6$ के शून्यक हैं।

3.7 बहुपदों का योग तथा व्यवकलन

आप जानते हैं कि बहुपदों में सजातीय तथा विजातीय पद होते हैं। बहुपदों का योग करने के लिए, हम सजातीय पदों को इकट्ठा करके उनका योग कर लेते हैं। इसी प्रकार, घटाने के लिए, हम एक सजातीय पदों में से दूसरे को घटाते हैं। अब प्रश्न उठता है कि हम किस प्रकार सजातीय पदों का योग अथवा व्यवकलन (घटाना) करते हैं। आइए एक उदाहरण लें।

मान लीजिए कि हमें सजातीय पदों $2x$ तथा $3x$ का योग करना है। हम बीजगणित में अंकगणित वाली विधि का ही प्रयोग करते हैं। आप जानते हैं कि

$$5 \times 6 + 5 \times 7 = 5 \times (6 + 7)$$

$$6 \times 5 + 7 \times 5 = (6 + 7) \times 5$$

अतः, $2x + 3x = 2 \times x + 3 \times x$

$$= (2 + 3) \times x$$

$$= 5 \times x$$

$$= 5x$$

इसी प्रकार, $2xy + 4\,xy = (2 + 4)\,xy = 6xy$

$$3x^2y + 8x^2y = (3 + 8)x^2y = 11x^2y$$

इसी विधि से, क्योंकि

$7 \times 5 - 6 \times 5 = (7 - 6) \times 5 = 1 \times 5$ है, अतः

$$5y - 2y = (5 - 2) \times y = 3y$$

और $9x^2y^2 - 5x^2y^2 = (9 - 5)x^2y^2 = 4x^2y^2$

उपरोक्त से हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं:

1. *दो या अधिक सजातीय पदों का योग सजातीय पद होता है, जिसका गुणांक सजातीय पदों के गुणांकों का योगफल होता है।*
2. *दो सजातीय पदों का अन्तर एक सजातीय पद होता है, जिसका गुणांक सजातीय पदों के गुणांकों का अन्तर होता है।*

अतः योग या घटाने के लिए, हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं:

चरण 1: सजातीय पदों के समूह बनाइये।

चरण 2: सजातीय पदों के समूहों के अलग अलग योग ज्ञात कर लीजिए।

उदाहरण 3.8: $-3x+4$ तथा $2x^2-7x-2$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल:

$$(-3x+4)+(2x^2-7x-2)$$
$$=2x^2+(-3x-7x)+(4-2)$$
$$=2x^2+(-3-7)x+2$$
$$=2x^2+(-10)x+2$$
$$=2x^2-10x+2$$

$$\therefore\ (-3x+4)+(2x^2-7x-2)=2x^2-10x+2$$

बहुपदों का योग और अधिक आसानी से किया जा सकता है, यदि

(i) दिए हुए बहुपदों को इस प्रकार व्यवस्थित कर लिया जाए कि सजातीय पद एक स्तम्भ में हों।

(ii) प्रत्येक स्तम्भ के (सजातीय पदों के समूह) के गुणांकों का योग कर लिया जाए।

उदाहरण 3.8 को इस प्रकार किया जा सकता है।

$$\begin{array}{lll} & -3x & +4 \\ 2x^2 & -7x & -2 \\ \hline 2x^2 & +(-7-3)x & +(4-2) \end{array}$$

$$\therefore\ (-3x+4)+(2x^2-7x-2)=2x^2-10x+2$$

उदाहरण 3.9: $5x+3y-\frac{3}{4}$ तथा $-2x+y+\frac{7}{4}$ का योग ज्ञात कीजिए

हल:

$$\begin{array}{l} 5x+3y-\frac{3}{4} \\ -2x+y+\frac{7}{4} \\ \hline 3x+4y+\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\right) \\ \hline =3x+4y+1 \end{array}$$

$$\therefore\ \left(5x+3y-\frac{3}{4}\right)+\left(-2x+y+\frac{7}{4}\right)=3x+4y+1$$

उदाहरण 3.10: $\frac{3}{2}x^3+x^2+x+1$ तथा $x^4-\frac{x^3}{2}-3x+1$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\frac{3}{2}x^2 + x^2 + x + 1$$

$$+x^4 - \frac{1}{2}x^3 \qquad - 3x + 1$$

$$x^4 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)x^3 + x^2 + (1-3)x + (1+1)$$

$$= x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 2$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}x^2 + x^2 + x + 1\right) + \left(x^4 - \frac{x^3}{2} - 3x + 1\right) = x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 2$$

एक बहुपद में से दूसरे बहुपद को घटाने के लिए, हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं:

चरण 1: दिये हुए बहुपद को इस प्रकार लिखिए कि सजातीय पद एक स्तम्भ में आ जाएँ।

चरण 2: जिस बहुपद को घटाना है उसके पदों के चिन्ह + से – तथा – से + में बदल लीजिए।

चरण 3: प्रत्येक स्तम्भ के सजातीय पदों का अलग अलग योग कीजिए।

आइए, कुछ उदाहरण लेकर इस विधि को समझें।

उदाहरण 3.11: $9x^2 - 3x - \frac{2}{7}$ में से $-4x^2 + 3x + \frac{2}{3}$ को घटाइए।

हल:

$$9x^2 - 3x - \frac{2}{7}$$

$$-4x^2 + 3x + \frac{2}{3}$$

$$+ \qquad - \qquad -$$

$$(9+4)x^2 + (-3-3)x + \left(-\frac{2}{7} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 13x^2 - 6x - \frac{20}{21}$$

$$\therefore \left(9x^2 - 3x - \frac{2}{7}\right) - \left(-4x^2 + 3x + \frac{2}{3}\right) = 13x^2 - 6x - \frac{20}{21}$$

उदाहरण 3.12: $2x^2 - 5 + 11x - x^3$ में से $3x - 5x^2 + 7 + 3x^3$ को घटाइए।

हल:

$$\begin{array}{l} -x^3 + 2x^2 + 11x - 5 \\ 3x^3 \; - 5x^2 + 3x \; + 7 \\ - \quad + \quad - \quad - \\ \hline (-1-3)x^3 + (2+5)x^2 + (11-3)x + (-5-7) \\ \hline = -4x^3 + 7x^2 + 8x - 12 \end{array}$$

$$\therefore (2x^2 - 5 + 11x - x^3) - (3x - 5x^2 + 7 + 3x^3) = -4x^3 + 7x^2 + 8x - 12$$

उदाहरण 3.13: $15xy + 6y^2 + 7x^2$ में से $12xy - 5y^2 - 9x^2$ को घटाइए।

हल:

$$\begin{array}{l} 15xy + 6y^2 + 7x^2 \\ 12xy - 5y^2 - 9x^2 \\ - \quad + \quad + \\ \hline 3xy + 11y^2 + 16x^2 \\ \hline \end{array}$$

अतः, $(15xy + 6y^2 + 7x^2) - (12xy - 5y^2 - 9x^2) = 3xy + 11y^2 + 16x^2$

हम स्तम्भों में व्यंजकों को लिखे बिना, सीधे भी घटा सकते हैं।

$$(15xy + 6y^2 + 7x^2) - (12xy - 5y^2 - 9x^2)$$

$$= 15xy + 6y^2 + 7x^2 - 12xy + 5y^2 + 9x^2$$

$$= 3xy + 11y^2 + 16x^2$$

इसी विधि से, हम दो से अधिक बहुपदों का योगफल ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 3.14: बहुपदों $3x + 4y - 5x^2$, $5y + 9x$ तथा $4x - 17y - 5x^2$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{array}{l} 3x + 4y - 5x^2 \\ 9x + 5y \\ 4x - 17y - 5x^2 \\ \hline 16x - 8y - 10x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore (3x + 4y - 5x^2) + (5y + 9x) + (4x - 17y - 5x^2) = 16x - 8y - 10x^2$$

उदाहरण 3.15: $3x^2 - 8x + 11$, $-2x^2 + 12x$ तथा $-4x^2 + 17$ के योगफल में से $x^2 - x - 1$ को घटाइए।

हल: पहले हम $3x^2 - 8x + 11, -2x^2 + 12x$ तथा $-4x^2 + 17$ का योग ज्ञात करते हैं।

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & -8x & +11 \\ -2x^2 & +12x & \\ -4x^2 & & +17 \\ \hline -3x^2 & +4x & +28 \\ \hline \end{array}$$

अब इस योग में से $x^2 - x - 1$ को घटाते हैं।

$$\begin{array}{rrr} -3x^2 & +4x & +28 \\ x^2 & -x & -1 \\ - & + & + \\ \hline -4x^2 & +5x & +29 \\ \hline \end{array}$$

अतः, अभीष्ट परिणाम $-4x^2 + 5x + 29$ है।

देखें आपने कितना सीखा 3.3

1. निम्नलिखित बहुपद युग्मों का योग ज्ञात कीजिए:

   (i) $\frac{2}{3}x^2 + x + 1; \quad \frac{3}{7}x^2 + \frac{1}{4}x + 5$

   (ii) $\frac{7}{5}x^3 - x^2 + 1; \quad 2x^2 + x - 3$

   (iii) $7x^2 - 3x + 4y; \quad 3x^3 + 5x^2 - 4x + \frac{7}{3}y$

   (iv) $2x^3 + 7x^2y - 5xy + 7; \; -2x^2y + 7x^3 - 3xy - 7$

2. योग ज्ञात कीजिए:

   (i) $x^2 - 3x + 5, \; 5 + 7x - 3x^2$ तथा $x^2 + 7$

   (ii) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{8}x - 5, \; \frac{2}{3}x^2 + 5 + \frac{1}{8}x$ तथा $-x^2 - x$

   (iii) $a^2 - b^2 + ab, \; b^2 - c^2 + bc$ तथा $c^2 - a^2 + ca$

   (iv) $2a^2 + 3b^2, 5a^2 - 2b^2 + ab$ तथा $-6a^2 - 5ab + b^2$

3. घटाइए:

   (i) $x^2 - 5x + 2$ में से $7x^3 - 3x^2 + 2$

(ii) $2y^2 - 5 + 11y - y^3$ में से $3y - 5y^2 + 7 + 3y^3$

(iii) $5z + 7 - 3z^2 + 5z^3$ में से $2z^3 + 7z - 5z^2 + 2$

(iv) $5x^3 + 7x^2 + 2x - 4$ में से $12x^3 - 3x^2 + 11x + 13$

4. $3a - 5b + 3ab$ तथा $2a + 4b - 5ab$ के योग में से $4a - b - ab + 3$ को घटाइए।

3.8 बहुपदों का गुणनफल

एक एकपदी को दूसरे एकपदी से गुणा करने के लिए, हम घातांकों के नियमों तथा चिन्हों के नियम का प्रयोग करते हैं। उदाहरणार्थ,

$$3a \times a^2b^2c^2 = (3 \times 1)\, a^{2+1}\, b^2\, c^2 = 3a^3b^2c^2$$

$$-5x \times 2\, xy^3 = (-5 \times 2)\, x^{1+1}\, y^3 = -10\, x^2y^3$$

$$-\frac{1}{2} y^2 z \times \left(-\frac{1}{3}\right) yz = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) y^{2+1} z^{1+1} = \frac{1}{6} y^3 z^2$$

एक बहुपद को एकपदी से गुणा करने के लिए, हम बहुपद के प्रत्येक पद को उस एकपदी से गुणा करते हैं। उदाहरणार्थ,

$$\begin{aligned} x^2y \times (-y^2 + 2xy + 1) &= x^2y \times (-y^2) + (x^2y) \times 2xy + (x^2y) \times 1 \\ &= -x^2y^3 + 2x^3y^2 + x^2y \end{aligned}$$

एक बहुपद को एक अन्य बहुपद से गुणा करने के लिए, हम एक बहुपद के प्रत्येक पद को दूसरे बहुपद के प्रत्येक पद से गुणा करते हैं तथा सजातीय पदों को इकट्ठा करके परिणाम को सरल करते हैं। यह सुझाव दिया जाता है कि पहले बहुपदों को चर के घातांकों के अनुसार आरोही या अवरोही क्रम में लिख लिया जाए। उदाहरणार्थ,

$$\begin{aligned} (2n + 3)(n^2 - 3n + 4) &= 2n \times n^2 + 2n \times (-3n) + 2n \times 4 + 3 \times n^2 + 3 \times (-3n) + \\ &\quad\; 3 \times 4 \\ &= 2n^3 - 6n^2 + 8n + 3n^2 - 9n + 12 \\ &= 2n^3 - 3n^2 - n + 12 \end{aligned}$$

आइए कुछ अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 3.16: $(0.2x^2 + 0.7\,x + 3)$ तथा $(0.5\,x^2 - 3x)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल: $(0.2x^2 + 0.7\,x + 3) \times (0.5\,x^2 - 3x)$

$$= 0.2x^2 \times 0.5\,x^2 + 0.2x^2 \times (-3x) + 0.7\,x \times 0.5\,x^2 + 0.7\,x \times (-3x) + 3 \times 0.5x^2 + 3\times(-3x)$$

$$= 0.1x^4 - 0.60x^3 + 0.35x^3 - 2.1x^2 + 1.5\,x^2 - 9x$$

$$= 0.1\,x^4 - 0.25\,x^3 - 0.6x^2 - 9x$$

उदाहरण 3.17: $2x - 3 + x^2$ को $1 - x$ से गुणा कीजिए।

हल: बहुपदों को x की घटती घातों के अनुसार व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त करते हैं:

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x - 3) \times (-x + 1) &= x^2 \times (-x) + x^2 \times (1) + 2x \times (-x) + 2x \times 1 - 3 \times (-x) \\ &\quad - 3 \times 1 \\ &= -x^3 + x^2 - 2x^2 + 2x + 3x - 3 \\ &= -x^3 - x^2 + 5x - 3\end{aligned}$$

वैकल्पिक विधि

$$\begin{array}{rrrrl} & x^2 & +2x & -3 & \leftarrow \text{एक बहुपद} \\ & & -x & +1 & \leftarrow \text{दूसरा बहुपद} \\ \hline -x^3 & -2x^2 & +3x & & \\ & +x^2 & +2x & -3 & \leftarrow \text{आंशिक गुणनफल} \\ \hline -x^3 & -x^2 & +5x & -3 & \leftarrow \text{गुणनफल} \\ \hline \end{array}$$

3.9 बहुपदों में भाग

किसी एकपदी को दूसरे एकपदी से भाग करने के लिए, घातांकों के नियमों द्वारा हम संख्यात्मक गुणांकों तथा चरों का भागफल अलग–अलग ज्ञात करते हैं तथा फिर इन भागफलों को परस्पर गुणा करते हैं।

उदाहरणार्थ,

(i) $$25x^3y^3 \div 5x^2y = \frac{25x^3y^3}{5x^2y} = \frac{25}{5} \times \frac{x^3}{x^2} \times \frac{y^3}{y}$$
$$= 5 \times x^1 \times y^2$$
$$= 5xy^2$$

(ii) $$-12ax^2 \div 4x = -\frac{12ax^2}{4x} = \frac{-12}{4} \times \frac{a}{1} \times \frac{x^2}{x}$$
$$= -3ax$$

एक बहुपद को एकपदी से भाग करने के लिए, हम बहुपद के प्रत्येक पद को एकपदी से भाग करते हैं। उदाहरणार्थ,

(i) $$\left(15x^3 - 3x^2 + 18x\right) \div 3x = \frac{15x^3}{3x} - \frac{3x^2}{3x} + \frac{18x}{3x}$$

$$= 5x^2 - x + 6$$

(ii) $$\left(-8x^2 + 10x\right) \div (-2x) = \frac{-8x^2}{-2x} + \frac{10x}{-2x}$$

$$= \left(\frac{-8}{-2}\right)\left(\frac{x^2}{x}\right) + \frac{10}{(-2)} \times \frac{x}{x}$$

$$= 4x - 5$$

एक बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग करने की संक्रिया अंकगणित में भाग की संक्रिया की तरह ही है। याद कीजिए कि 20 को 3 से कैसे भाग दिया जाता है।

$$\begin{array}{rl} & \quad 6 \longleftarrow \text{भागफल} \\ \text{भाजक} \longrightarrow 3 & \overline{)20} \longleftarrow \text{भाज्य} \\ & \underline{18} \\ & \underline{\ \ 2} \longleftarrow \text{शेषफल} \end{array}$$

एक बहुपद को एक अन्य बहुपद से भाग देने की क्रिया के चरणों को हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करते हैं।

आइए $2x^2 + 5x + 3$ को $2x + 3$ से भाग दें।

$$2x+3\overline{)2x^2+5x+3}$$

चरण 1: दोनों बहुपदों को चर (उभयनिष्ठ) के घातांकों के अवरोही क्रम में लिखिए।

$$\begin{array}{r} x \\ 2x+3\overline{)2x^2+5x+3} \end{array}$$

चरण 2: भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग दीजिए। भागफल का पहला पद प्राप्त हो जाएगा।

$$\begin{array}{rl} & x \\ 2x+3 & \overline{)2x^2+5x+3} \\ & \ \ 2x^2 + 3x \\ & \ \ \underline{-\quad\ -\quad\quad} \\ & \quad\quad\quad 2x+3 \end{array}$$

चरण 3: भाजक के प्रत्येक पद को भागफल के प्रथम पद से गुणा कीजिए और परिणाम को भाज्य में से घटा दीजिए।

चरण 4: परिणाम के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग दीजिए तथा परिणाम को भागफल के दूसरे पद के रूप में लिखिए।

$$\begin{array}{rl} & x+1 \\ 2x+3 & \overline{)2x^2+5x+3} \\ & \ \ 2x^2 + 3x \\ & \ \ \underline{-\quad\ -\quad\quad} \\ & \quad\quad\quad 2x+3 \\ & \quad\quad\quad 2x+3 \\ & \quad\quad\quad \underline{-\quad\ -} \\ & \quad\quad\quad\quad \underline{0} \end{array}$$

चरण 5: भाजक के प्रत्येक पद को भागफल के दूसरे पद से गुणा कीजिए तथा चरण 4 के भाज्य में से घटाइए।

चरण 6: चरणों 4 और 5 की क्रिया को दोहराते रहिए जब तक कि या तो शेषफल 0 हो या चर की घात भाजक की घात से कम हो।

उपरोक्त उदाहरण में, हमें भागफल $x + 1$ तथा शेषफल 0 प्राप्त हुआ।

अब हम कुछ अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3.18 : x^3-1 को $x-1$ से भाग दीजिए।

हल:

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+x+1 \\
x-1 & \overline{)\,x^3-1\qquad\qquad} \\
 & x^3 \quad -x^2 \\
 & \underline{-\qquad +\qquad} \\
 & \quad x^2 - 1 \\
 & \quad x^2 \quad - x \\
 & \quad \underline{-\qquad +\quad} \\
 & \qquad x - 1 \\
 & \qquad x - 1 \\
 & \qquad \underline{-\quad +} \\
 & \qquad \underline{\quad 0 \quad}
\end{array}
$$

इस प्रकार, हमें भागफल x^2+x+1 तथा शेषफल 0 प्राप्त हुआ।

उदाहरण 3.19: $5x-11-12x^2+2x^3$ को $2x-5$ से भाग दीजिए।

हल: भाज्य को x के घातांकों के अवरोही क्रम में लिखते हुए, हम प्राप्त करते हैं

$$2x^3-12x^2+5x-11$$

अतः

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2-\frac{7}{2}x-\frac{25}{4} \\
2x-5 & \overline{)\,2x^3-12x^2+5x-11} \\
 & 2x^3 - 5x^2 \\
 & \underline{-\quad +\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad -7x^2 + 5x - 11 \\
 & \qquad -7x^2 + \frac{35}{2}x \\
 & \underline{\qquad +\qquad -\qquad\qquad} \\
 & \qquad\qquad -\frac{25}{2}x - 11 \\
 & \qquad\qquad -\frac{25}{2}x + \frac{125}{4} \\
 & \qquad\qquad \underline{+\qquad -\qquad} \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-\frac{169}{4}}
\end{array}
$$

इस प्रकार, हम भागफल $x^2-\frac{7}{2}x-\frac{25}{4}$ तथा शेषफल $-\frac{169}{4}$ प्राप्त करते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 3.4

1. गुणा कीजिए:

   (i) $9b^2c^2$ को $3b$ से (ii) $5x^3y^5$ को $-2xy$ से

   (iii) $2xy + y^2$ को $-5x$ से (iv) $x + 5y$ को $x - 3y$ से

2. भागफल लिखिए:

   (i) $x^5y^3 \div x^2y^2$ (ii) $-28y^7z^2 \div (-4y^3z^2)$

   (iii) $(a^4 + a^3b^5) \div a^2$ (iv) $-15b^5c^6 \div 3b^2c^4$

3. भाग दीजिए तथा भागफल और शेषफल लिखिए:

   (i) $x^2 - 1$ by $x + 1$ (ii) $x^2 - x + 1$ by $x + 1$

   (iii) $6x^2 - 5x + 1$ by $2x - 1$ (iv) $2x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ by $x + 1$

आइए दोहराएँ

- एक अक्षर संख्या (अज्ञात राशि), जिसके विभिन्न मान हो सकते हैं, चर कहलाती है।
- अचर का मान निश्चित होता है।
- एक बीजीय व्यंजक संख्याओं, चरों तथा अंकगणितीय संक्रियाओं के चिन्हों का संयोजन है। इसके एक या अधिक पद होते हैं, जो + या – चिन्हों से जुड़े हो सकते हैं।
- पद $2xy$ का संख्यात्मक गुणांक 2 है। x का गुणांक $2y$ तथा y का गुणांक $2x$ है।
- ऋणेतर x का संख्यात्मक गुणांक $+1$ तथा $-x$ का -1 है।
- एक बीजीय व्यंजक, जिसमें चर, हर में न हो, चरों के घातांक पूर्ण संख्याओं में हों तथा विभिन्न पदों के गुणांक वास्तविक संख्याएँ हों, बहुपद कहलाता है।
- चर x में बहुपद का मानक रूप है:

  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ (या विपरीत क्रम में) जहाँ $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ वास्तविक संख्याएं हैं तथा $n, n-1, n-2, ..., 3, 2, 1$ पूर्ण संख्याएं हैं।
- एक बीजीय व्यंजक जिसमें एक पद होता है, एकपदी, दो पद वाला द्विपद तथा 3 पद वाला त्रिपद कहलाता है।
- एक बीजीय व्यंजक या बहुपद के वे पद जिनमें वही चर हो तथा उनकी एक ही घात हो, सजातीय (समान) पद कहलाते हैं। वे पद जो सजातीय नहीं हैं, विजातीय (असमान) पद कहलाते हैं।

- एक पद के चरों के घातांकों का योगफल, पद की घात कहलाता है।
- एक चर वाले बहुपद की घात उस बहुपद के विभिन्न पदों में चर का सबसे बड़ा घातांक होता है।
- शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य होती है।
- एक बीजीय व्यंजक (या बहुपद में) चर के मान को प्रतिस्थापन करने की क्रिया को व्यंजक का मान प्राप्त करने की क्रिया कहते हैं।
- चर का वह मान, जिसके लिए बहुपद का मान शून्य हो जाता है, बहुपद का शून्यक कहलाता है।
- दो सजातीय पदों का योग एक सजातीय पद होता है, जिसका गुणांक सजातीय पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है।
- दो सजातीय पदों का अन्तर एक सजातीय पद होता है, जिसका गुणांक सजातीय पदों के गुणांकों के अन्तर के बराबर होता है।
- एक बहुपद को एकपदी से गुणा (भाग) करने के लिए, बहुपद के प्रत्येक पद को एकपदी से गुणा (भाग) किया जाता है, जिसमें घातांकों के नियम और चिन्हों के नियम का प्रयोग होता है।
- एक बहुपद को अन्य बहुपद से गुणा करने के लिए, बहुपद के प्रत्येक पद को दूसरे बहुपद के प्रत्येक पद से गुणा किया जाता है तथा सजातीय पदों को इकट्ठा करके परिणाम को सरल किया जाता है।
- एक बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग देने के लिए, हम प्रायः बहुपदों को उभयनिष्ठ चर के घातांकों के अवरोही क्रम में लिखते हैं तथा अंकगणित की भाग की क्रिया के अनुसार भाग करते हैं।

आइए अभ्यास करें

1. सही विकल्प पर चिन्ह (✓) लगाइए:

   (i) x^4 में $6x^4y^2$ का गुणांक है:

   (A) 6 (B) y^2 (C) $6y^2$ (D) 4

   (ii) एकपदी $-x^2y^4$ का संख्यात्मक गुणांक है:

   (A) 2 (B) 6 (C) 1 (D) -1

   (iii) निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन सा बहुपद है?

   (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{8} + 3.7x$ (B) $2x + \frac{1}{2x} - 4$

(C) $\left(x^2-2y^2\right)\div\left(x^2+y^2\right)$ (D) $6+\sqrt{x}-x-15x^2$

(iv) व्यंजक $1-\sqrt{2}a^2b^3-(7a)(2b)+\sqrt{3}b^2$ में कितने पद हैं?

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

(v) निम्नलिखित में से कौन सा व्यंजक द्विपदी है?

(A) $2x^2y^2$ (B) x^2+y^2-2xy

(C) $2+x^2+y^2+2x^2y^2$ (D) $1-3xy^3$

(vi) निम्न युग्मों में से कौन सा युग्म सजातीय पदों का युग्म है?

(A) 2a, 2b (B) $2xy^3, 2x^3y$

(C) $3x^2y, \dfrac{1}{\sqrt{2}}yx^2$ (D) 8, 16 a

(vii) बहुपद $x^2-2x-15$ का एक शून्यक है

(A) $x=-5$ (B) $x=-3$

(C) $x=0$ (D) $x=3$

(viii) बहुपद $x^3y^4+9x^6-8y^5+17$ की घात है:

(A) 7 (B) 17

(C) 5 (D) 6

2. चरों तथा संक्रियाओं के चिन्हों के प्रयोग से, निम्नलिखित शाब्दिक कथनों को बीजीय कथनों में बदलिए:

(i) एक संख्या को स्वयं से जोड़ने पर 6 मिलता है।

(ii) एक संख्या के तीन गुने में से 4 घटाने पर 11 प्राप्त होता है।

(iii) दो क्रमागत विषम संख्याओं का गुणनफल 35 है।

(iv) एक संख्या का एक–तिहाई, उसके पांचवे भाग से 2 अधिक है।

3. निम्नलिखत बहुपदों में से प्रत्येक की घात लिखिए:

(i) 3^{27} (ii) $x+7x^2y^2-6xy^5-18$ (iii) a^4x+bx^3 जहाँ a तथा b अचर हैं।

(iv) $c^6-a^3x^2y^2-b^2x^3y$ जहाँ a, b तथा c अचर हैं।

4. बताइए कि क्या दिया गया मान बहुपद का शून्यक है:

(i) $x^2+3x-40;$ $x=8$

(ii) $x^6-1;$ $x=-1$

5. चर के दिये गए मान के लिए बहुपद का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $2x-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{4}{5}x^5+7x^3,\ x=\dfrac{1}{2}$ पर

(ii) $\frac{4}{5}y^3 + \frac{1}{5}y^2 - 6y - 65,\ \ y = -5$ पर

6. $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ का $n = 10$ के लिए मान ज्ञात कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि परिणाम प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के योग के बराबर है।

7. योग कीजिए:

(i) $\frac{7}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 3x + \frac{7}{5}$ तथा $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - 3x + \frac{3}{5}$

(ii) $x^2 + y^2 + 4xy$ तथा $2y^2 - 4xy$

(iii) $x^3 + 6x^2 + 4xy$ तथा $7x^2 + 8x^3 + y^2 + y^3$

(iv) $2x^5 + 3x + \frac{2}{3}$ तथा $-3x^5 + \frac{2}{5}x - 3$

8. घटाइए:

(i) 0 में से $-x^2 + y^2 - xy$

(ii) $a - b + c$ में से $a + b - c$

(iii) $y^2x - x^2 - y$ में से $x^2 - y^2x + y$

(iv) $3m^2 - 3mn + 8$ में से $-m^2 + 3\,mn$

9. $x^2 + xy + y^2$ में क्या जोड़ा जाए कि परिणाम $2x^2 + 3xy$ प्राप्त हो?

10. $-13x + 5y - 8$ में से क्या घटाया जाए कि परिणाम $11x - 16y + 7$ प्राप्त हो?

11. दो बहुपदों का योग $x^2 - y^2 - 2xy + y - 7$ है। यदि एक बहुपद $2x^2 + 3y^2 - 7y + 1$ हो तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

12. यदि $A = 3x^2 - 7x + 8$, $B = x^2 + 8x - 3$ तथा $C = -5x^2 - 3x + 2$ हो तो $B + C - A$ ज्ञात कीजिए।

13. $3x - y + 2xy$ तथा $-y - xy$ के योग में से $3x - y - xy$ घटाइए। परिणाम में x का गुणांक क्या है?

14. गुणा कीजिए:

(i) $a^2 + 5a - 6$ को $2a + 1$ से

(ii) $4x^2 + 16x + 15$ को $x - 3$ से

(iii) $a^2 - 2a + 1$ को $a - 1$ से

(iv) $a^2 + 2ab + b^2$ को $a - b$ से

(v) $x^2 - 1$ को $2x^2 + 1$ से (vi) $x^2 - x + 1$ को $x + 1$ से

(vii) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$ को $x - \frac{7}{4}$ से (viii) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{4}x - 3$ को $3x^2 + 4x + 1$ से

15. $(x^2 + xy + y^2)$ तथा $(x - y)$ के गुणनफल में से $(x^2 - xy + y^2)$ तथा $(x + y)$ के गुणनफल को घटाइए।

16.भाग दीजिए:

(i) $8x^3 + y^3$ को $2x + y$ से (ii) $7x^3 + 18x^2 + 18x - 5$ को $3x + 5$ से

(iii) $20x^2 - 15x^3y^6$ को $5x^2$ से (iv) $35a^3 - 21a^4b$ को $(-7a^3)$ से

(v) $x^3 - 3x^2 + 5x - 8$ को $x - 2$ से (vi) $8y^2 + 38y + 35$ को $2y + 7$ से

प्रत्येक अवस्था में भागफल तथा शेषफल लिखिए।

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

3.1

1. (i) y; 1 (ii) x, y; $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 7$ (iii) x, y; $\frac{4}{5}$

(iv) x, y; $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}$ (v) x, y; 2, –8 (vi) x; नहीं

2. (i) 2 (ii) 2y (iii) $2x^2$

3. (i) $x - 3 = 15$ (ii) $x + 5 = 22$

4. (i) 2, abc (ii) a,b,c, 2 (iii) $x^2y, -2xy^2, -\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{1}{8}x^3y^2$

5. (i) $-xy^2, +\frac{1}{3}y^2x$ (ii) –3ab, + ab (iii) कोई सजातीय पद नहीं

6. (i) , (ii) और (v) 7. एकपदी: (ii) और (vi);

द्विपद: (i) तथा (v); त्रिपद: (iii) और (iv)

3.2

1. (i) 7 (ii) 3 (iii) 1 (iv) 0

2. $2.5, 9x, \frac{2}{9}x^2, -25x^3, -3x^6$

3. (i) 10 (ii) 4 (iii) 2 (iv) 3

4. (i) 0 (ii) –7 (iii) $-\frac{19}{15}$ (iv) 6

3.3

1. (i) $\frac{23}{11}x^2 + \frac{5}{4}x + 6$ (ii) $\frac{7}{5}x^3 + x^2 + x - 2$

   (iii) $3x^3 + 12x^2 - 7x + \frac{19}{3}y$ (iv) $9x^3 + 5x^2y - 8xy$

2. (i) $-x^2 + 4x + 17$ (ii) 0

   (iii) $ab + bc + ca$ (iv) $a^2 + 2b^2 - 4ab$

3. (i) $-7x^3 + 4x^2 - 5x$ (ii) $-4y^3 + 7y^2 + 8y - 12$

   (iii) $3z^3 + 2z^2 - 2z + 5$ (iv) $-7x^3 + 10x^2 - 9x - 17$

4. $a - ab - 3$

3.4

1. (i) $27b^3c^2$ (ii) $-10x^4y^6$

   (iii) $-10x^2y - 5xy^2$ (iv) $x^2 + 2xy - 15y^2$

2. (i) x^3y (ii) $7y^4$ (iii) $a^2 + ab^5$ (iv) $-5b^3c^2$

3. (i) $x - 1; 0$ (ii) $x - 2; 3$ (iii) $3x - 1; 0$ (iv) $2x^2 + 2x + 1; 0$

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (i) C (ii) D (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) B (viii) A

2. (i) $y + y = 6$ (ii) $3y - 4 = 11$ (iii) $z(z + 2) = 35$ (iv) $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 2$

3. (i) 0 (ii) 6 (iii) 3 (iv) 4

4. (i) नहीं (ii) हाँ

5. (i) $\frac{37}{24}$ (ii) 0

6. 55

7. (i) $3x^3 + x^2 - 6x + 2$ (ii) $x^2 + 3y^2$

   (iii) $9x^3 + 13x^2 + 4xy + y^2 + y^3$ (iv) $-x^5 + \frac{17}{5}x - \frac{7}{3}$

8. (i) $x^2 - y^2 + xy$ (ii) $2c - 2b$

   (iii) $2y^2x - 2x^2 - 2y$ (iv) $4m^2 - 6mn + 8$

9. $x^2 + 2xy - y^2$

10. $-24x + 21y - 15$

11. $-x^2 - 4y^2 - 2xy + 8y - 8$

12. $-7x^2 + 12x - 9$

13. $2xy - y; 2y$

14. (i) $2a^3 + 11a^2 - 7a - 6$ (ii) $4x^3 + 4x^2 - 33x - 45$

    (iii) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$ (iv) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

    (v) $2x^4 - x^2 - 1$ (vi) $x^3 + 1$

    (vii) $x^3 - \frac{13}{12}x^2 - \frac{x}{3} - \frac{35}{24}$ (viii) $2x^4 + \frac{77}{12}x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{43}{4}x - 3$

15. $-2y^3$

16. (i) $4x^2 - 2xy + y^2; 0$ (ii) $9x^2 - 9x + 21; -110$

    (iii) $4 - 3xy^6; 0$ (iv) $-5 + 3ab; 0$

    (iv) $x^2 - x + 3; -2$ (v) $4y + 5; 0$