



## 5

## रैखिक समीकरण

आपने चर तथा अचर की मौलिक संकल्पनाओं के विषय में पढ़ा है। आपने बीजीय व्यंजकों, बहुपदों तथा उनके शून्यकों के विषय में भी पढ़ा है। हमें ऐसी कई स्थितियाँ जैसे “एक संख्या के दुगुने में 6 जोड़ने से 20 मिलता है” से सामना करना पड़ता है। संख्या को ज्ञात करने के लिये, हमें संख्या को  $x$  मानते हुए एक ऐसा संबंध बनाना पड़ता है जिससे हम वह संख्या जान सकते हैं। हम देखते हैं कि ऐसे सूत्रीकरण हमें एक समीकरण की ओर ले जाते हैं जिसमें चर तथा अचर दोनों हैं। इस पाठ में हम एक तथा दो चरों वाले समीकरणों के विषय में पढ़ेंगे। आप एक चर के समीकरणों के सूत्रीकरण (बनाने) का तरीका सीखेंगे तथा उन्हें बीजीय विधियों से हल करेंगे। आप दो चरों वाले समीकरणों का हल रैखीय तथा बीजीय विधियों द्वारा करना भी सीखेंगे।



## उद्देश्य

इस पाठ के पढ़ने के पश्चात आप समर्थ हो जायेंगे कि

- दिये गये समीकरणों में से रैखिक समीकरण छांट सकें;
- रैखिक समीकरणों के उदाहरण दे सकें;
- एक चर के रैखिक समीकरण की रचना करें तथा उसका हल ज्ञात करें;
- दो चरों के रैखिक समीकरणों के उदाहरण तथा रचना कर सकें;
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण का लेखाचित्र (ग्राफ) खींच सकें;
- दो चरों वाले रैखिक समीकरणों को ग्राफीय तथा बीजीय विधियों से हल कर सकें;
- वास्तविक जीवन की समस्याओं को अनुवाद कर उन्हें एक या दो चर वाले समीकरणों के रूप में निरूपित कर सकें।

बीजगणित



टिप्पणी



अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- एक चर तथा अचर की संकल्पना
- बीजीय व्यंजक तथा उन पर संक्रियाएँ
- एक बहुपद की संकल्पना, उसके शून्यक तथा बहुपदों पर संक्रियाएँ

5.1 रैखिक समीकरण

आप बीजीय व्यंजकों तथा बहुपदों से पहले से परिचित हैं। एक व्यंजक का मान उस बीजीय व्यंजक में आने वाले चरों के मानों पर निर्भर करता है। आपने एक चर के बहुपदों तथा उनकी घात के विषय में पढ़ा है। एक चर वाला बहुपद, जिसकी घात 1 है, एक चर वाला रैखिक बहुपद कहलाता है। जब दो व्यंजकों को बराबर के चिन्ह से अलग करके लिखते हैं, तो उसे एक समीकरण कहते हैं। अतः एक समीकरण में सदा एक समता का चिह्न होता है। समता का चिह्न दर्शाता है कि चिह्न से बायीं ओर का व्यंजक LHS (बायाँ पक्ष) चिह्न के दायीं ओर RHS (दायाँ पक्ष) के व्यंजक के बराबर हैं। उदाहरणतया

$$3x + 2 = 14 \quad \dots(1)$$

$$2y - 3 = 3y + 4 \quad \dots(2)$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \quad \dots(3)$$

$$3x^2 + 2 = 1 \quad \dots(4)$$

सभी समीकरण हैं क्योंकि उन सभी में बराबरी (समता) का चिह्न है तथा उन सभी में चर भी हैं। (1) में LHS =  $3x + 2$  तथा RHS = 14 है तथा इसमें चर x है। (2) में LHS =  $2y - 3$ , RHS =  $3y + 4$  है तथा दोनों एक चर वाले रैखिक बहुपद हैं। (3) तथा (4) दोनों में LHS एक द्विघाती बहुपद है तथा RHS एक संख्या है।

आप यह भी देखिए कि समीकरण (1) में, LHS एक रैखिक बहुपद है तथा RHS एक संख्या है। (2) में, LHS तथा RHS दोनों रैखिक बहुपद हैं तथा (3) तथा (4) में, LHS एक द्विघाती बहुपद है। समीकरण (1) तथा (2) रैखिक समीकरण हैं तथा (3) तथा (4) अरैखिक समीकरण हैं।

संक्षेप में समीकरण चर पर एक प्रतिबंध है। प्रतिबंध यह है कि दो व्यंजक अर्थात् LHS तथा RHS समान होने चाहिए। यह ध्यान रहे कि कम से कम एक व्यंजक में चर अवश्य हो।

यह भी देखिए कि समीकरण  $3x - 4 = 4x + 6$  तथा  $4x + 6 = 3x - 4$  एक ही हैं। अतः LHS तथा RHS के व्यंजक अदला-बदली करने पर समीकरण वही रहता है। इस गुण का प्रयोग प्रायः समीकरणों के हल करने में किया जाता है।

एक ऐसा समीकरण, जिसमें दो चर हैं तथा प्रत्येक की घात 1 है तथा जिसमें ऐसा कोई पद नहीं है जिसमें चरों की गुणा हो, को दो चर वाला **रैखिक समीकरण** कहते हैं। उदाहरणतया,





$2x + 3y = 4$  तथा  $x - 2y + 2 = 3x + y + 6$ , दो चरों वाले रैखिक समीकरण हैं। समीकरण  $3x^2 + y = 5$ , दो चरों वाला रैखिक समीकरण नहीं है क्योंकि इसमें चर  $x$  की घात 2 है। इसी प्रकार, समीकरण  $xy + x = 5$  भी दो चरों वाला रैखिक समीकरण नहीं है क्योंकि इसमें एक पद  $xy$  है, जो चरों  $x$  तथा  $y$  का गुणन है।

एक चर में रैखिक समीकरण का व्यापक रूप  $ax + b = 0$ ,  $a \neq 0$  है, जहाँ  $a$  तथा  $b$  अचर हैं। दो चरों में रैखिक समीकरण का व्यापक रूप  $ax + by + c = 0$  है, जहाँ  $a$ ,  $b$  तथा  $c$  ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि  $a$  तथा  $b$  में कम से कम एक शून्येतर है।

**उदाहरण 5.1:** निम्न में से कौन से एक चर वाले रैखिक समीकरण हैं? उनकी LHS तथा RHS भी लिखिए।

(i)  $2x + 5 = 8$

(ii)  $3y - z = y + 5$

(iii)  $x^2 - 2x = x + 3$

(iv)  $3x - 7 = 2x + 3$

(v)  $2 + 4 = 5 + 1$

**हल:**

(i) यह  $x$  में एक रैखिक समीकरण है क्योंकि  $x$  की घात 1 है। LHS =  $2x + 5$  तथा RHS = 8

(ii) यह एक चर में रैखिक समीकरण नहीं है क्योंकि इसमें दो चर  $y$  तथा  $z$  हैं। यहाँ LHS =  $3y - z$  तथा RHS =  $y + 5$

(iii) यह एक रैखिक समीकरण नहीं है क्योंकि इसमें सबसे बड़ी घात 2 है। यहाँ LHS =  $x^2 - 2x$  तथा RHS =  $x + 3$ .

(iv) यह  $x$  में एक रैखिक समीकरण है क्योंकि इसमें LHS तथा RHS की घात एक है। यहाँ LHS =  $3x - 7$  तथा RHS =  $2x + 3$

(v) यह एक रैखिक समीकरण नहीं है क्योंकि इसमें कोई चर नहीं है। यहाँ LHS =  $2 + 4$  तथा RHS =  $5 + 1$ .

**उदाहरण 5.2:** निम्न में से कौन से दो चर वाले रैखिक समीकरण हैं?

(i)  $2x + z = 5$

(ii)  $3y - 2 = x + 3$

(iii)  $3t + 6 = t - 1$

**हल:**

(i) यह दो चरों  $x$  तथा  $z$  वाला रैखिक समीकरण है।

(ii) यह दो चरों  $x$  तथा  $y$  वाला रैखिक समीकरण है।

(iii) यह दो चरों वाला रैखिक समीकरण नहीं है, क्योंकि इसमें केवल एक चर  $t$  है।



### देखें आपने कितना सीखा 5.1

- निम्न में से कौन से एक चर में रैखिक समीकरण हैं?
  - $3x - 6 = 7$
  - $2x - 1 = 3z + 2$
  - $5 - 4 = 1$
  - $y^2 = 2y - 1$
- निम्न में से कौन से दो चर में रैखिक समीकरण हैं?
  - $3y - 5 = x + 2$
  - $x^2 + y = 2y - 3$
  - $x + 5 = 2x - 3$

### 5.2 एक चर में रैखिक समीकरण बनाना

निम्न स्थितियों को देखिए:

- $x$  से 4 अधिक 11 है।
- एक संख्या  $y$  को 7 से भाग देने पर परिणाम 2 है।
- रीमा के पास कुछ सेब हैं। उसने 5 सेब अपनी बहन को दे दिए। यदि अब उसके पास 3 सेब बचे हैं, तो उसके पास कितने सेब थे?
- एक संख्या का दहाई का अंक उसके इकाई के अंक का दुगुना है। यदि अंक स्थान बदल लें, तो नई संख्या मूल संख्या से 18 कम है। मूल संख्या क्या है?
- के लिए समीकरण  $x + 4 = 11$  लिखा जा सकता है। आप जाँच सकते हैं कि  $x = 7$  समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः  $x = 7$  एक हल है।

(ii) के लिए समीकरण  $\frac{y}{7} = 2$  है।

(iii) के लिए आप मान सकते हैं कि निकाली जाने वाली संख्या  $x$  है, अर्थात् रीमा के पास  $x$  सेब थे। उसने 5 सेब अपनी बहन को दे दिए। अतः उसके पास  $x - 5$  सेब बचे। अतः वांछित समीकरण  $x - 5 = 3$  है।

(iv) के लिए माना इकाई का अंक  $x$  है। अतः दहाई का अंक  $2x$  है। अतः संख्या है:

$$10(2x) + x = 20x + x = 21x$$

जब अंक स्थान बदल लें तो अहाई का अंक  $x$  तथा इकाई का अंक  $2x$  है। अतः संख्या है  $10x + 2x = 12x$ । क्योंकि मूल संख्या नई संख्या से 18 अधिक है, समीकरण बनता है:

$$21x - 12x = 18$$

अथवा  $9x = 18$



### देखें आपने कितना सीखा 5.2

निम्न स्थितियों के लिए उपयुक्त चर लेकर समीकरण बनाइए:

- 15 में से एक संख्या का दुगुना घटाने पर 7 मिलता है।
- एक मोटर-बोट प्रत्येक किलोमीटर के लिए 0.1 लीटर पेट्रोल प्रयोग करती है। एक दिन उसने  $x$  किमी की दूरी तय की। यदि कुल इंधन 10 लीटर लगा हो, तो  $x$  में एक समीकरण लिखिए।
- एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई की दुगुनी है तथा आयत का परिमाप 96 मीटर है। [मान लीजिए आयत की चौड़ाई  $y$  मी है]
- 15 वर्ष बाद सलमा की आयु उसकी वर्तमान आयु से चार गुनी हो जाएगी। [मान लीजिए सलमा की वर्तमान आयु  $t$  वर्ष है]

### 5.3 एक चर में रैखिक समीकरणों का हल

आइए हम एक चर में रैखिक समीकरण  $x - 3 = -2$  लें।

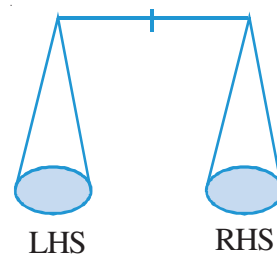
यहाँ LHS =  $x - 3$  तथा RHS =  $-2$

आइए हम RHS तथा LHS के मान  $x$  के कुछ मानों पर ज्ञात करें।

$x$	LHS	RHS
0	-3	-2
1	-2	-2
3	0	-2
4	1	-2

हम देखते हैं कि LHS तथा RHS के मान केवल  $x = 1$  पर ही समान हैं। शेष सब मानों के लिए  $LHS \neq RHS$  है। हम कहते हैं  $x = 1$  समीकरण को संतुष्ट करता है अथवा  $x = 1$  समीकरण का हल है।

वह संख्या, जिसे समीकरण में चर के स्थान पर रखने से, LHS तथा RHS बराबर हो जायें, वह समीकरण का हल कहलाता है। चर के स्थान पर भिन्न भिन्न मान रखकर हल ज्ञात करने की विधि को जाँच और भूल की विधि कहते हैं। लेकिन हम एक रैखिक समीकरण का हल ज्ञात करने की सुव्यवस्थित विधि सीखेंगे।



आकृति 5.1

बीजगणित



टिप्पणी



एक समीकरण की तराजू (balance) से तुलना की जा सकती है। इसके दो पलड़ें LHS तथा RHS को दर्शाते हैं तथा बराबरी का चिन्ह दर्शाता है कि दोनों पलड़े सन्तुलन में हैं।

हमने एक तराजू की कार्यविधि देखी है। यदि हम दोनों पलड़ों में बराबर भार (डालते अथवा कम करते जाएँ), तो दोनों पलड़े सन्तुलन में रहते हैं। इस प्रकार समीकरण के लिए हम निम्न तरीका प्रयोग कर सकते हैं:

1. दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ सकते हैं
  2. दोनों पक्षों से समान संख्या घटा सकते हैं
  3. दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा कर सकते हैं
  4. दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर संख्या से भाग कर सकते हैं
- आइए कुछ उदाहरण लें:

**उदाहरण 5.3:**  $5 + x = 8$  को हल कीजिए।

**हल:** समीकरण के दोनों पक्षों से 5 घटाने पर हमें मिलता है

$$5 + x - 5 = 8 - 5$$

अथवा  $x + 0 = 3$

अथवा  $x = 3$

अतः,  $x = 3$ , दिए गए समीकरण का हल है।

जाँच कीजिए: जब  $x = 3$  है, तो  $LHS = 5 + x = 5 + 3 = 8$  तथा  $RHS = 8$ .

अतः,  $LHS = RHS$

**उदाहरण 5.4:**  $y - 2 = 7$  को हल कीजिए।

**हल:** समीकरण के दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर प्राप्त होता है:

$$y - 2 + 2 = 7 + 2$$

अथवा  $y = 9$

अतः,  $y = 9$ , दिए गए समीकरण का हल है।

**जाँच:** जब  $y = 9$  है, तो  $LHS = y - 2 = 9 - 2 = 7$  तथा  $RHS = 7$  है। अतः,  $LHS = RHS$  है।

**उदाहरण 5.5:**  $7x + 2 = 8$  को हल कीजिए।

**हल:** समीकरण के दोनों पक्षों से 2 घटाने पर हमें मिलता है:

$$7x + 2 - 2 = 8 - 2$$





अथवा  $7x = 6$

अथवा  $\frac{7x}{7} = \frac{6}{7}$  (दोनों पक्षों को 7 से भाग देने पर)

अथवा  $x = \frac{6}{7}$

अतः,  $x = \frac{6}{7}$ , समीकरण का हल है।

**उदाहरण 5.6:**  $\frac{3y}{2} - 3 = 9$  को हल कीजिए।

**हल:** समीकरण के दोनों पक्षों में 3 जोड़ने पर हमें मिलता है:

$$\frac{3y}{2} - 3 + 3 = 9 + 3$$

अथवा  $\frac{3y}{2} = 12$

अथवा  $\frac{3y}{2} \times 2 = 12 \times 2$  (दोनों पक्षों को 2 से गुणा करने पर)

अथवा  $3y = 24$

अथवा  $\frac{3y}{3} = \frac{24}{3}$  (दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर)

अथवा  $y = 8$

अतः,  $y = 8$ , समीकरण का हल है।

**उदाहरण 5.7:** समीकरण  $2(x + 3) = 3(2x - 7)$  को हल कीजिए।

**हल:** समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$2x + 6 = 6x - 21$$

अथवा  $6x - 21 = 2x + 6$  [LHS तथा RHS की अदला बदली करने पर]

अथवा  $6x - 21 + 21 = 2x + 6 + 21$  [दोनों पक्षों में 21 जोड़ने पर]

अथवा  $6x = 2x + 27$

अथवा  $6x - 2x = 2x + 27 - 2x$  [दोनों पक्षों से  $2x$  घटाने पर]

अथवा  $4x = 27$

अथवा  $x = \frac{27}{4}$

बीजगणित



टिप्पणी



अतः,  $x = \frac{27}{4}$ , समीकरण का हल है।

**नोट:**

1. प्रत्येक बार यह लिखने की आवश्यकता नहीं है कि हम क्या योग, घटा, गुणा अथवा भाग कर रहे हैं।
2. किसी पद को LHS से RHS अथवा RHS से LHS ले जाने वाली प्रक्रिया को स्थानान्तरण कहते हैं।
3. जब हम एक पद का स्थानान्तरण एक पक्ष से दूसरे पक्ष में करते हैं, तो पद का '+' का चिन्ह '-', में तथा '-' का चिन्ह '+' में बदल जाता है।
4. एक चर वाले रैखिक समीकरण को  $ax + b = 0$  के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ a तथा b अचर हैं तथा x चर है। उसका हल  $x = -\frac{b}{a}$ ,  $a \neq 0$  है।

**उदाहरण 5.8:**  $3x - 5 = x + 3$  को हल कीजिए।

**हल:** हमें प्राप्त है  $3x - 5 = x + 3$

अथवा  $3x = x + 3 + 5$

अथवा  $3x - x = 8$

अथवा  $2x = 8$

अथवा  $x = 4$

अतः, दिये गए समीकरण का हल  $x = 4$  है।



**देखें आपने कितना सीखा 5.3**

निम्न समीकरणों को हल कीजिए:

1.  $x - 5 = 8$

2.  $19 = 7 + y$

3.  $3z + 4 = 5z + 4$

4.  $\frac{1}{3}y + 9 = 12$

5.  $5(x - 3) = x + 5$





### 5.4 शाब्दिक प्रश्न

आपने एक चर में रैखिक समीकरण बनाना सीखा है। अब हम रैखिक समीकरणों का अनुप्रयोग सीखेंगे।

**उदाहरण 5.9:** जेकब के पिता की वर्तमान आयु जेकब की आयु का 3 गुना है। 5 वर्ष पश्चात उनकी आयु में 30 वर्ष का अन्तर होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना जेकब की वर्तमान आयु  $x$  वर्ष है।

अतः, उसके पिता की वर्तमान आयु  $3x$  वर्ष है।

5 वर्ष पश्चात जेकब की आयु  $= (x + 5)$  वर्ष

5 वर्ष पश्चात पिता की आयु  $= (3x + 5)$  वर्ष

उनकी आयु में अन्तर  $= (3x + 5) - (x + 5)$  वर्ष है। जो कि 30 वर्ष दिया है। अतः

$$3x + 5 - (x + 5) = 30$$

$$3x + 5 - x - 5 = 30$$

अथवा  $3x - x = 30$

अथवा  $2x = 30$

अथवा  $x = 15$

अतः, जेकब की वर्तमान आयु 15 वर्ष और उसके पिता की आयु  $= 3x = 3 \times 15 = 45$  वर्ष है।

**जाँच:** 5 वर्ष पश्चात जेकब की आयु  $= 15 + 5 = 20$  वर्ष

4 वर्ष पश्चात उसके पिता की आयु  $= 45 + 5 = 50$  वर्ष

उनके आयु का अन्तर  $= 50 - 20 = 30$  वर्ष

**उदाहरण 5.10 :** तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 36 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना सबसे छोटी सम संख्या  $= x$

अतः शेष दो संख्याएँ हैं:  $x + 2$  तथा  $x + 4$

क्योंकि उनका योग 36 है, अतः

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 36$$

अथवा  $3x + 6 = 36$

अथवा  $3x = 36 - 6 = 30$

बीजगणित



टिप्पणी



अथवा  $x = 10$

अतः, अभीष्ट संख्याएँ 10, 12 और 14 हैं।

**उदाहरण 5.11:** एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 3 सेमी अधिक है। यदि उसका परिमाण 34 सेमी है, तो उनकी लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना आयत की चौड़ाई =  $x$  सेमी

अतः उसकी लम्बाई =  $x + 3$

परिमाण = 34 सेमी

$\therefore 2(x + 3 + x) = 34$

या  $2x + 6 + 2x = 34$

या  $4x = 34 - 6$

या  $4x = 28$

या  $x = 7$

इसलिए, आयत की चौड़ाई = 7 सेमी तथा लम्बाई =  $7 + 3 = 10$  सेमी



**देखें आपने कितना सीखा 5.4**

1. दो संख्याओं का योग 85 है। यदि एक संख्या दूसरी से 7 अधिक है, तो संख्याएं ज्ञात कीजिए।
2. पिता की आयु अपने पुत्र की आयु के दुगुने से 20 वर्ष अधिक है। यदि उनकी आयु का योग 65 वर्ष है, तो पिता तथा पुत्र की आयु ज्ञात कीजिए।
3. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई की दुगुनी है। यदि आयत का परिमाण 66 सेमी है तो उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
4. एक कक्षा में लड़कों की संख्या लड़कियों की संख्या का  $\frac{2}{5}$  भाग है। यदि कक्षा में लड़कों की संख्या 10 है, तो लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

**5.5 दो चरों में रैखिक समीकरण**

नेहा मार्केट से पेन तथा पेन्सिल खरीदने गयी। एक पेन्सिल का मूल्य 2 रु है तथा एक पेन का मूल्य 4 रु है। यदि उसने 50 रु व्यय किए, तो उसने कितनी पेन्सिलें तथा पेन खरीदे?





क्योंकि हमें पेन तथा पेंसिलों की संख्या ज्ञात करनी है, तो माना कि उसने  $x$  पेंसिल तथा  $y$  पेन खरीदे।

$$x \text{ पेंसिलों का मूल्य} = 2x \text{ रु}$$

$$y \text{ पेनों का मूल्य} = 4y \text{ रु}$$

क्योंकि कुल मूल्य 50 रु है, तो

$$2x + 4y = 50 \quad \dots(1)$$

यह दो चरों  $x$  तथा  $y$  में एक रैखिक समीकरण है क्योंकि यह  $ax + by + c = 0$  के रूप का है।

अब हम  $x$  तथा  $y$  के विभिन्न मान देकर समीकरण (1) का हल ज्ञात करेंगे।

1. यदि  $x = 1, y = 12$ , तो  $LHS = 2 \times 1 + 4 \times 12 = 2 + 48 = 50$  तथा  $RHS = 50$  है। अतः  $x = 1$  तथा  $y = 12$  एक हल है।
2. यदि  $x = 3, y = 11$ , तो  $LHS = 2 \times 3 + 4 \times 11 = 50$  तथा  $RHS = 50$  है। अतः  $x = 3, y = 11$  भी एक हल है।
3. यदि  $x = 4, y = 10$ , तो  $LHS = 2 \times 4 + 4 \times 10 = 48$  तथा  $RHS = 50$  है। अतः  $x = 4, y = 10$  समीकरण का हल नहीं है।

अतः, एक दो चरों वाले रैखिक समीकरण के एक से अधिक हल हैं।

हमने देखा कि एक चर में रैखिक समीकरण का रूप  $ax + b = 0, a \neq 0$  होता है। इसका केवल

एक हल  $x = -\frac{b}{a}$  है। लेकिन दो चरों वाले रैखिक समीकरण का रूप निम्न होता है।

$$ax + by + c = 0 \quad \dots(1)$$

जहाँ  $a, b$  तथा  $c$  अचर हैं तथा  $a$  तथा  $b$  में से कम से कम एक शून्येतर है। माना  $a \neq 0$ , तो (1) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$ax = -by - c$$

$$\text{अथवा } x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$$

अब प्रत्येक  $y$  के मान के लिए हमें  $x$  का एक अद्वितीय हल मिलता है। अतः दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण के असंख्य हल हैं।

**नोट:** रैखिक समीकरण  $ax + c = 0, a \neq 0$  को दो चरों वाला रैखिक समीकरण माना जा सकता है, जब उसे  $ax + 0y + c = 0$  के रूप में लिखा जाए।

इसके भी अनेक हल हैं जैसे

$$x = -\frac{c}{a}, y = 0; x = -\frac{c}{a}, y = 1 \text{ इत्यादि}$$

बीजगणित



टिप्पणी



अर्थात्  $y$  के प्रत्येक मान के लिए  $x = -\frac{c}{a}$  होगा।

**उदाहरण 5.12:** दो पूर्णाकों का योग 15 है। दो चरों में इसका रैखिक समीकरण बनाइए।

**हल:** माना दो पूर्णाक  $x$  तथा  $y$  हैं। अतः उनका योग  $x + y$  है, जो 15 के बराबर दिया है।

अतः वांछित समीकरण  $x + y = 15$  है।

**उदाहरण 5.13:** समीकरण  $4x - 5y = 2$  के लिए जांच कीजिए कि क्या (i)  $x = 3, y = 2$  तथा (ii)  $x = 4, y = 1$  इसके हल हैं।

**हल:** (i) हमें दिया है  $4x - 5y = 2$

$$\begin{aligned} \text{जब } x = 3, y = 2, \quad \text{LHS} &= 4x - 5y = 4 \times 3 - 5 \times 2 \\ &= 12 - 10 = 2 \\ &= \text{RHS} \end{aligned}$$

अतः  $x = 3, y = 2$  दिए गए समीकरण का हल है।

(ii) जब  $x = 4, y = 1$ , तो  $\text{LHS} = 4 \times 4 - 5 \times 1 = 16 - 5 = 11$

लेकिन  $\text{RHS} = 2$ . अतः,  $\text{LHS} \neq \text{RHS}$

अतः,  $x = 4, y = 1$  दिए हुए समीकरण का हल नहीं है।



**देखें आपने कितना सीखा 5.5**

1. उपयुक्त चरों का प्रयोग करके दो चरों में रैखिक समीकरण बनाइए:

- (i) एक आयत का परिमाप 98 सेमी है। [लम्बाई को  $x$  लीजिए तथा चौड़ाई को  $y$  लीजिए]
- (ii) एक पिता की आयु पुत्र की आयु के दुगुने से 10 वर्ष अधिक है।
- (iii) एक संख्या दूसरी संख्या से 10 अधिक है।
- (iv) 2 किग्रा सेब तथा 3 किग्रा संतरों का मूल्य 120 रु है।  $x$  तथा  $y$  को प्रति किग्रा सेब तथा संतरों का क्रमशः मूल्य लीजिए।

सत्य या असत्य लिखिए:

- 2.  $x = 0, y = 3$  समीकरण  $3x + 2y - 6 = 0$  का हल है।
- 3.  $x = 2, y = 5$  समीकरण  $5x + 2y = 10$  का हल है।





## 5.6 दो चरों में रैखिक समीकरणों के आलेख

अब आप दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख बनाना सीखेंगे। समीकरण  $2x + 3y = 12$  को लीजिए। इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$2x = 12 - 3y \text{ अथवा } 3y = 12 - 2x$$

$$x = \frac{12-3y}{2} \text{ अथवा } y = \frac{12-2x}{3}$$

अब  $x$  तथा  $y$  के प्रत्येक मान के लिए, हमें  $y$  तथा  $x$  के संगत मान मिलते हैं। हम  $x$  तथा  $y$  के कुछ मानों से जो समीकरण  $2x + 3y = 12$  को संतुष्ट करते हैं, निम्न सारणी बनाते हैं:

$x$	0	6	3	9	-3
$y$	4	0	2	-2	6

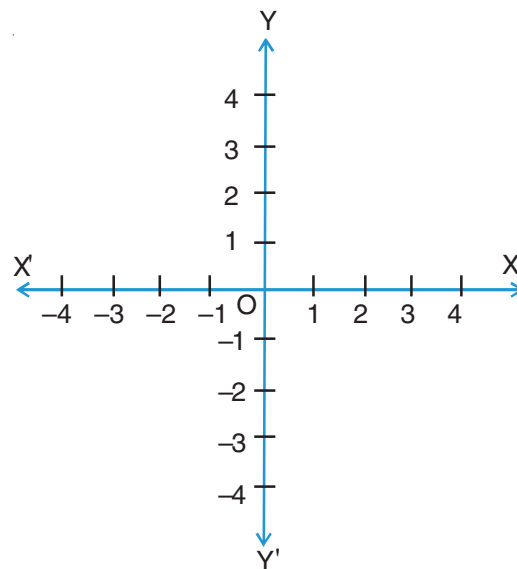
अतः,  $x = 0, y = 4; x = 6, y = 0; x = 3, y = 2; x = 9, y = -2; x = -3, y = 6$  सभी दिये गये समीकरण के हल हैं।

हम इन हलों को क्रमित युग्मों  $(0, 4), (6, 0), (3, 2), (9, -2)$  तथा  $(-3, 6)$  द्वारा भी लिख सकते हैं।

यहाँ प्रथम प्रविष्टि  $x$  का मान तथा दूसरी प्रविष्टि  $y$  का संगत मान दर्शाती है। अब हम इस समीकरण का ग्राफ इन क्रमित युग्मों को तल में आलेख कर तथा उन्हें मिलाकर खींचना सीखेंगे।  $2x + 3y = 12$  के ग्राफ में हलों को निरूपित करते बिन्दु रेखा पर स्थित होंगे जबकि वह बिन्दु जो समीकरण का हल नहीं है, इस रेखा पर स्थित नहीं होगा। प्रत्येक बिन्दु, जिसे क्रमित युग्म भी कहते हैं, जो इस रेखा पर स्थित है समीकरण का हल है, तथा वह बिन्दु जो रेखा पर स्थित नहीं है, समीकरण का हल नहीं है।

दो चरों वाले रैखिक समीकरण का ग्राफ खींचने के लिए, हम पहले इन बिन्दुओं को तल में आलेखित करेंगे। इसे हम निम्न चरणों में करते हैं:

**चरण 1:** हम दो लम्बवत रेखाएँ  $X'OX$  तथा  $YOY'$  जो  $O$  पर प्रतिच्छेदित करती हैं को लेते हैं।  $X'OX$  तथा  $YOY'$  पर हम वास्तविक संख्याएँ अंकित करते हैं (इन्हें



आकृति 5.2

बीजगणित

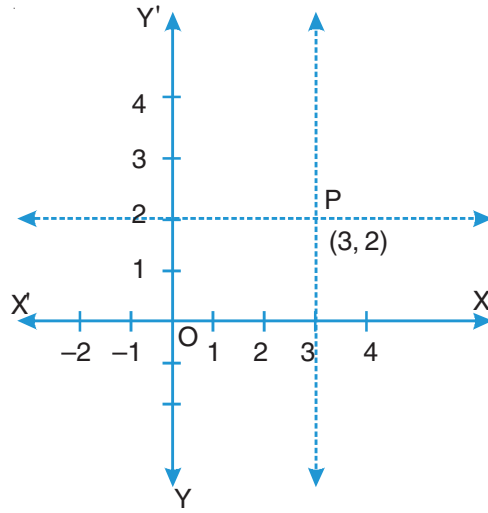


टिप्पणी



संख्या रेखाएँ समझते हुए) जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु  $O$ , वास्तविक संख्या  $0$  दर्शाता है जैसा आकृति 5.2 में दिखाया गया है। यह दो रेखाएँ तल को चार भागों में बांटती हैं, जिन्हें प्रथम चतुर्थांश, द्वितीय चतुर्थांश, तृतीय चतुर्थांश, चतुर्थ चतुर्थांश कहते हैं। संख्या रेखा  $X'OX$  को **x-अक्ष** तथा  $Y'OY$  को **y-अक्ष** कहते हैं। क्योंकि हमने x-अक्ष तथा y-अक्ष तल में लम्बवत लिये हैं, हम तल को निर्देशांक तल अथवा कार्तीय-तल एक फ्रांसीसी गणितज्ञ, जिसने इस प्रकार बिन्दुओं को तल में निरूपित करने का तरीका दिया, को आदर देने के लिए कहते हैं।

**चरण 2:** बिन्दु  $(3, 2)$  को निरूपित करने के लिए, x-अक्ष पर बिन्दु 3 लीजिए तथा इस बिन्दु से रेखा 'l', x-अक्ष पर लम्ब खींचिए (अर्थात् y-अक्ष के समांतर). अब y-अक्ष पर बिन्दु 2 लेकर, उस बिन्दु से एक रेखा 'm' खींचिए जो y-अक्ष पर लम्ब है (x-अक्ष के समांतर) जो रेखा l को बिन्दु P पर मिलती है। बिन्दु P,  $(3, 2)$  को तल में निरूपित करता है।



आकृति 5.3

**नोट 1:** इसे नोट किया जाए कि क्रमित युग्म  $(a, b)$  में,  $a$ , x निर्देशांक कहलाता है तथा  $b$ , y-निर्देशांक कहलाता है।

**नोट 2:** x-अक्ष पर कोई बिन्दु  $(a, 0)$  द्वारा लिखा जाता है, अर्थात् उसका y-निर्देशांक शून्य है। इसी प्रकार y-अक्ष पर कोई बिन्दु  $(0, b)$  द्वारा लिखा जाता है अर्थात् उसका x-निर्देशांक शून्य है। बिन्दु  $O$ , के निर्देशांक  $(0, 0)$  हैं।

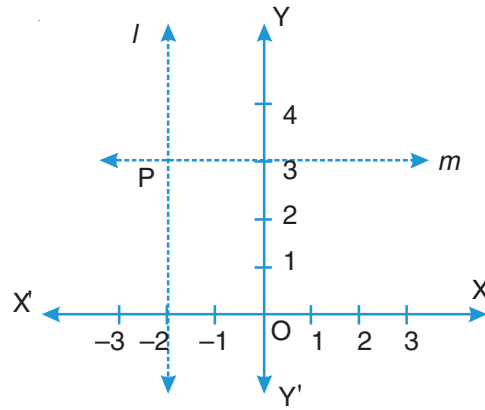
**नोट 3:** प्रथम चतुर्थांश में, दोनों x तथा y-निर्देशांक धन हैं, दूसरे चतुर्थांश में x-निर्देशांक ऋण तथा y-निर्देशांक धन है, तीसरे चतुर्थांश में दोनों x तथा y-निर्देशांक ऋणात्मक हैं तथा चौथे चतुर्थांश में x-निर्देशांक धन है तथा y-निर्देशांक ऋण है।





**उदाहरण 5.14:** बिन्दु  $(-2, 3)$  को कार्तीय (निर्देशांक) तल में निरूपित कीजिए।

**हल:** तल में  $x$ -अक्ष तथा  $y$ -अक्ष खींच कर तथा उन पर बिन्दु अंकित कीजिए।  $x$ -अक्ष पर बिन्दु  $-2$  लेकर, उससे रेखा  $l$ ,  $y$ -अक्ष के समांतर खींचिए अब  $y$ -अक्ष पर बिन्दु  $3$  लेकर उससे रेखा  $m$ ,  $x$ -अक्ष के समांतर खींचिए जो  $l$  को बिन्दु  $P$  पर काटती है। बिन्दु  $P, (-2, 3)$  को निरूपित करता है। हम यह कहते हैं कि  $(-2, 3)$  बिन्दु  $P$  के निर्देशांक हैं।



आकृति 5.4

अब आप दो चर वाले एक रैखिक समीकरण का आलेख खींचना सीखेंगे। यह नोट किया जाए कि दो चर वाले रैखिक समीकरण का आलेख एक रेखा होती है तथा उस पर सभी बिन्दुओं के निर्देशांक उस समीकरण को संतुष्ट करते हैं। जो बिन्दु इस रेखा पर स्थित नहीं है उनके निर्देशांक समीकरण को संतुष्ट नहीं करते। आप यह भी जानते हैं कि दो दिए गए बिन्दुओं से एक और केवल एक रेखा खींची जा सकती है। अतः रेखा खींचने के लिए केवल दो बिन्दु आवश्यक हैं अर्थात्  $x$  तथा  $y$  के मान जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं। फिर भी हम तीन बिन्दु लेते हैं ताकि यदि गलती हो तो पता लग जाए।

**उदाहरण 5.15:** समीकरण  $2x - 3y = 6$  का आलेख खींचिए।

**हल:**  $x$  तथा  $y$  के वह मान चुनिए जो समीकरण  $2x - 3y = 6$  को संतुष्ट करते हैं। समीकरण को निम्न रूप में लिखना सरल होगा:

$$2x = 3y + 6 \text{ या } 3y = 2x - 6$$

$$\Rightarrow x = \frac{3y+6}{2} \text{ या } y = \frac{2x-6}{3}$$

अब  $x$  अथवा  $y$  के भिन्न मान लेकर, आप  $y$  अथवा  $x$  के संगत मान ज्ञात करें। यदि आप  $x$  के विभिन्न मान  $y = \frac{2x-6}{3}$  में रखते हैं, तो हमें  $y$  के संगत मान मिलते हैं। यदि  $x = 0$ , तो  $y = -2$ ,  $x = 3$  से प्राप्त होता है  $y = 0$  तथा  $x = -3$  से प्राप्त होता है  $y = -4$

आप इन मानों को एक तालिका के रूप में सीधे भी लिख सकते हैं:

$x$	0	3	-3
$y$	-2	0	-4

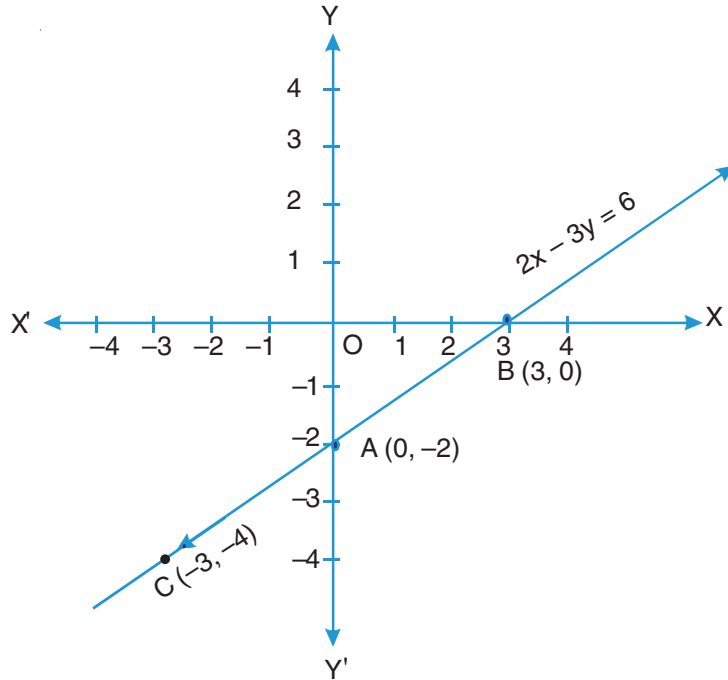
बीजगणित



टिप्पणी



तल में इनके संगत बिन्दु  $(0, -2)$ ,  $(3, 0)$  तथा  $(-3, -4)$  हैं। अतः, आप इन बिन्दुओं को तल में आलेखित करके उन्हें मिलाएं तो वह रैखिक समीकरण का ग्राफ निरूपित करता है जैसा आकृति 5.5 में दिखाया गया है। नोट कीजिए कि सभी तीन बिन्दु एक ही रेखा में हैं।



आकृति 5.5

**उदाहरण 5.16:** समीकरण  $x = 3$  का आलेख खींचिए।

**हल:** लगता है कि यह समीकरण एक ही चर  $x$  में है। इसको आप निम्न प्रकार से लिखकर दो चरों वाले रैखिक समीकरण में बदल सकते हैं।

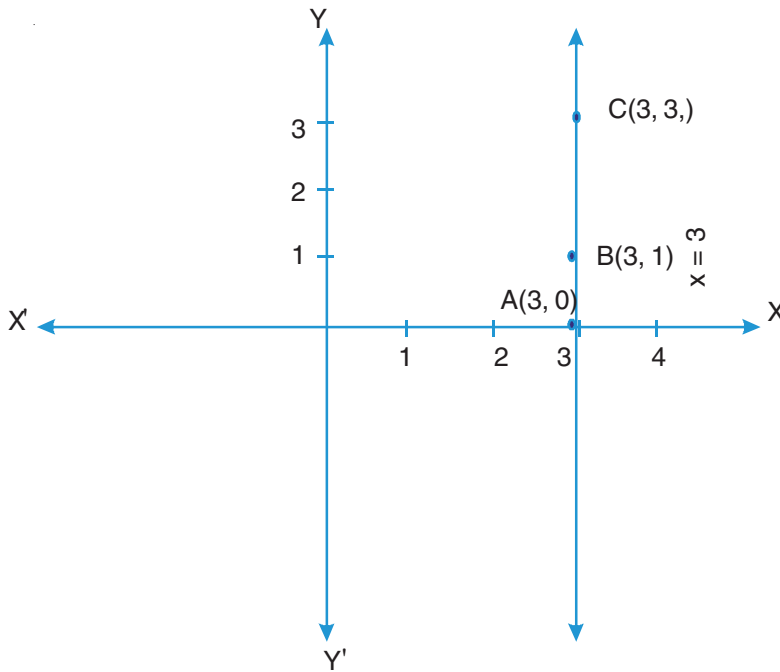
$$x + 0y = 3$$

अब आप  $x$  तथा  $y$  के मानों को निम्न तालिका के रूप में लिख सकते हैं:

$x$	3	3	3
$y$	3	0	1

अवलोकन कीजिए कि  $y$  के प्रत्येक मान के लिए  $x$  का मान 3 है। अतः वांछित बिन्दु  $(3, 3)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(3, 1)$  हैं। आकृति 5.6 में आलेख दिखाया गया है।





आकृति 5.6



**देखें आपने कितना सीखा 5.6**

- कार्तीय तल में निम्न बिन्दुओं को आलेखित कीजिए:
 

(i) (3, 4)	(ii) (-3, -2)	(iii) (-2, 1)
(iv) (2, -3)	(v) (4, 0)	(vi) (0, -3)
- दो चरों वाले निम्न रैखिक समीकरणों का आलेख खींचिए:
 

(i) $x + y = 5$	(ii) $3x + 2y = 6$
(iii) $2x + y = 6$	(iv) $5x + 3y = 4$

**5.7 दो चरों के रैखिक समीकरण का निकाय**

नेहा ने बाजार जाकर, 2 पैंसिल तथा 3 पैन 19 रु में खरीदे। मेरी ने 3 पैंसिल तथा 2 पैन 16 रु में खरीदे। 1 पैंसिल तथा 1 पैन का मूल्य ज्ञात कीजिए। यदि एक पैंसिल का मूल्य  $x$  रु तथा पैन का मूल्य  $y$  रु है, तो नेहा की खरीद के लिए रैखिक समीकरण  $2x + 3y = 19$  तथा मेरी के लिए समीकरण  $3x + 2y = 16$  है।  $x$  तथा  $y$  का मान ज्ञात करने के लिए हमें  $x$  तथा  $y$  के वह मान ज्ञात करने हैं जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करें, अर्थात्

बीजगणित



टिप्पणी



$$2x + 3y = 19$$

$$3x + 2y = 16 \text{ को संतुष्ट करें।}$$

इन दोनों समीकरणों को मिलाकर इसे दो चरों के रैखिक **समीकरणों का निकाय** कहते हैं तथा  $x$  तथा  $y$  के वह मान जो दोनों समीकरणों को एक साथ संतुष्ट करें, वह समीकरणों के हल हैं। ऐसे समीकरणों को हल करने के दो तरीके हैं। एक आलेखीय विधि तथा दूसरी बीजीय विधि है। आप पहले आलेखीय विधि और फिर बीजीय विधि से ऐसे समीकरणों को हल करना सीखेंगे।

**5.7.1 आलेखीय विधि**

इस विधि में, एक ही ग्राफ पेपर पर आप दोनों समीकरणों का आलेख बनायेंगे। इन समीकरणों के आलेख निम्न प्रकार के हो सकते हैं।

- (i) **प्रतिच्छेदी रेखाएँ:** इस दशा में, प्रतिच्छेद बिन्दु दोनों समीकरणों का उभयनिष्ठ हल होगा  $x$ -निर्देशांक  $x$  का मान तथा  $y$ -निर्देशांक  $y$  का मान देगा। इस दशा में निकाय का एक **अद्वितीय हल** होगा।
- (ii) **संपाती रेखाएँ:** इस दशा में रेखा का प्रत्येक बिन्दु हल होगा। अतः इस दशा में निकाय के **अनंत हल** होंगे।
- (iii) **समांतर रेखाएँ:** इस दशा में दोनों समीकरणों में कोई हल उभयनिष्ठ नहीं होगा। अतः इस दशा में निकाय का कोई हल नहीं होगा।

**उदाहरण 5.17:** निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$x - 2y = 0 \quad \dots(1)$$

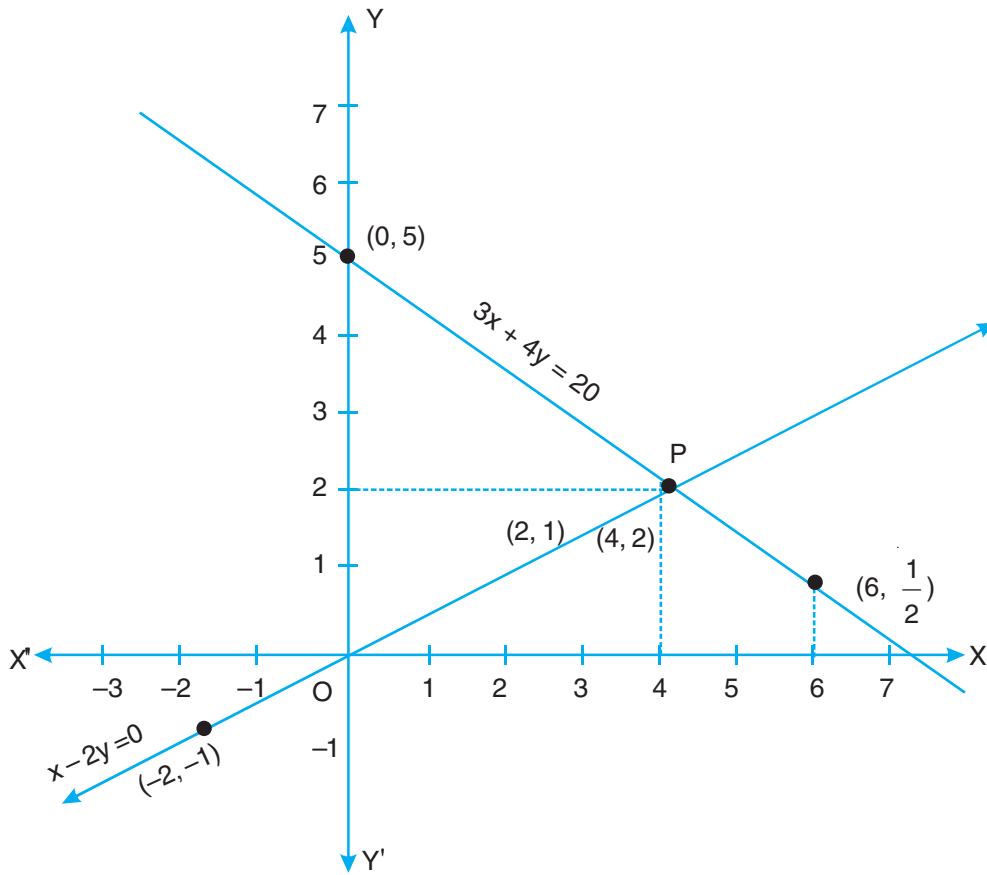
$$3x + 4y = 20 \quad \dots(2)$$

**हल:** आइए हम इन समीकरणों का आलेख खींचें। इसके लिए हमें प्रत्येक समीकरण के कम-से-कम दो हल चाहिए। हम इनको निम्न तालिकाओं में देते हैं।

$x - 2y = 0$				$3x + 4y = 20$			
x	0	2	-2	x	0	4	6
y	0	1	-1	y	5	2	1/2

अब इनको एक ही ग्राफ पेपर पर आलेखित कीजिए जैसा नीचे दिया गया है। दोनों ग्राफ बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं जिसके निर्देशांक (4, 2) हैं। अतः  $x = 4$  तथा  $y = 2$  एक हल है। आप जांच कर सकते हैं कि  $x = 4, y = 2$ , दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता है।





आकृति 5.7

**उदाहरण 5.18:** निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$x + y = 8 \quad \dots(1)$$

$$2x - y = 1 \quad \dots(2)$$

**हल:** इन समीकरणों का आलेख खींचने के लिए, प्रत्येक समीकरण के कुछ हल ज्ञात कर उन्हें निम्न प्रकार से लिखिए:

$$x + y = 8$$

x	3	4	5
y	5	4	3

$$2x - y = 1$$

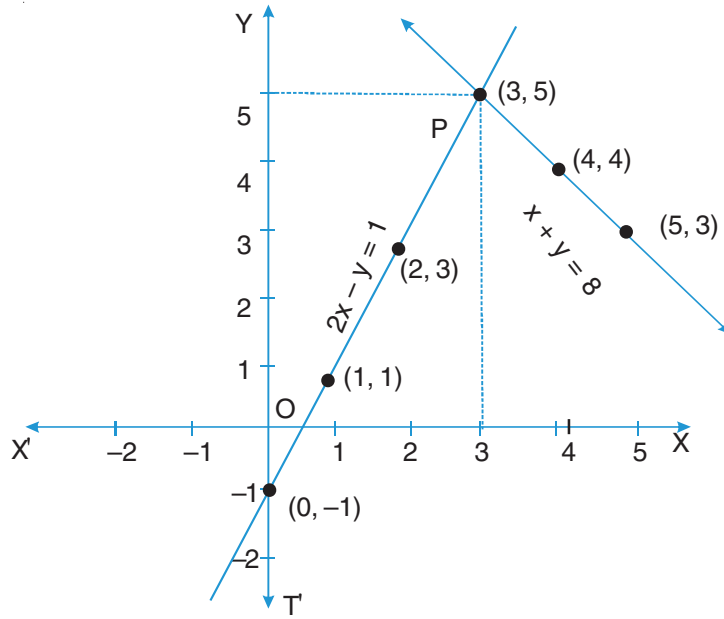
x	0	1	2
y	-1	1	3

अब बिन्दुओं (3, 5), (4, 4) तथा (5, 3) को आलेखित करके  $x + y = 8$  का ग्राफ खींचिये। इसी प्रकार बिन्दुओं (0, -1), (1, 1) तथा (2, 3) को उसी ग्राफ पेपर पर आलेखित करके  $2x - y = 1$  का ग्राफ खींचिये। दोनों रेखाएँ बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं जिसके निर्देशांक (3, 5) हैं। अतः  $x = 3$  तथा  $y = 5$  इस निकाय का हल है। आप जाँच कर सकते हैं कि  $x = 3$  तथा  $y = 5$  दोनों समीकरणों को साथ-साथ संतुष्ट करते हैं।

बीजगणित



टिप्पणी



आकृति 5.8

**उदाहरण 5.19:** निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$x + y = 2 \quad \dots(1)$$

$$2x + 2y = 4 \quad \dots(2)$$

**हल:** प्रत्येक समीकरण के कुछ हल लेकर पहले तालिकाएँ बनाइये:

$$x + y = 2$$

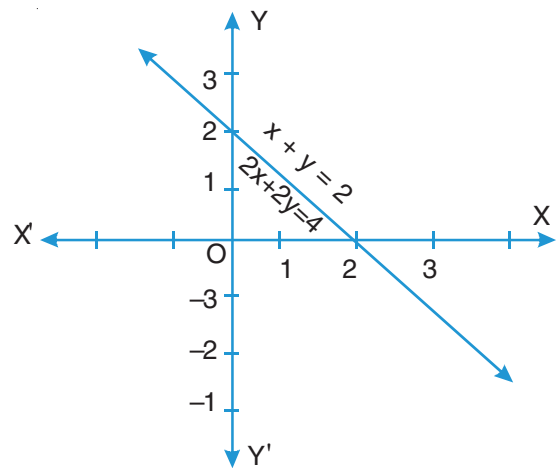
x	0	2	1
y	2	0	1

$$2x + 2y = 4$$

x	0	2	1
y	2	0	1

अब इस समीकरणों के आलेख इन बिन्दुओं को आलेखित करके खींचें।

आप देखेंगे कि दोनों समीकरणों का आलेख एक ही है। अतः समीकरण निकाय के अनंत हल हैं। उदाहरणतया  $x = 0, y = 2; x = 1, y = 1; x = 2, y = 0$  इत्यादि आप अवलोकन करें कि मौलिक रूप से दोनों समीकरण एक ही हैं।



आकृति 5.9





**उदाहरण 5.20:** निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$2x - y = 4 \quad \dots(1)$$

$$4x - 2y = 6 \quad \dots(2)$$

**हल:** आइए दोनों समीकरणों के आलेख, दोनों समीकरणों के कुछ हल लेकर बनायें:

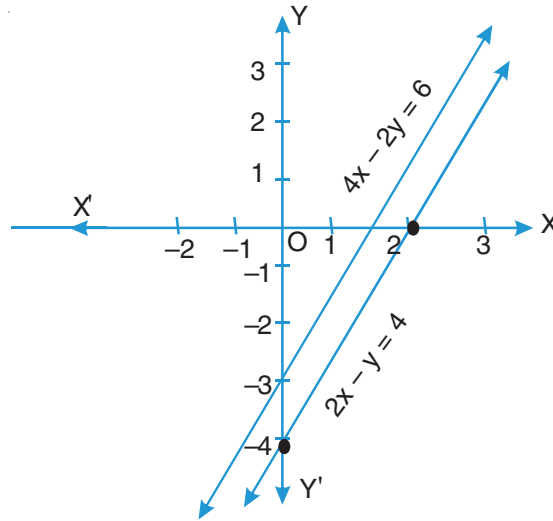
$$2x - y = 4$$

x	0	2	-1
y	-4	0	-6

$$4x - 2y = 6$$

x	0	1.5	2
y	-3	0	1

आप देख सकते हैं कि दोनों ग्राफ समांतर रेखाएँ हैं। क्योंकि इनका कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है, इसलिए इस निकाय का कोई हल नहीं है।



आकृति 5.10



### देखें आपने कितना सीखा 5.7

निम्न समीकरण निकायों को आलेखीय विधि से हल कीजिए। यह भी बताइए कि क्या इनका अद्वितीय हल है, अनंत हल हैं अथवा कोई हल नहीं है।

- $x - y = 3$                        $x + y = 5$
- $2x + 3y = 1$                        $3x - y = 7$
- $x + 2y = 6$                        $2x + 4y = 12$
- $3x + 2y = 6$                        $6x + 4y = 18$
- $2x + y = 5$                        $3x + 2y = 8$

बीजगणित



टिप्पणी



5.7.2 बीजीय विधि

दो दो चर वाले रैखिक समीकरणों का हल ज्ञात करने के कई विधियाँ हैं। एक विधि, जिसे आलेखीय विधि कहते हैं, आपने सीखी है। अब हम दो अन्य विधियों का वर्णन करेंगे जिन्हें बीजीय विधि कहते हैं। वह हैं:

(i) प्रतिस्थापन विधि

(ii) विलोपन विधि

**नोट:** यह विधियाँ लाभकारी हैं जब समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है।

**प्रतिस्थापन विधि:** इस विधि में हम एक समीकरण से एक चर का मान ज्ञात कर उसे दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित कर देते हैं। इस प्रकार दूसरा समीकरण एक चर वाला समीकरण बन जायेगा जिसे हमने हल करना सीखा है। आइए इस विधि को हम उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें।

**उदाहरण 5.21:** निम्न समीकरण निकाय को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए:

$$5x + 2y = 8 \quad \dots(1)$$

$$3x - 5y = 11 \quad \dots(2)$$

**हल:** (1) से हमें मिलता है

$$2y = 8 - 5x$$

$$\text{अथवा } y = \frac{1}{2}(8 - 5x) \quad \dots(3)$$

y के इस मान को (2) में रखने पर हमें मिलता है

$$3x - \frac{5}{2}(8 - 5x) = 11$$

$$\text{अथवा } 6x - 5(8 - 5x) = 22$$

$$\text{अथवा } 6x - 40 + 25x = 22$$

$$\text{अथवा } 31x = 40 + 22 = 62$$

$$\text{अथवा } x = \frac{62}{31} = 2$$

x = 2 को (3) में रखने पर

$$y = \frac{1}{2}(8 - 5 \times 2) = \frac{1}{2}(8 - 10)$$

$$\text{अथवा } y = -\frac{2}{2} = -1$$

अतः समीकरण का हल x = 2, y = -1 है।



**उदाहरण 5.22:** निम्न समीकरण को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए:

$$2x + 3y = 7 \quad \dots(1)$$

$$3x + y = 14 \quad \dots(2)$$

**हल:** समीकरण (2) से हमें मिलता है

$$y = 14 - 3x \quad \dots(3)$$

y के मान को (1) में रखने पर हमें मिलता है

$$2x + 3(14 - 3x) = 7$$

अथवा  $2x + 42 - 9x = 7$

अथवा  $2x - 9x = 7 - 42$

अथवा  $-7x = -35$

अतः  $x = \frac{-35}{-7} = 5$

x के मान को (3) में रखने पर हमें मिलता है

$$y = 14 - 3x = 14 - 3 \times 5$$

अथवा  $y = 14 - 15 = -1$

अतः  $x = 5, y = -1$  दिए समीकरणों का हल है।

**जाँच:** आप जाँच कर सकते हैं कि  $x = 5, y = -1$  दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं।



### देखें आपने कितना सीखा 5.8

निम्न समीकरण निकायों को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए:

1.  $x + y = 14$

$x - y = 2$

3.  $3x + 2y = 11$

$2x + 3y = 4$

2.  $2x + 3y = 11$

$2x - 4y = -24$

4.  $7x - 2y = 1$

$3x + 4y = 15$

**विलोपन विधि:** इस विधि में हम एक चर का विलोपन दोनों समीकरणों का उचित शून्येतर संख्या से गुणा कर एक चर के गुणांकों को संख्यात्मक रूप समान करके, करते हैं तब हम एक समीकरण को दूसरे समीकरण में जोड़ (या घटाकर) उस चर का विलोपन कर देते हैं। परिणामस्वरूप हमें एक चर में एक समीकरण मिलता है। इस विधि को दर्शाने के लिए हम कुछ उदाहरण लेते हैं:

बीजगणित



टिप्पणी



**उदाहरण 5.23:** विलोपन विधि का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$3x - 5y = 4 \quad \dots(1)$$

$$9x - 2y = 7 \quad \dots(2)$$

**हल:**  $x$  का विलोपन करने के लिए हम समीकरण (1) को 3 से गुणा करके उनके गुणांक समान कर लेते हैं, तो हमें समीकरण मिलते हैं

$$9x - 15y = 12 \quad \dots(3)$$

$$9x - 2y = 7 \quad \dots(4)$$

(4) को (3) में से घटाने पर मिलता है

$$9x - 15y - (9x - 2y) = 12 - 7$$

अथवा  $9x - 15y - 9x + 2y = 5$

अथवा  $-13y = 5$

अथवा  $y = -\frac{5}{13}$

$y = -\frac{5}{13}$  समीकरण (1) में रखने पर हमें मिलता है

$$3x - 5 \times \left(-\frac{5}{13}\right) = 4$$

अथवा  $3x + \frac{25}{13} = 4$

अथवा  $3x = 4 - \frac{25}{13} = \frac{27}{13}$

अथवा  $x = \frac{9}{13}$

अतः,  $x = \frac{9}{13}$  तथा  $y = -\frac{5}{13}$  इस समीकरण के वांछित हल हैं।

**उदाहरण 5.24:** निम्न समीकरण निकाय को विलोपन विधि से हल कीजिए:

$$2x + 3y = 13 \quad \dots(1)$$

$$5x - 7y = -11 \quad \dots(2)$$

**हल:**  $y$  का विलोपन करने के लिए हम समीकरण (1) को 7 से गुणा करके तथा समीकरण (2) को 3 से गुणा करके प्राप्त करते हैं:







$$14x + 21y = 91 \quad \dots(3)$$

$$15x - 21y = -33 \quad \dots(4)$$

(3) तथा (4) को जोड़ने पर

$$29x = 58$$

$$\text{अथवा } x = \frac{58}{29} = 2$$

$x = 2$  को समीकरण (1) में रखने से प्राप्त होता है

$$2 \times 2 + 3y = 13$$

$$\text{अथवा } 3y = 13 - 4 = 9$$

$$\text{अथवा } y = \frac{9}{3} = 3$$

अतः,  $x = 2$  तथा  $y = 3$  दिये गए समीकरण निकाय का हल है।



### देखें आपने कितना सीखा 5.9

निम्न समीकरण निकायों को विलोपन विधि से हल कीजिए:

1.  $3x + 4y = -6$

$$3x - y = 9$$

3.  $x - 2y = 7$

$$3x + y = 35$$

5.  $2x + 3y = 4$

$$3x + 2y = 11$$

2.  $x + 2y = 5$

$$2x + 3y = 8$$

4.  $3x + 4y = 15$

$$7x - 2y = 1$$

6.  $3x - 5y = 23$

$$2x - 4y = 16$$

### 5.8 शाब्दिक प्रश्न

**उदाहरण 5.25:** एक आयताकार बाग का परिमाण 20 मी है। यदि बाग की लम्बाई, उसकी चौड़ाई से 4 मी अधिक है, तो बाग की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना बाग की लम्बाई =  $x$  मी तो बाग की चौड़ाई =  $(x - 4)$  मी

क्योंकि परिमाण 20 मी है। अतः

$$2[x + (x - 4)] = 20$$

बीजगणित



टिप्पणी



$$\text{अथवा } 2(2x - 4) = 20$$

$$\text{अथवा } 2x - 4 = 10$$

$$\text{अथवा } 2x = 10 + 4 = 14$$

$$\text{अथवा } x = 7$$

अतः लम्बाई = 7 मी तथा चौड़ाई =  $7 - 4 = 3$  मी।

वैकल्पिक विधि से आप इस प्रश्न को दो चरों के प्रयोग से भी हल कर सकते हैं।

$$\text{माना बाग की लम्बाई} = x \text{ मी}$$

और बाग मी चौड़ाई =  $y$  मी

$$\text{अतः } x = y + 4 \quad \dots(1)$$

परिमाण भी 20 मी दिया है

$$\therefore 2(x + y) = 20$$

$$\text{अथवा } x + y = 10 \quad \dots(2)$$

(1) तथा (2) को हल करने पर  $x = 7, y = 3$  मिलता है।

अतः लम्बाई = 7 मी तथा चौड़ाई = 3 मी।

**उदाहरण 5.26:** आशा, राबर्ट से 5 वर्ष बड़ी है। पाँच वर्ष पहले आशा, राबर्ट की उस समय की आयु से, दुगुनी आयु की थी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना आशा की वर्तमान आयु =  $x$  वर्ष

और राबर्ट की वर्तमान आयु =  $y$  वर्ष

$$\text{अतः, } x = y + 5$$

$$\text{अथवा } x - y = 5 \quad \dots(1)$$

5 वर्ष पहले आशा की आयु  $x - 5$  वर्ष तथा राबर्ट की आयु  $(y - 5)$  वर्ष

$$\text{अतः, } x - 5 = 2(y - 5)$$

$$\text{अथवा } x - 2y = -5 \quad \dots(2)$$

(1) और (2) को हल करने पर  $y = 10$  तथा  $x = 15$

अतः आशा की वर्तमान आयु = 15 वर्ष, राबर्ट की वर्तमान आयु = 10 वर्ष

**उदाहरण 5.27:** दो स्थान A तथा B के बीच की दूरी 100 किमी है। एक कार A से चलती है तथा उसी समय दूसरी कार B से चलती है। यदि वह एक ही दिशा में चलें तो वह 5 घंटे बाद





मिलते हैं। यदि वह एक दूसरे की ओर चलें, तो वह एक घंटे में मिलते हैं। दोनों कारों की गति ज्ञात कीजिए यह मानते हुए कि कार A की गति, कार B की गति से अधिक है।

**हल:** माना A से चलने वाली कार की गति =  $x$  किमी/घंटा

तथा B से चलने वाली कार की गति =  $y$  किमी/घंटा

अतः कार A द्वारा 5 घंटे में तय की गयी दूरी =  $5x$  किमी

तथा कार B द्वारा 5 घंटे में तय की गयी दूरी =  $5y$  किमी

क्योंकि वह 5 घंटे बाद मिलती हैं जब वह एक ही दिशा में चलें, अतः कार A कार B से 100 किमी दूरी अधिक तय करती है।

$$5x - 5y = 100$$

अथवा  $x - y = 20$  ... (1)

जब वह एक दूसरे की ओर चलें, तो वह 1 घंटे में मिलती हैं। इसका अर्थ है दोनों कारों द्वारा मिलकर 1 घंटे में तय की गई दूरी = 100 किमी

अतः  $x + y = 100$  ... (2)

(1) तथा (2) को हल करने पर  $x = 60$ ,  $y = 40$

अतः, A पर स्थित कार की गति = 60 किमी/घंटा

B पर स्थित कार की गति = 40 किमी/घंटा



### देखें आपने कितना सीखा 5.10

1. रहीम के पिता की आयु, रहीम की आयु से तीन गुनी है। यदि उनकी आयु का योग 56 वर्ष है तो उनकी आयु ज्ञात कीजिए।
2. रीता के पास 10 मी कपड़ा है। उसने उसे दो भागों में इस प्रकार बांटा कि एक टुकड़ा, दूसरे से 4 मी अधिक लम्बा है। छोटे टुकड़े की लम्बाई क्या है?
3. 200 व्यक्तियों में इनाम के तौर पर कुल ₹ 50000 बांटे जाने हैं। एक इनाम या तो ₹ 500 का या ₹ 100 का है। प्रत्येक प्रकार के इनामों की संख्या ज्ञात कीजिए।
4. एक बटुए में ₹ 100 वाले तथा ₹ 50 वाले नोट हैं जिनका कुल मूल्य ₹ 25000 है। यदि ₹ 100 के नोटों की संख्या ₹ 50 के नोटों की संख्या से एक अधिक है, तो दोनों प्रकार के नोटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

बीजगणित



टिप्पणी



आइए दोहराएँ

- एक चर तथा घात 1 का समीकरण एक चर का रैखिक समीकरण कहलाता है।
- एक चर के रैखिक समीकरण का व्यापक रूप  $ax + b = 0$ ,  $a \neq 0$  है, जहाँ  $a$  तथा  $b$  वास्तविक संख्याएँ हैं।
- चर का वह मान जो रैखिक समीकरण को संतुष्ट करे, उसका हल या मूल कहलाता है।
- एक शाब्दिक प्रश्न का पहले बीजीय कथन के रूप में अनुवाद करके उसे हल करते हैं।
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण का व्यापक रूप  $ax + by + c = 0$  है जहाँ  $a, b, c$  वास्तविक संख्याएँ हैं तथा  $a$  तथा  $b$  में से कम-से-कम एक शून्येतर है।
- समीकरण  $ax + c = 0$  को दो चर वाले रैखिक समीकरण  $ax + 0y + c = 0$  के रूप में लिख सकते हैं।
- दो चर वाले रैखिक समीकरण का आलेख खींचने के लिये हमें तल में कम से कम दो बिन्दु ढूँढने होंगे जिनके निर्देशांक समीकरण के हल हैं, और फिर उन्हें आलेखित करते हैं।
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख एक रेखा है।
- दो चरों वाले एक समीकरण निकाय का हल ज्ञात करने के लिए हम उन्हें एक ही ग्राफ पर आलेखित करते हैं:
  - (i) यदि आलेख प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं, तो प्रतिच्छेद बिन्दु एक अद्वितीय हल देता है।
  - (ii) यदि आलेख संपाती रेखा है, तो समीकरण निकाय के अनंत हल हैं।
  - (iii) यदि आलेख समांतर रेखाएँ हैं, तो समीकरण निकाय का कोई हल नहीं।
- रैखिक समीकरण निकाय के हल करने की बीजीय विधियाँ हैं:
  - (i) प्रतिस्थापन विधि
  - (ii) विलोपन विधि
- शाब्दिक प्रश्नों को हल करने के लिए हम दिये गये आंकड़ों (अथवा सूचनाओं) को रैखिक समीकरणों में अनुवाद करके उन्हें हल करते हैं।



आइए अभ्यास करें

1. सही उत्तर चुनिए:
  - (i) निम्न समीकरणों में से कौन सा एक चर में रैखिक समीकरण है?
 

(A) $2x + 1 = y - 3$	(B) $3t - 1 = 2t + 5$
(C) $2x - 1 = x^2$	(D) $x^2 - x + 1 = 0$



(ii) निम्न में से कौन सा रैखिक समीकरण नहीं है?

- (A)  $5 + 4x = y + 3$  (B)  $x + 2y = y - x$   
(C)  $3 - x = y^2 + 4$  (D)  $x + y = 0$

(iii) समीकरण  $2(x + 3) = 18$  का निम्न में से कौन सा हल है?

- (A) 6 (B) 12  
(C) 13 (D) 21

(iv)  $x$  का वह मान जिससे समीकरण  $2x - (4 - x) = 5 - x$  संतुष्ट है, निम्न है

- (A) 4.5 (B) 3  
(C) 2.25 (D) 0.5

(v) समीकरण  $x - 4y = 5$  का (के)

- (A) कोई हल नहीं है (B) अद्वितीय हल हैं  
(C) दो हल हैं (D) अनंत हल हैं

2. निम्न में से प्रत्येक समीकरण को हल कीजिए:

(i)  $2z + 5 = 15$  (ii)  $\frac{x+2}{3} = -2$

(iii)  $\frac{4-2y}{3} + \frac{y+1}{2} = 1$  (iv)  $2.5x - 3 = 0.5x + 1$

3. एक संख्या में 8 बढ़ाने पर 26 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

4. रीना तथा मीना की वर्तमान आयु में 4 : 5 का अनुपात है। 8 वर्ष पश्चात उनकी आयु में 5 : 6 का अनुपात होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

5. एक परिमेय संख्या का हर, उसके अंश से 8 बड़ा है। यदि हर में से 1 घटा दिया जाए तथा अंश में 17 जोड़ दिया जाए, तो संख्या  $\frac{3}{2}$  हो जाती है। परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

6. निम्न समीकरण निकायों को आलेखीय विधि से हल कीजिए:

(i)  $x - 2y = 7$  (ii)  $4x + 3y = 24$   
 $x + y = -2$   $3y - 2x = 6$

(iii)  $x + 3y = 6$  (iv)  $2x - y = 1$   
 $2x - y = 5$   $x + y = 8$

7. निम्न समीकरण निकायों को हल कीजिए:

(i)  $x + 2y - 3 = 0$  (ii)  $2x + 3y = 3$   
 $x - 2y + 1 = 0$   $3x + 2y = 2$

(iii)  $3x - y = 7$  (iv)  $5x - 2y = -7$   
 $4x - 5y = 2$   $2x + 3y = -18$

बीजगणित



टिप्पणी



8. एक दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 11 है। यदि अंक अपना स्थान बदल लें, तो नई बनी संख्या मूल संख्या से 27 कम है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।
9. तीन वर्ष पहले, अतुल की आयु पारुल की आयु से 4 गुनी थी। आज से 5 वर्ष बाद, अतुल की आयु पारुल की आयु से दुगुनी होगी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
10. एक आयताकार प्लाट का परिमाण 32 मी है। यदि लम्बाई 2 मी बढ़ा दी जाए तथा चौड़ाई 1 मी कम कर दी जाये, तो प्लाट का क्षेत्रफल वही रहता है। प्लाट की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

5.1

1. (i)                      2. (i)

5.2

1.  $15 - 2x = 7$                       2.  $0.1x = 10$
3.  $6y = 96$                               4.  $t + 15 = 4t$

5.3

1.  $x = 13$                       2.  $y = 12$                       3.  $z = 0$
4.  $y = 9$                               5.  $x = 5$

5.4

1. 39, 46                              2. 15 वर्ष, 50 वर्ष
3. 22 सेमी, 11 सेमी                      4. 25

5.5

1. (i)  $2(x + y) = 98$   
 (ii)  $y = 2x + 10$ , जहाँ बेटे की आयु  $x$  वर्ष तथा पिता की आयु  $y$  वर्ष है।  
 (iii)  $x + 10 = y$                               (iv)  $x + 3y = 120$
2. सत्य                                      3. असत्य

5.7

1.  $x = 4, y = 1$ , अद्वितीय हल                      2.  $x = 2, y = -1$ , अद्वितीय हल
3. अनंत हल                                      4. कोई हल नहीं
5.  $x = 2, y = 1$ , अद्वितीय हल





5.8

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| 1. $x = 8, y = 6$  | 2. $x = -2, y = 5$ |
| 3. $x = 5, y = -2$ | 4. $x = 1, y = 3$  |

5.9

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| 1. $x = 2, y = -3$ | 2. $x = 1, y = 2$  |
| 3. $x = 11, y = 2$ | 4. $x = 1, y = 3$  |
| 5. $x = 5, y = -2$ | 6. $x = 6, y = -1$ |

5.10

- 14 वर्ष, 42 वर्ष
- 7 मी
- ₹ 500 वाले 75 इनाम, ₹ 100 वाले 125 इनाम
- ₹ 100 के 17 नोट, ₹ 50 के 16 नोट



आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (i)(B)      (ii)(C)      (iii)(A)      (iv)(C)      (v)(D)
2. (i)  $z = 5$       (ii)  $x = -8$       (iii)  $y = 5$       (iv)  $x = 2$
3. 18
4. रीना की आयु = 32 वर्ष, मीना की आयु = 40 वर्ष
5.  $\frac{13}{21}$
6. (i)  $x = 1, y = -3$       (ii)  $x = 3, y = 4$   
(iii)  $x = 3, y = 1$       (iv)  $x = 3, y = 5$
7. (i)  $x = 1, y = 1$       (ii)  $x = 0, y = 1$   
(iii)  $x = 3, y = 2$       (iv)  $x = -3, y = -4$
8. 74
9. अतुल: 19 वर्ष, पारुल: 7 वर्ष
10. 10 मी, 6 मी