10

311hi10

गणितीय आगमन का सिद्धान्त

आप अपने दैनिक जीवन में परिस्थिति के अनुसार विविध प्रकार के तर्कों, का प्रयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, यदि आप को यह ज्ञात हुआ हो कि आप के मित्र के यहाँ सन्तान पैदा हुई, तो आप जानना चाहेंगे कि वह पुत्री है अथवा पुत्र। यहाँ आप एक विशेष स्थिति के लिए सामान्य सिद्धान्तों का उपयोग करेंगे। इस प्रकार का तर्क निगमन तर्क का उदाहरण है।

आइए, अब हम एक दूसरी स्थिति पर विचार करें। जब आप अपने आसपास देखते हैं तो ज्ञात होता है कि विद्यार्थी नियमित रूप से पढ़ते हैं, वे परीक्षा में अच्छा करते हैं। आप इससे सामान्य नियम (विचारधारा) (गलत या सही) बना सकते हैं कि ''जो भी नियमित रूप से पढ़ेगा, परीक्षा में अच्छा करेगा।'' इस में आप अनेक विशिष्ट उदाहरणों द्वारा सामान्य नियम बिनाएँगे। ऐसा तर्क आगमनिक (inductive) कहलाता हैं, जो तर्क की एक ऐसी प्रक्रिया है, जिसमें अनेक विशिष्ट स्थितियों के व्यक्तिगत प्रेक्षणों तथा विचारों द्वारा व्यापक नियमों का पता लगाया जाता है। ऐसे तर्क का उपयोग विज्ञान तथा गणित में किया जाता है।

गणितीय आगमन इस प्रक्रिया का और अधिक यथार्थ रूप है। ऐसी यथार्थता की आवश्यकता होती है, क्योंकि कोई कथन गणित के अनुसार तभी सत्य माना जाता है जब प्रत्येक स्थिति में, जिसके संदर्भ में वह है, उस की सत्यता दर्शाई जा सके। इस पाठ में हम सर्वप्रथम कथन से आपका परिचय करवायेंगे और उसके पश्चात् गणितीय आगमन के सिद्धान्त से परिचित होकर इसकी सहायता से विभिन्न गणितीय कथनों को सिद्ध करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे:

- यह बता पाना कि दिया हुआ वाक्या कथन है अथवा नहीं हैं।
- गणितीय आगमन के सिद्धान्त का कथन देना
- कथन $P(n)$ को $n = 1$ के लिए सत्यापित करना
- यदि कथन $P(k)$ सत्य हो, तो कथन $P(k+1)$ को सत्यापित करना
- गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा कुछ गणितीय कथनों को सिद्ध करना

पूर्व ज्ञानः

- संख्या निकाय
- संख्याओं तथा व्यजकों पर चार मूल–भूत संक्रियाएँ।

10.1 कथन क्या है?

आप अपने दैनिक व्यवहार में बहुत सी बातें वाक्यों के रूप में करते हैं। इन वाक्यों में से वे, जो या तो सत्य या असत्य होते हैं, उन्हें **कथन** या **साध्य** कहते हैं। उदाहरणार्थ,

''मैं बीस वर्ष का हूँ,'' और यदि $x = 3$, तो $x^2 = 9$'' कथन हैं; परन्तु ''आप कब जाएँगे?'' तथा ''कितना आश्चर्यजनक!'' कथन नहीं हैं।

ध्यान दीजिए कि कथन एक निश्चित वाक्य होता है, जो या तो सत्य होता है या असत्य, दोनों एक साथ नहीं। उदाहरणार्थ '$x - 5 = 7$' कथन नहीं है क्योंकि हम नहीं जानते कि x का मान क्या है। यदि $x = 12$ है तो यह सत्य है परन्तु यदि $x = 5$ है, तो यह असत्य है। अतः '$x - 5 = 7$' को गणितज्ञों ने कथन नहीं माना।

परन्तु ''$x - 5 = 7 \Rightarrow x = 12$'' तथा सभी वास्तविक x के लिए $x - 5 = 7$ दोनों कथन हैं। इनमें से प्रथम सत्य तथा द्वितीय असत्य है।

उदाहरण 10.1. निम्नलिखित में से कौन से वाक्य कथन हैं?

(i) भारत का राष्ट्रपति कभी महिला नहीं रही।

(ii) 5 सम संख्या है।

(iii) $x^n > 1$

(iv) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

हल : (i) और (ii) कथन हैं (i) सत्य है और (ii) असत्य है। (iii) कथन नहीं है क्योंकि जब तक x और y के मानों का परास ज्ञात नहीं है, हम उस की सत्यता या असत्यता निर्धारित नहीं कर सकते।

अब (iv) को देखिए। प्रथम दृष्टि में यह कथन नहीं लगेगा, जिस आधार पर (iii) नहीं है। परन्तु ध्यान से (iv) को देखिए। a तथा b के सभी मानों के लिए यह सत्य है। यह एक सर्वसमिका है। यद्यपि यहाँ a और b के मानों का परास नहीं दिया गया है, तब भी (iv) एक कथन है।

कुछ कथन, जैसा एक नीचे दिया गया है, सामान्यतः प्राकृत संख्याओं के लिए हैं। आइए नीचे दिए गए कथन पर विचार करें।

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

यह प्राकृत संख्या n से सम्बद्ध है। हम इस कथन को P (n) कहेंगे। (यहाँ P साध्य को सूचित करता है।)

तब P (1) होगा : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

इसी प्रकार P (2) होगा : $1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$ इत्यादि

आपको इस संकेत चिह्न से भलीभाँति अभ्यस्त कराने के लिए हम कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं:

उदाहरण 10.2. यदि P (n) '$2^n > n-1$' को व्यक्त करता है तो P (1), P (k) तथा P (k+1) लिखिए जहाँ $k \in N$ ।

हल : n के स्थान पर क्रमशः 1, k तथा k + 1, रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$P(1): 2^1 > 2 - 1$, अर्थात् $2 > 1$

$P(k): 2^k > k - 1$

$P(k+1): 2^{k+1} > (k+1) - 1$, अर्थात् $2^{k+1} > k$

उदाहरण 10. 3. यदि P (n) नीचे लिखा कथन है :

$$\text{‘}1 + 4 + 7 + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2},$$

तो $P(1)$, $P(k)$ और $P(k+1)$ लिखिए।

हल : $P(1)$ लिखने के लिए, $P(n)$ के बायें पक्ष में जब n के स्थान पर 1 लिखते हैं तो अन्तिम पद $3 \times 1 - 2$, प्राप्त होता है जो पहला पद है, अर्थात् बायें पक्ष में केवल एक पद ही है जो प्रथम पद है।

$P(1)$ का दायाँ पक्ष $= \dfrac{1 \times (3 \times 1 - 1)}{2} = 1$

अतः $P(1)$ '1 = 1' है।

n के स्थान पर 2 रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$P(2): 1 + 4 = \frac{2 \times (3 \times 2 - 1)}{2}, \text{ अर्थात् } 5 = 5.$$

n के स्थान पर क्रमशः k तथा $k + 1$, रखने पर हमे प्राप्त होता है :

$$P(k): 1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

$$P(k+1): 1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) + [3(k+1) - 2] = \frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2}$$

$$\text{अर्थात् } 1 + 4 + 7 + ... + (3k + 1) = \frac{(k+1)[(3k+2)}{2}$$

देखें आपने कितना सीखा 10.1

1. निम्नलिखित में से कौन–कौन से कथन हैं?

   (a) $1 + 2 + 4 \quad ....+ 2^n > 20$ (b) $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 99$

   (c) चेन्नई मुम्बई की तुलना में अधिक सुन्दर है (d) ताजमहल कहाँ है?

   (e) $\dfrac{1}{1 \times 2} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 5$ के लिए (f) $\operatorname{cosec}\theta < 1$

2. दिया है कि $P(n): n^3 + 5n$ का 6 एक गुणनखण्ड है। $P(1), P(2), P(k)$ तथा $P(k+1)$ लिखिए जबकि k एक प्राकृत संख्या है।

3. $P(1), P(k)$ और $P(k+1)$, लिखिए यदि $P(n)$ है :

   (a) $2^n \geq n + 1$ (b) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

   (c) $n\,(n+1)\,(n+2)$, 6 से विभाज्य है। (d) $(x^n - y^n)$, $(x - y)$ से विभाज्य है।

   (e) $(ab)^n = a^n b^n$ (f) $\left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है।

4. $P(1), P(2), P(k)$ तथा $P(k+1)$, लिखिए यदि $P(n)$ निम्न है :

   (a) $\frac{1}{1\times 2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (b) $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n-1) = n^2$

   (c) $(1\times 2) + (2\times 3) + \ldots. + n(n+1) < n(n+1)^2$

   (d) $\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

ऐसे कथनों, जो उदाहरण 10.2 तथा 10.3 में दिए हुए हैं, की सत्यता अथवा असत्यता की आप जाँच कैसे करेंगे? एक प्रभावशाली विधि गणितीय आगमन है, जिसकी अब हम चर्चा करेंगे।

10.2 गणितीय आगमन का सिद्धान्त

गणितीय आगमन इस प्रक्रिया का और अधिक यथार्थ रूप है। ऐसी यथार्थता की आवश्यकता होती है, क्योंकि कोई कथन गणित के अनुसार तभी सत्य माना जाता है जब प्रत्येक स्थिति में, जिसके संदर्भ में वह है, उस की सत्यता दर्शाई जा सके। निम्नलिखित सिद्धान्त उसके घटित होने की जाँच कराता है।

गणितीय आगमन का सिद्धान्त

मान लीजिए कि $P(n)$ प्राकृत संख्या n से सम्बद्ध कोई कथन है। यदि

(i) यह $n = 1$, के लिए सत्य है, अर्थात् $P(1)$ सत्य है, और

(ii) $P(k)$, $k \geq 1$, को सत्य मानते हुए यह सिद्ध किया जा सकता है कि $P(k+1)$ सत्य है, तब $P(n)$ प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए अवश्य ही सत्य होगा।

नोट कीजिए कि उपर्युक्त प्रतिबंध *(ii)* से अभिप्राय यह नहीं है कि *P(k)* सत्य है। इससे अभिप्राय है कि जब *P(k)* सत्य है तभी *P(k + 1)* सत्य है।

उदाहरणार्थ, आइए विचार करें, कि गणितीय आगमन के सिद्धान्त से $n = 11$ के लिए $P(n)$ के सत्य होने का निष्कर्ष कैसे निकलता है। (i) से $P(1)$ सत्य है। जब $P(1)$ सत्य है तो हम (ii) में $k = 1$ में रख सकते है। अतः $P(1 + 1)$ अर्थात् $P(2)$ सत्य है। $P(2)$ सत्य है तो हम (ii) में $k = 2$ में रख सकते हैं और $P(2 + 1)$ अर्थात् $P(3)$ सत्य है। अब (ii) में $k = 3$ रखने पर हमें $P(4)$ की सत्यता प्राप्त हो जाती है। इस प्रक्रिया को इसी प्रकार चलाते रहने पर हमें $P(11)$ की सत्यता प्राप्त हो जाएगी।

यह स्पष्ट है कि उपर्युक्त तर्क में 11 की कोई विशेष भूमिका नहीं है। हम, इसी प्रकार $P(137)$ को भी सत्य सिद्ध कर सकते हैं। वास्तव में यह स्पष्ट है कि $n > 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

आइए, अब उदाहरणों की सहायता से देखें कि गणितीय आगमन का सिद्धान्त विविध प्रकार के गणितीय कथनों को सिद्ध करने में कैसे सहायक होता है।

उदाहरण 10.4. सिद्ध कीजिए कि

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$$, जहाँ n प्राकृत संख्या है।

हल : हमें प्राप्त है कि

$$P(n): 1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

अतः $P(1)$ '$1=\frac{1}{2}(1+1)$' है जो सत्य है

अतः $P(1)$ सत्य है

अब हम यह देखेंगे कि जब $P(k)$ सत्य है, तो क्या $P(k+1)$ भी सत्य है।

अतः मान लेते हैं कि $P(k)$ सत्य है अर्थात्

$$1+2+3\ldots+k=\frac{k}{2}(k+1) \qquad \ldots.(i)$$

अब $P(k+1): 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

यह तभी सत्य होगा यदि बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$P(k+1)$ का बायाँ पक्ष $=(1+2+3\ldots+k)+(k+1)$

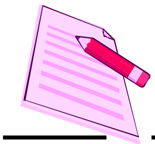
$$=\frac{k}{2}(k+1)+(k+1) \qquad \text{....[समीकरण (i) से]}$$

$$=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$= P(k+1)$ का दायाँ पक्ष

अतः यदि हम $P(k)$ को सत्य मानते हैं तो $P(k+1)$ सत्य प्राप्त हो जाता है। चूंकि $P(1)$ भी सत्य है, अतः गणितीय आगमन के सिद्धान्त के दोनों प्रतिबंध पूरे हो जाते हैं और हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दिया हुआ कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सत्य है। आप देख सकते हैं कि हम ने तीन पदों में परिणाम को सिद्ध किया; आधार पद (अर्थात् (i) की जाँच), दूसरा आगमन पद (अर्थात् (ii) की जाँच) और तीसरा परिणाम पर पहुँचना।



टिप्पणी

उदाहरण 10.5. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, सिद्ध कीजिए कि $\left(x^{2n-1}+y^{2n-1}\right)$, $(x+y)$ से विभाज्य है; जबकि $x, y \in N$.

हल : आइए देखें कि क्या हम यहाँ आगमन के सिद्धान्त को लगा सकते हैं। हम कथन '$\left(x^{2n-1}+y^{2n-1}\right)$, $(x+y)$', से विभाज्य है,' को $P(n)$ कहेंगे।

तब $P(1)$: '$\left(x^{2-1}+y^{2-1}\right)$, $(x+y)$' से विभाज्य है, जो सत्य है।

अतः $P(1)$ सत्य है।

अब हम मान लेते हैं कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए $P(k)$ सत्य है।

अर्थात् $(x^{2k-1}+y^{2k-1})$, $(x+y)$ से विभाज्य है।

इसका अर्थ है कि किसी प्राकृत संख्या t के लिए $x^{2k-1}+y^{2k-1}=(x+y)t$

तब, $x^{2k-1}=(x+y)t-y^{2k-1}$

अब, हम सिद्ध करना चाहते हैं कि P $(k+1)$ सत्य है।

अर्थात् '$[x^{2(k+1)-1}+y^{2(k+1)-1}]$, $(x+y)$ से विभाज्य है।'

अब

$$\begin{aligned}
x^{2(k+1)-1}+y^{2(k+1)-1} &= x^{2k+1}+y^{2k+1}\\
&= x^{2k-1+2}+y^{2k+1}\\
&= x^{2}.x^{2k-1}+y^{2k+1}\\
&= x^{2}.[(x+y)t-y^{2k-1}]+y^{2k+1}\\
&= x^{2}(x+y)t-x^{2}y^{2k-1}+y^{2k+1}\\
&= x^{2}(x+y)t-x^{2}y^{2k-1}+y^{2}y^{2k-1}\\
&= x^{2}(x+y)t-y^{2k-1}(x^{2}-y^{2})\\
&= (x+y)[x^{2}t-(x-y)\,y^{2k-1}]
\end{aligned}$$

जो, $(x+y)$ का गुणज है।

इस प्रकार $P\,(k+1)$ सत्य है।

अतः गणितीय आगमन के सिद्धान्त से दिया हुआ कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सत्य है।

उदाहरण 10.6. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, सिद्ध कीजिए कि $2^n > n$

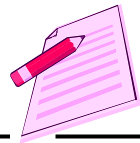
हल : हमें प्राप्त है $P(n) : 2^n > n.$

अतः $P(1) : 2^1 > 1$, अर्थात् $2 > 1$, जो सत्य है।

हम मान लेते हैं कि $P(k)$ सत्य है

अर्थात् $2^k > k$ ... (i)

अब, हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k+1)$ सत्य है अर्थात् $2^{k+1} > k+1$.



(i) के दोनों पक्षों को 2 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है

$2^{k+1} > 2k$

$\Rightarrow 2^{k+1} > k + k \Rightarrow 2^{k+1} > k + 1$, (क्योंकि $k > 1$)

अतः $P(k + 1)$ सत्य है।

इसलिए गणितीय आगमन के सिद्धान्त से दिया हुआ कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सत्य है।

कभी–कभी हमें, ऐसे कथन जो किसी विशेष प्राकृत संख्या, मान लीजिए a, से बड़ी प्राकृत संख्याओं से सम्बद्ध होता है; को सिद्ध करने की आवश्यकता होती है (जैसा नीचे उदाहरण 8.8 में दिया गया है)। सिद्धान्त के कथन में हम $P(1)$ को $P(a + 1)$ द्वारा बदल देते हैं।

उदाहरण 10.7. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक $n \geq 3$ के लिए $n^2 > 2(n + 1)$ जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

हल : यहाँ हम $n^2 > 2\ (n + 1)$ कथन को $P\ (n)$ कहेंगे।

क्योंकि हमें दिया हुआ कथन $n \geq 3$ के लिए सिद्ध करना है, प्रथम सम्बन्धित कथन $P(3)$ है। अतः हम देखेंगे कि क्या $P(3)$ सत्य है।

$P(3) : 3^2 > 2 \times 4$ अर्थात् $9 > 8$.

अतः $P\ (3)$ सत्य है।

हम मान लेते हैं कि $P(k)$ सत्य है जहाँ $k \geq 3$ अर्थात्

$k^2 > 2(k + 1)$ .... (i)

हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि $P\ (k + 1)$ सत्य है।

$\mathrm{P}\ (k + 1) : (k + 1)^2 > 2(k + 2)$

$\mathrm{P}\ (k + 1)$ का बायाँ पक्ष $= (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$

$> 2\ (k + 1) + 2k + 1$ ... [(i) से]

$> 3 + 2k + 1$ क्योंकि $2\ (k + 1) > 3 = 2\ (k + 2)$,

इस प्रकार $(k + 1)^2 > 2(k + 2)$

अतः $P(k + 1)$ सत्य है।

इसलिए गणितीय आगमन के सिद्धान्त से दिया हुआ कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या $n \geq 3$ के लिए सत्य है।

उदाहरण 10.8. गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा, सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $\left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है।

हल : मान लीजिए कि $P(n) : \left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है।

$\therefore P(1) : \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{7}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है।

अब, $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}=\frac{3+5+7}{15}=\frac{15}{15}=1$, जो कि एक प्राकृत संख्या है।

$\therefore$ $P(1)$ सत्य है।

मान लीजिए $P(k): \left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है, सत्य है ... (i)

अब $\frac{(k+1)^5}{5}+\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{7(k+1)}{15}$

$$=\frac{1}{5}\left[k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1\right]+\frac{1}{3}\left[k^3+3k^2+3k+1\right]+\left(\frac{7}{15}k+\frac{7}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)+\left(k^4+2k^3+3k^2+2k\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)+\left(k^4+2k^3+3k^2+2k\right)+1 \qquad ...(ii)$$

[(1) द्वारा]

(i) से, $\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

साथ ही, $k^4+2k^3+3k^2+2k$ एक प्राकृत संख्या है तथा 1 भी प्राकृत संख्या है।

$\therefore$ (ii), प्राकृत संख्याओं का योग होने के कारण प्राकृत संख्या है।

$\therefore$ $P(k + 1)$ सत्य है यदि $P(k)$ सत्य है।

$\therefore$ $P(n)$ सभी प्राकृत संख्याओं के लिए सत्य है।

अतः $\left(\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}\right)$ सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए प्राकृत संख्या है।

देखें आपने कितना सीखा 10.2

1. गणितीय आगमन के सिद्धान्त के उपयोग से निम्नलिखित कथनों को प्रत्येक प्राकृत सख्या n के लिए सिद्ध कीजिए :

(a) $1^2+2^2+3^2+........+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

(b) $1^3+2^3+3^3+........+n^3=(1+2+.....+n)^2$

(c) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

(d) $1+4+7+........+(3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)$

2. गणितीय आगमन के सिद्धान्त के उपयोग से निम्नलिखित सर्वसमिकाओं को प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सिद्ध कीजिए :

(a) $$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

(b) $$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

(c) $$(1\times 2)+(2\times 3)+....+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

3. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सिद्ध कीजिए कि

(a) $n^3 + 5n,$ 6 से विभाज्य है। (b) $(x^n-1),$ $(x-1)$ से विभाज्य है।

(c) $(n^3 + 2n)$, 3 से विभाज्य है (d) 4, $(n^4 + 2n^3 + n^2)$ को पूर्णतया विभाजित करता है।

4. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए निम्नलिखित असमिकाओं को सिद्ध कीजिए :

(a) $3^n \geq 2n + 1$ (b) $4^{2n} > 15\,n$ (c) $1+2+....+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

5. गणितीय आगमन के सिद्धान्त का उपयोग करते हुए निम्नलिखित कथनों को सिद्ध कीजिए :

(a) $n \geq 5$ के लिए $2^n > n^2$ जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

(b) $n \geq 2$ के लिए $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

6. सिद्ध कीजिए कि $n(n^2-1)$ संख्या 3 से पूरा विभाजित होगा यदि n, 1 से बड़ी प्राकृत संख्या हो।

टिप्पणी: प्राकृत संख्याओं से सम्बद्ध किसी कथन $P(n)$ को सत्य सिद्ध करने के लिए दोनों आधार तथा आगमन पदों का सत्य होना आवश्यक है।

यदि इनमें से एक भी असत्य है, तो उपपत्ति अमान्य है। उदाहरणार्थ यदि $P(n)$: $(a+b)^n \leq a^n + b^n$ है, तब $P(1)$ निश्चित ही सत्य है। परन्तु $P(k)$ की सत्यता का अर्थ यह नहीं है कि $P(k + 1)$ भी सत्य है। अतः कथन प्रत्येक $n \in N$ के लिए सत्य नहीं है। [उदाहरणार्थ $(2+3)^2 \leq 2^2+3^2$).] आइए, दूसरे उदाहरण पर विचार करें

$P(n): n > \frac{n}{2}+20$ लीजिए।

इस स्थिति में आधार पद $P(1)$ सत्य नहीं है। परन्तु आगमन पद सत्य है। क्योंकि यदि हम $P(k)$ को सत्य मान लें, अर्थात्

$\Rightarrow k > \frac{k}{2}+20$ है, तो

$$P(k+1): \Rightarrow k+1>\frac{k}{2}+20+1>\frac{k}{2}+20+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}+20 \Rightarrow P(k+1) \text{ सत्य है।}$$

आइये दोहराएँ

- ऐसे वाक्य जो या तो सत्य होते हैं या असत्य होते हैं, उन्हें कथन या साध्य कहते हैं।
- आगमन शब्द का अर्थ विशिष्ट स्थितियों या तथ्यों से व्यापीकरण करना है।
- गणितीय आगमन के सिद्धान्त का कथनः

  सभी $n \geq 1$ के लिए, प्राकृत संख्या n से संबंद्ध एक कथन $P(n)$, जहाँ, n एक निश्चित प्राकृत संख्या है, सत्य होग यदि(i) $P(1)$ सत्य हैं। (ii) $K \in N$ के लिए यदि $p(k)$ सत्य है, तो $p(k+1)$ भी सत्य हैं।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/13pure/01proof/01proof/05induction/index.shtml*
- *www.mathguru.com/result/principle-of-mathematical-induction.aspx*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction*

आइए अभ्यास करें

गणितीय आगमन के सिद्धांत के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए।

1. n अवयवों वाले एक समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है, जहाँ $n \in N$!
2. $(a + b)^n > a^n + b^n \times n \geq 2$, जहाँ a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं और $n \in N$
3. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ जहाँ $n \in N$, $r > 1$ और a एक वास्तविक संख्या है। कृ
4. $(x^{2n} - 1), (x + 1)$ से विभाज्य है जहाँ $n \in N$
5. $(10^{2n-1} + 1), 11$ का एक गुणज है जहाँ $n \in N$
6. $(4.10^{2n} + a.10^{2n-1} + 5)$, 99 का एक गुणज है जहाँ $n \in N$
7. $(1 + x)^n > 1 + nx$ जहाँ $x > 0$ और $n \in N$
8. $1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \cdots + n.2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$, जहाँ $n \in N$
9. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, जहाँ $n \in N$
10. $\dfrac{1}{3.5} + \dfrac{2}{5.7} + \dfrac{1}{7.9} + \cdots + \dfrac{1}{(2n+1)\,(2n+3)} = \dfrac{n}{3(2n+3)}$, जहाँ $n \in N$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 10.1

1. (b), (e) एवं (f) कथन हैं। (a) कथन नहीं है, क्योंकि n का परास नहीं दिया है, अतः हम इसके सत्य या असत्य होने का निर्णय लेने की स्थिति में नहीं है। (c) व्यक्तिपरक है और इसीलिए गणितीय कथन नहीं है।(d) एक प्रश्न है न कि कथन।

   ध्यान दीजिए कि (f) व्यापक रूप में असत्य है।

2. P(1) : $1^3 + 5.1$ का 6 एक गुणनखण्ड है।

   P(2) : $2^3 + 5.2$ का 6 एक गुणनखण्ड है।

   P(k) : $k^3 + 5k$ का 6 एक गुणनखण्ड है।

   P(k+1) : $(k + 1)^3 + 5(k + 1)$ का 6 एक गुणनखण्ड है।

3. (a) $P(1) : 2 \geq 2$

   $P(k) : 2^k \geq k + 1$

   $P(k + 1) : 2^{k+1} \geq k + 2$

   (b) $P(1) : 1 + x \geq 1 + x$

   $P(k) : (1 + x)^k \geq 1 + kx$

   $P(k + 1): (1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$

   (c) $P(1)$: 6, 6 से विभाज्य है।

   $P(k) : k(k + 1)(k + 2)$, 6 से विभाज्य है।

   $P(k + 1): (k + 1)(k + 2)(k + 3)$, 6 से विभाज्य है।

   (d) $P(1): (x - y), (x - y)$ से विभाज्य है।

   $P(k): (x^k - y^k), (x - y)$ से विभाज्य है।

   $P(k + 1): (x^{k+1} - y^{k+1}), (x - y)$ से विभाज्य है।

   (e) $P(1): ab = ab$

   $P(k): (ab)^k = a^k b^k$

   P(k+1): $(ab)^{k+1} = a^{k+1}. b^{k+1}$

   (f) $P(1) : \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{7}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

   $P(k): \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{7k}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

   $P(k + 1): \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{7(k+1)}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

4. (a) $P(1)$: $\dfrac{1}{1\times 2}=\dfrac{1}{2}$

$P(2): \dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}=\dfrac{2}{3}$

$P(k): \dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+...+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$

$P(k+1): \dfrac{1}{1\times 2}+...+\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k+1}{k+2}$

(b) $P(1):\ 1=1^2$

$P(2):\ 1+3=2^2$

$P(k):\ 1+3+5+...+(2k-1)=k^2$

$P(k+1):\ 1+3+5+...+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$

(c) $P(1): 1\times 2<1(2)^2$

$P(2): (1\times 2)+(2\times 3)<2(3)^2$

$P(k): (1\times 2)+(2\times 3)+...+k(k+1)<k(k+1)^2.$

$P(k+1): (1\times 2)+(2\times 3)+...+(k+1)(k+2)<(k+1)(k+2)^2$

(d) $P(1): \dfrac{1}{1\times 3}=\dfrac{1}{3}$

$P(2): \dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}=\dfrac{2}{5}$

$P(k): \dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+...+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{k}{2k+1}$

$P(k+1): \dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+...+\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{k+1}{2k+3}$