311hi11

11

क्रमचय तथा संचय

एक दिन मेरी इच्छा रेलगाड़ी से बैंगलोर से इलाहाबाद जाने की हुई। बैंगलोर से इलाहाबाद तक कोई सीधी रेलगाड़ी नहीं है, परन्तु बैंगलोर से इटारसी तथा इटारसी से इलाहाबाद तक की रेलगाड़ियाँ हैं। मैंने रेलवे समय–सारिणी में पाया कि दो गाड़ियाँ बैंगलोर से इटारसी तथा तीन गाड़ियाँ इटारसी से इलाहाबाद तक हैं। अब, मैं बैंगलोर से इलाहाबाद तक कितनी विधियों से यात्रा कर सकता हूँ?

यह एक गणन समस्या है जो गणित की एक शाखा 'संचय विन्यास' के अन्तर्गत आती है।

मान लीजिए आपके पास पाँच मसालों के डिब्बे हैं जिन्हें आप अपनी रसोई के शैल्फ पर क्रम से लगाना चाहते हैं। आप चाहते हैं कि उन डिब्बों में से तीन, जिनका प्रयोग अधिक करते हैं, तक पहुँच आसान हो, बाकी दो तक पहुँच कम हो। इस स्थिती में डिब्बों का क्रम महत्वपूर्ण है। आप इसे कितनी विधियों से कर सकते हैं?

एक दूसरी स्थिति लें। माना आप अपने घर को रंग करवा रहे हैं। यदि एक विशेष रंग अथवा गहरा रंग उपलब्ध नहीं है, तो आप भिन्न–भिन्न रंगों को मिलाकर इस रंग को बना सकते हैं। जब इस प्रकार रंग बनाए जाते हैं, तो इसमें मिलाने के क्रम से कोई अन्तर नहीं पड़ता। यह रंगों का संचय या चयन है जो नया रंग निर्धारण करता है न कि मिलाने का क्रम।

इसी तरह का एक अन्य उदाहरण लें। जब आप किसी यात्रा पर जाते हैं, तो आप अपने सारे कपड़े तो साथ नहीं ले जा सकते। हो सकता है आपके पास चार कमीजों और पैंट के जोड़े हों, परन्तु आप केवल 2 जोड़े ले जाना चाहें। ऐसी स्थिति में आपको 4 जोड़ों में से 2 जोड़ों का चयन करना है और ऐसा करने में जोड़ों के चयन के क्रम से कोई अन्तर नहीं पड़ता। इन उदाहरणों में, हमें उन चयनों की संख्या ज्ञात करनी है जिनमें हम ऐसा कर सकते हैं।

इस पाठ में, हम कुछ सरल गणन विधियों की चर्चा करेंगे तथा इनका प्रयोग ऊपर जैसी सरल गणन समस्याओं को हल करने में करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे :

- ज्ञात करना कि दी गई वस्तुओं को कितनी विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं
- मूलभूत गणन सिद्धान्त का कथन देना

- n! को परिभाषित करना तथा n के भिन्न–भिन्न मानों के लिए इसका मान ज्ञात करना
- क्रमचय की व्याख्या विन्यास के रूप में करना तथा ${}^nP_r$ का अर्थ लिखना
- ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ का कथन देना तथा इसका प्रयोग प्रश्न हल करने में करना
- सिद्ध करना कि (i) $(n+1)\,{}^nP_n = {}^{n+1}P_n$ (ii) ${}^nP_{r+1} = (n-r)\,{}^nP_r$
- संचय की वस्तुओं के चुनने के रूप में व्याख्या करना तथा ${}^n\mathrm{C}_r$ का अर्थ लिखना
- क्रमचय तथा संचय में अन्तर बताना
- सूत्र ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ की व्युत्पत्ति करना तथा इस परिणाम का प्रश्नों को हल करने में प्रयोग करना
- सम्बन्ध ${}^nP_r = r!\,{}^nC_r$ की व्युत्पत्ति करना
- सूत्र ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ सत्यापित करना और इसकी व्याख्या करना
- सूत्र ${}^nC_r + {}^nC_{n-r} = {}^{n+1}C_r$ की व्युत्पत्ति करना तथा इसे प्रश्नों को हल करने में प्रयोग करना

पूर्व ज्ञान

- संख्या निकाय
- चार मूलभूत संक्रियाएँ

11.1 मूलभूत गणन सिद्धान्त

अब हम भूमिका में चर्चित प्रश्न को हल करते हैं। हम बैंगलोर से इटारसी तक की गाड़ियों को t_1, t_2 तथा इटारसी से इलाहाबाद तक की गाड़ियों को T_1, T_2, T_3 से प्रदर्शित करेंगे। मान लीजिए, मैं t_1 से बैंगलोर से इटारसी तक की यात्रा करता हूँ। तब इटारसी से मैं T_1, T_2 या T_3 से यात्रा कर सकता हूँ। अतः संभावनाएँ t_1T_1, t_1T_2 तथा t_1T_3 हैं जहाँ t_1T_1 बैंगलोर से इटारसी तक t_1 से यात्रा तथा इटारसी से इलाहाबाद तक T_1 से यात्रा प्रदर्शित करता है। इसी प्रकार, यदि मैं t_2 से बैंगलोर से इटारसी तक यात्रा करता हूँ, तब संभावनाएँ t_2T_1, t_2T_2 अथवा t_2T_3 बनती हैं। अतएव बैंगलोर से इलाहाबाद तक यात्रा करने की कुल विधियाँ 6 हैं।

यहाँ हमारे पास गाड़ियों की संख्या कम थी और इसीलिए हम सम्भव स्थितियाँ की सूची बना पाए। यदि बैंगलोर से इटारसी तक 10 गाड़ियाँ तथा इटारसी से इलाहाबाद तक 15 गाड़ियाँ होतीं, तब यह कार्य जटिल हो जाता। यहाँ मूलभूत गणन सिद्धान्त या केवल गणन सिद्धान्त प्रयोग में लाया जाता है :

यदि कोई घटना *m* विधियों से घटित हो सकती है तथा इसके किसी एक विधि से घटित होने के पश्चात् एक अन्य घटना *n* विधियों से घटित हो सकती है, तो दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने की कुल विधियाँ $m \times n$ होंगी।

उदाहरण 11.1. 10 से 95 तक 5 के कितने गुणज हैं?

हल : जैसा कि आप जानते हैं कि 5 के गुणज वे पूर्णांक होते हैं जिनका सबसे दायाँ (अर्थात् इकाई का अंक) 0 तथा 5 है।

दायें से प्रथम अंक 2 विधियों से चुना जा सकता है।

द्वितीय अंक 1,2,3,4,5,6,7,8,9 में से कोई एक हो सकता है।

अर्थात् द्वितीय अंक के 9 विकल्प हैं।

$\therefore$ 10 से 95 तक, 5 के गुणजों की संख्या $2 \times 9 = 18$ ।

उदाहरण 11.2. एक नगर में बस मार्ग संख्या के लिए, 100 से छोटी प्राकृत संख्या के साथ A, B, C, D, E तथा F में से कोई अक्षर लिखा जाता है। ऐसे कितने विभिन्न बस मार्ग संभव हैं?

टिप्पणी

हल : 1 से 99 तक की प्राकृत संख्याओं में से कोई एक संख्या हो सकती है।

संख्या चुनने के 99 विकल्प हैं।

अक्षर 6 विधियों से चुने जा सकते हैं।

$\therefore$ कुल संभव बस मार्गों की संख्या $99 \times 6 = 594$ ।

देखें आपने कितना सीखा 11.1

1. (a) 3 अंकों वाली कितनी संख्याएँ 5 की गुणज हैं?

   (b) एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है। कुल संभव परिणाम कितने हैं?

   (c) यदि आपके पास 3 कमीजें और 4 पैंट हैं और कोई भी कमीज किसी भी पैंट के साथ पहनी जा सकती है। कितनी विधियों से आप कमीज–पैंट पहन सकते हैं?

2. (a) 4 पुरुष तथा 12 महिलाओं से दो रिक्त पद कितनी विधियों से भरे जा सकते हैं, जबकि एक पद पुरुष तथा दूसरा पद महिला द्वारा भरा जाना है?

   (b) एक पर्यटक, जलमार्ग से एक अन्य देश में जाकर वायुमार्ग से वापिस लौटना चाहती है। यदि जाने के लिए 5 भिन्न जलयान तथा वापिस आने के लिए 4 भिन्न वायुयान कंपनियों के विकल्प हैं, तो वह कितनी विधियों से अपनी यात्रा सम्पन्न कर सकती है।

   अब तक हमने गणन सिद्धान्त का प्रयोग दो घटनाओं के लिए किया है। किन्तु इसे 3 या अधिक घटनाओं के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है, जैसा कि आप निम्न उदाहरणों में देख सकते हैं:

उदाहरण 11.3. एक प्रश्न पत्र में 3 प्रश्न हैं। यदि इन प्रश्नों के क्रमशः 4,3 तथा 2 हल हों, तो हलों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

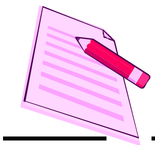
हल : यहाँ पर पहले प्रश्न 1 के 4 हल हैं।

दूसरे प्रश्न के 3 हल हैं तथा तीसरे प्रश्न के 2 हल हैं।

$\therefore$ गणन सिद्धान्त द्वारा,

हलों की कुल संख्या = $4 \times 3 \times 2 = 24$

उदाहरण 11.4. शब्द ROTOR. पर विचार कीजिए। इसे आप चाहें बायें से पढ़ें या दायें से पढ़ें, वही शब्द मिलेगा। ऐसे शब्द को पैलिनड्रोम (*palindrome*) कहा जाता है। 5 अक्षरों के पैलिनड्रोमों की सम्भावित अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए।



टिप्पणी

हल : क्योंकि अंग्रेजी वर्णमाला में 26 अक्षर हैं, इसलिए

दायें से प्रथम अक्षर का चयन 26 विधियों से कर सकते हैं।

इस चयन के पश्चात् द्वितीय अक्षर का भी चयन 26 विधियों से किया जा सकता है।

$\therefore$ पहले दो अक्षरों का चयन $26 \times 26 = 676$ विधियों से किया जा सकता है।

प्रथम दो अक्षरों के चयन के बाद तीसरे अक्षर का भी चयन 26 विधियों से किया जा सकता है।

$\therefore$ तीनों अक्षरों के चयन की कुल विधियाँ $676 \times 26 = 17576$

चौथा अक्षर वही है जो दूसरा अक्षर है तथा पाँचवाँ अक्षर वही है जो पहला अक्षर है।

$\therefore$ पाँच अक्षरों वाले पैलिनड्रोमों की अधिकतम सम्भावित संख्या = 17576

टिप्पणी : उदाहरण 11.4 में हमने 5–अक्षर को पैलिनड्रोमों की अधिकतम सम्भावित संख्या ज्ञात की है। यह संख्या 17576 से अधिक नहीं हो सकती। परन्तु इसका अर्थ यह नहीं है कि 17576 पैलिनड्रोम हैं, क्योंकि कुछ चयन *CCCCC* की तरह हैं जो अंग्रेजी भाषा में निर्रथक शब्द माने जाते हैं।

उदाहरण 11.5. अंकों 1,4,7,8 तथा 9 से 3 अंकों वाली कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों को दोहराया न जाए?

हल : तीन अंकों की संख्या में इकाई, दहाई तथा सैंकड़े के स्थान होते हैं।

दिए गए 5 अंकों में से इकाई का स्थान कोई भी अंक ले सकता है।

ऐसा 5 विधियों से किया जा सकता है। ... (*i*)

इकाई का स्थान भरने के बाद, चार अंक बचते हैं तथा इनमें से कोई एक अंक दहाई का स्थान ले सकता है।

यह 4 विधियों से किया जा सकता है। ... (*ii*)

दहाई का स्थान भरने के बाद, सैकड़े के स्थान पर बचे हुए 3 अंकों में से कोई भी अंक लिया जा सकता है। ऐसा 3 विधियों से किया जा सकता है। ... (*iii*)

$\therefore$ गणन सिद्धान्त से, 3 अंकों वाली संख्याओं की संख्या = $5 \times 4 \times 3 = 60$

आइए अब हम **गणन के व्यापक सिद्धान्त** का कथन दें :

यदि *n* घटनाएँ हैं तथा प्रथम घटना m_1 विधियों से घटित हो सकती है, पहली घटना के घटित होने के पश्चात् दूसरी घटना m_2 विधियों से घटित हो सकती है, दूसरी घटना घटित होने के पश्चात् तीसरी घटना m_3 विधियों से घटित हो सकती है इत्यादि, तो सभी *n* घटनाओं के घटित होने की कुल विधियाँ $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_{n-1} \times m_n$ हैं।

उदाहरण 11.6. मान लीजिए कि आप स्थान *A* से स्थान *B* तक 3 बसों से, स्थान *B* से स्थान *C* तक 4 बसों से, स्थान *C* से स्थान *D* तक 2 बसों से तथा स्थान *D* से स्थान *E* तक 3 बसों से यात्रा कर सकते हैं। कितनी विधियों से आप *A* से *E* तक यात्रा कर सकते हैं?

हल : *A* से *B* तक की बस का चयन 3 प्रकार से किया जा सकता है।

B से *C* तक की बस का चयन 4 प्रकार से किया जा सकता है।

C से D तक की बस का चयन 2 प्रकार से किया जा सकता है।

D से E तक की बस का चयन 3 प्रकार से किया जा सकता है।

A से E तक यात्रा करने की कुल विधियाँ $= 3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$

देखें आपने कितना सीखा 11.2

1. (a) 6– अक्षर पैलिनड्रोमों की अधिकतम संख्या क्या है?

   (b) 6 अंकों वाली पैलिनड्रोमिक संख्याओं की संख्या क्या है, जिनके प्रथम अंक शून्य नहीं है?

2. (a) एक विद्यालय में 5 अंग्रेजी के अध्यापक, 7 हिन्दी के अध्यापक तथा 3 फ्रेंच भाषा के अध्यापक हैं। एक तीन सदस्यीय समिति का गठन करना है, जिसमें एक अध्यापक प्रत्येक भाषा का होना चाहिए। कितनी विधियों से यह किया जा सकता है?

   (b) एक महाविद्यालय विद्यार्थी संघ के चुनाव में, 4 विद्यार्थी अध्यक्ष, 5 विद्यार्थी उपाध्यक्ष तथा 3 छात्र सचिव पद के प्रत्याशी हैं। सम्भव परिणामों की संख्या ज्ञात कीजिए।

3. (a) अंकों 1,2,5,6,8 से 3 अंकों वाली 600 से बड़ी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक 1 से अधिक बार न आए?

   (b) एक व्यक्ति 4 पीरियडों की समय–सारणी बनाना चाहता है। उसे प्रत्येक विषय अंग्रेजी, गणित, अर्थशास्त्र तथा कॉमर्स को एक पीरियड देना है। वह कितनी भिन्न–भिन्न समय–सारणियाँ बना सकता है?

11.2 क्रमचय

मान लीजिए कि आप अपनी पुस्तकों को शैल्फ पर क्रम से लगाना चाहते हैं। यदि आपके पास केवल एक ही पुस्तक है, तो उसको व्यवस्थित करने की एक ही विधि है। यदि आपके पास दो पुस्तकें हैं–एक इतिहास तथा एक भूगोल की, तो आप भूगोल की पुस्तक पहले, फिर इतिहास की GH अथवा इतिहास की पुस्तक पहले, फिर भूगोल की HG रख सकते हैं। दूसरे शब्दों में, दो पुस्तकें दो क्रमों से व्यवस्थित की जा सकती हैं।

अब मान लीजिए कि आप एक गणित की भी पुस्तक और सम्मिलित करना चाहते हैं। इतिहास तथा भूगोल की पुस्तकें दो में से किसी एक विधि जैसे GH के क्रम में व्यवस्थित करने के पश्चात्, आप गणित की पुस्तक निम्न विधियों में से किसी भी एक विधि से रख सकते हैं :

MGH, GMH अथवा GHM। इसी प्रकार, HG के संगत आपके पास पुस्तकों के क्रम की 3 विधियाँ और हैं। अतः गणन के सिद्धान्त से आप गणित, भूगोल और इतिहास की पुस्तकों को $3 \times 2 = 6$ क्रमों में व्यवस्थित कर सकते हैं।

क्रमचय से हमारा तात्पर्य वस्तुओं के एक निश्चित क्रम में किए गए विन्यास से होता है। उपरोक्त उदाहरण में, हम एक पुस्तक, दो पुस्तकों अथवा तीन पुस्तकों की चर्चा कर रहे थे। व्यापक रूप में, यदि आप n वस्तुओं के क्रमचय की संख्या ज्ञात करना चाहते हैं, जहाँ $n \geq 1$, तो इसे आप कैसे कर सकते हैं? हमें देखना है कि क्या इसका उत्तर सम्भव है?

पुस्तकों के सम्बन्ध में जो हमने देखा उसी प्रकार एक वस्तु का क्रमचय 1, दो वस्तुओं के क्रमचय 2×1 तथा तीन वस्तुओं के क्रमचय $3 \times 2 \times 1$ हैं। यह हो सकता है कि n वस्तुओं के क्रमचय

$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$ हैं। वास्तव में, यह ऐसे ही है, जैसा कि आप तब देखेंगे जब हम निम्न परिणाम सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 11.1 n वस्तुओं के कुल क्रमचयों की संख्या $n\,(n-1)\,....2.1$ होती है।

उपपत्ति : पहला स्थान हम n भिन्न विधियों से भर सकते हैं। इसके भरने के पश्चात्, दूसरा स्थान हम शेष $(n-1)$ वस्तुओं से भर सकते हैं तथा यह हम $(n-1)$ विधियों से कर सकते हैं। इसी प्रकार, पहले दो स्थान भरने के बाद तीसरा स्थान $(n-2)$ विधियों से भरा जा सकता है तथा इस प्रकार हम करते जाएँगे। अन्त में अन्तिम स्थान हम शेष बची एक वस्तु से एक विधि से भरेंगे।

गणन सिद्धान्त का प्रयोग करते हुए, क्रमचयों की कुल संख्या हैं:

$$n(n-1)(n-2)\,........\,2.1. \qquad .....(11.1)$$

गुणनफल $n\,(n-1)\,...\,2.1$ गणित में प्रायः आता रहता है। अतः इसे एक नाम तथा संकेत देने की आवश्यकता है। सामान्यतः इसे हम $\boldsymbol{n!}$ (अथवा $\underline{|n}$) से व्यक्त करते हैं तथा $\boldsymbol{n}$ 'फैक्टोरियल' पढ़ते हैं।

अतः, $\boldsymbol{n! = n\,(n-1)\,...\,3.2.1}$

इस संकेत से आपको परिचित कराने के लिए, हम एक उदाहरण लेते हैं:

उदाहरण 11.7. मान ज्ञात कीजिए : (a) $3!$ (b) $2! + 4!$ (c) $2!\times3!$

हल : (a) $3! = 3\times2\times1 = 6$

(b) $2! = 2\times1 = 2$

$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

$\therefore$ $2! + 4! = 2+24 = 26$

(c) $2!\times 3! = 2\times6 = 12$

ध्यान दीजिए कि $n!$ निम्न सम्बन्ध को सन्तुष्ट करता है :

$$n! = n\times(n-1)\,! \qquad ...\,(11.2)$$

यह इसलिए है, क्योंकि $n\,(n-1)! = n\,[(n-1)\,.\,(n-2)...\,2.1] = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...2.1 = n!$

निस्सन्देह, उपरोक्त सम्बन्ध केवल $n\geq2$ के लिए ही वैध है क्योंकि अभी तक $0!$ परिभाषित नहीं किया है। आइए देखें कि क्या $0!$ को उपरोक्त सम्बन्ध से मेल खाते हुए परिभाषित कर सकते हैं। वास्तव में, यदि हम $0! = 1$ परिभाषित कर दें, तो $n = 1$ के लिए भी सम्बन्ध **... (11.2)** वैध हो जाएगा।

उदाहरण 11.8. मान लीजिए कि आप अपनी अंग्रेजी, हिन्दी, गणित, इतिहास, भूगोल तथा विज्ञान की पुस्तकों को शैल्फ पर व्यवस्थित करना चाहते हैं। इसे आप कितनी विधियों से कर सकते हैं?

हल : हमें 6 पुस्तकों को व्यवस्थित करना है।

n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या है : $n! = n.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...\,2.1$

$\therefore$ 6 वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $= 6.5.4.3.2.1 = 720$

देखें आपने कितना सीखा 11.3

1. (a) मान ज्ञात कीजिए : (i) $6!$ (ii) $7!$ (iii) $7! + 3!$ (iv) $6! \times 4!$ (v) $\dfrac{5!}{3!.2!}$

   (b) निम्न में से कौन–कौन से कथन सत्य हैं?

   (i) $2! \times 3! = 6!$ (ii) $2! + 4! = 6!$

   (iii) $3!$, $4!$ को पूरा विभाजित करता है।

   (iv) $4! - 2! = 2!$

2. (a) 5 विद्यार्थी एक शयनागार में ठहरे हैं। कितनी विधियों से आप उनको 5 बिस्तर आवंटित कर सकते हैं?

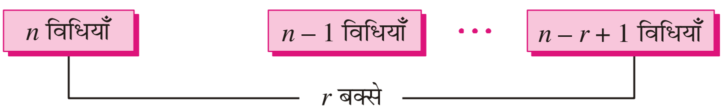
   (b) कितनी विधियों से शब्द 'TRIANGLE' के अक्षर व्यवस्थित किए जा सकते हैं?

   (c) अंकों 1, 2, 3, 4 से चार अंकों की कितनी भिन्न संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जबकि प्रत्येक संख्या के सभी अंक भिन्न हों?

11.3 n वस्तुओं में से r वस्तुओं का क्रमचय

मान लीजिए कि आपके पास 5 कहानियों की पुस्तकें हैं। आप इन्हें आशा, अख्तर और जसविन्दर में बाँटना चाहते हैं। आप इसे कितनी विधियों से कर सकते हैं? आप पाँच पुस्तकों में से कोई भी पुस्तक आशा को दे सकते हैं। उसके पश्चात्, शेष चार पुस्तकों में से कोई भी पुस्तक अख्तर को दे सकते हैं। उसके बाद शेष तीन पुस्तकों में से कोई भी पुस्तक जसविन्दर को दे सकते हैं। अतः, गणन सिद्धान्त से, आप पुस्तकों को $5 \times 4 \times 3 = 60$ विधियों से बाँट सकते हैं।

अधिक व्यापक रूप में मान लीजिए आपको n वस्तुओं में से r वस्तुएँ व्यवस्थित करनी हैं। इसे आप कितनी विधियों से कर सकते हैं? आइए इसे एक भिन्न तरीके से देखें। मान लीजिए कि आपके पास n वस्तुएँ हैं और इनमें से r वस्तुओं को r बक्सों में व्यवस्थित करना है, ताकि एक बक्से में एक वस्तु रहे।



चित्र 11.1

मान लीजिए कि एक बक्सा है। तब, $r = 1$ है। आप n वस्तुओं में से कोई वस्तु इसमें रख सकते हैं। यह n विधियों से किया जा सकता है। यदि दो बक्से हैं, अर्थात् $r = 2$ है, तो आप n वस्तुओं में से कोई एक पहले बक्से में रखकर उसके पश्चात् $(n - 1)$ वस्तुओं में से किसी को दूसरे बक्से में रख सकते हैं। गणन सिद्धान्त से, दोनों बक्से $n\,(n - 1)$ विधियों से भरे जा सकते हैं। इसी प्रकार, तीन बक्से $n\,(n - 1)\,(n - 2)$ विधियों से भरे जा सकते हैं। व्यापक रूप में, हमारे पास निम्न प्रमेय है :

प्रमेय 11.2 n वस्तुओं में से r वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $n\,(n-1)\cdots(n - r + 1)$ होती है।

n वस्तुओं से r वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या को सामान्यतः ${}^nP_r$ से व्यक्त किया जाता है।

इस प्रकार, ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ ... (11.3)

उपपत्ति : मान लीजिए कि हमें, n भिन्न–भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को व्यवस्थित करना है। वास्तव में, ऐसा करना, n वस्तुओं में से एक–एक लेकर r स्थानों के भरने के समान है।

पहला स्थान n भिन्न–भिन्न विधियों से भरा जा सकता है। ऐसा करने के बाद, दूसरे स्थान पर शेष $(n-1)$ वस्तुओं में से कोई एक वस्तु भरी जा सकती है और यह $(n-1)$ विधियों से हो सकता है। इसी प्रकार, तीसरा स्थान $(n-2)$ विधियों से भरा जा सकता है और इस तरह हम करते रहेंगे जब तक कि अन्तिम स्थान न आ जाए। अब तक हम $r-1$ स्थान भर चुके हैं। अतः हमारे पास $[n-(r-1)]$, अर्थात् $(n-r+1)$ वस्तुएँ हैं और इनमें से किसी से भी rवाँ स्थान भरा जा सकता है। यह $(n-r+1)$ विधियों से किया जा सकता है।

गणन सिद्धान्त द्वारा, n वस्तुओं में से r वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $n(n-1)(n-2)............(n-r+1)$ है।

उदाहरण 11.9. मान ज्ञात कीजिए : (a) ${}^4P_2$ (b) ${}^6P_3$ (c) $\dfrac{{}^4P_3}{{}^3P_2}$ (d) ${}^6P_3 \times {}^5P_2$

हल : (a) ${}^4P_2 = 4(4-1) = 4\times3 = 12.$

(b) ${}^6P_3 = 6(6-1)\ (6-2) = 6\times5\times4 = 120.$

(c) $$\frac{{}^4P_3}{{}^3P_2} = \frac{4(4-1)(4-2)}{3(3-1)} = \frac{4\times3\times2}{3\times2} = 4$$

(d) ${}^6P_3\times{}^5P_2 = 6\ (6-1)\ (6-2)\times5\ (5-1) = 6\times5\times4\times5\times4 = 2400$

उदाहरण 11.10. यदि आपके पास 6 नववर्ष बधाई पत्र हैं और आप अपने 4 मित्रों को नववर्ष बधाई पत्र भेजना चाहते हैं, तो ऐसा कितनी विधियों से किया जा सकता है?

हल : हमें 6 वस्तुओं में से 4 वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनी है।

यह संख्या ${}^6P_4 = 6(6-1)(6-2)(6-3) = 6.5.4.3 = 360$

अतः, बधाई पत्र 360 विधियों से भेजे जा सकते हैं।

${}^nP_r$, के सूत्र, अर्थात्

${}^nP_r = n\ (n-1)\ ...\ (n-r+1)$ पर विचार कीजिए।

यह $n!$ के गुणनफल में से पदों $n-r,\ n-r-1, ..., 2,\ 1$ को हटाने से प्राप्त किया जा सकता है।

इन पदों का गुणनफल $= (n-r)\ (n-r-1)\ ...2.1 = (n-r)!$

अब $$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)(n-r)...2.1}{(n-r)\ (n-r-1)...2.1} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = {}^nP_r$$

अतः, फैक्टोरियल संकेत का प्रयोग करते हुए, हम इसे लिख सकते हैं : $${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ...\ (11.4)$$

उदाहरण 11.11. ${}^nP_0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $r = 0$ है।

सम्बन्ध 11.4 द्वारा $${}^nP_0 = \frac{n!}{n!} = 1$$

उदाहरण 11.12. दर्शाइए कि $(n+1)\,{}^{n}P_{r} = {}^{n+1}P_{r+1}$ होता है।

हल : $(n+1)\,{}^{n}P_{r} = (n+1)\dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{(n+1)\,n!}{(n-r)!}$

$$= \frac{(n+1)!}{[(n+1)-(r+1)]!} \quad [\, n-r \text{ को } [(n+1)-(r+1) \text{ के रूप में लिखने पर}]$$

$$= {}^{n+1}P_{r+1} \qquad \text{(परिभाषा से)}$$

देखें आपने कितना सीखा 11.4

1. (a) मान ज्ञात कीजिए : (i) ${}^{4}P_{2}$ (ii) ${}^{6}P_{3}$ (iii) $\dfrac{{}^{4}P_{3}}{{}^{3}P_{2}}$ (iv) ${}^{6}P_{3}\times{}^{5}P_{2}$ (v) ${}^{n}P_{n}$

   (b) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य?

   (i) $6\times{}^{5}P_{2} = {}^{6}P_{2}$ (ii) $4\times{}^{7}P_{3} = {}^{7}P_{4}$

   (iii) ${}^{3}P_{2}\times{}^{4}P_{2} = {}^{12}P_{4}$ (iv) ${}^{3}P_{2}+{}^{4}P_{2} = {}^{7}P_{4}$

2. (a) (i) अंग्रेजी में 3 अक्षरों से बने शब्दों की अधिकतम संख्या क्या है, जिनमें कोई स्वर नहीं है।

   (ii) अंग्रेजी में 3 अक्षरों से बने शब्दों की अधिकतम संख्या क्या है जिनमें केवल 'a' के अतिरिक्त कोई और स्वर नहीं है?

   (b) मान लीजिए कि आपके घर में 2 पलंग और 5 चादरें हैं। आप कितनी तरह से पलंगों पर चादरें बिछा सकते हैं?

   (c) आप दीवाली के 7 कार्डों में से 4 मित्रों को दीवाली पर बधाई भेजना चाहते हैं। आप ऐसा कितनी विधियों से कर सकते हैं?

3. दर्शाइये कि ${}^{n}P_{n-1} = {}^{n}P_{n}$ है।

4. दर्शाइये कि $(n-r)\,{}^{n}P_{r} = {}^{n}P_{r+1}$ है।

11.4 कुछ प्रतिबन्धों के अन्तर्गत क्रमचय

अब हम क्रमचयों से सम्बन्धित कुछ उदाहरण देखेंगे जिनमें कुछ अतिरिक्त प्रतिबन्ध लगे हैं।

उदाहरण 11.13. मान लीजिए कि 7 विद्यार्थी एक शयनागार में ठहरे हैं और उन्हें 7 पलंग आबंटित किए गए हैं। उनमें से प्रवीण, अंजू के निकट के पलंग को नहीं चाहता, क्योंकि अंजू खर्राटे भरती है। आप कितनी विधियों से पलंग आबंटित कर सकते हैं?

हल : मान लीजिए कि पलंगों कि संख्या 1 से 7 तक है।

स्थिति 1 : यदि अंजू को पलंग संख्या 1 दिया गया है, तो प्रवीण को पलंग संख्या 2 नहीं दिया जा सकता। इसलिए प्रवीण को पलंग 5 विधियों से आबंटित किया जा सकता है। प्रवीण के आबंटन के

पश्चात्, शेष 5 पलंगों में से शेष विद्यार्थियों को 5! विधियों से पलंग आबंटित किए जा सकते हैं।

अतः, इस स्थिति में पलंगों के आबंटन की विधियों की संख्या $5 \times 5! = 600$

स्थिति 2 : अंजू को पलंग संख्या 7 दिया गया है। तब प्रवीण को पलंग संख्या 6 नहीं दिया जा सकता है। जैसा कि स्थिति 1 में है, आबंटनों की संख्या = 600

स्थिति 3 : अंजू को पलंग संख्या 2,3,4,5 अथवा 6 में से कोई पलंग दिया गया है। तब प्रवीण को उसके बाएँ और दाएँ का पलंग नहीं दिया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि अंजू को पलंग संख्या 2 दिया गया हो, तो प्रवीण को पलंग संख्या 1 तथा 3 नहीं दिए जा सकते हैं।

अतः, प्रत्येक अवस्था में प्रवीण को 4 विधियों से पलंग दिया जा सकता है।

अतः, इस स्थिति में आबंटनों की संख्या = $4 \times 5! = 480$

अतः, कुल आबंटनों की संख्या = $(2 \times 600 + 5 \times 480) = (1200 + 2400) = 3600$

उदाहरण 11.14. एक पशु प्रशिक्षक 5 शेर और 4 चीते एक पंक्ति में कितनी विधियों से खड़ा कर सकता है ताकि दो शेर एक साथ न रहें?

हल : उन्हें निम्न विधि से व्यवस्थित करना है :

L	T	L	T	L	T	L	T	L

5 शेर 5 स्थानों, जिन्हें L से दिखाया गया है, में व्यवस्थित करने हैं। यह 5! विधियों से किया जा सकता है।

4 चीते 4 स्थानों, जिन्हें T से दिखाया गया है, में व्यवस्थित करने हैं। यह 4! विधियों से किया जा सकता है।

इसलिए शेर और चीते $5! \times 4!$ विधियों $= 2880$ विधियों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

उदाहरण 11.15. परियों की कहानियों पर 4 पुस्तकों, 5 उपन्यास और 3 नाटक की पुस्तकों को कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है कि परियों की कहानी की पुस्तकें एक साथ, उपन्यास एक साथ तथा नाटक एक साथ रहें और क्रम परियों की कहानी, उपन्यास तथा नाटक हो।

हल : परियों की कहानी की 4 पुस्तकें हैं और उन्हें एक साथ रखना है। यह 4! विधियाँ से किया जा सकता है।

इसी प्रकार, 5 उपन्यास हैं। इन्हें 5! विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

साथ ही, 3 नाटक हैं। इन्हें 3! विधियों से रखा जा सकता है।

अतः, गणन के सिद्धान्त से, सबको साथ रखने की कुल विधियों की संख्या = $4! \times 5! \times 3! = 17280$

उदाहरण 11.16. मान लीजिए कि परियों की कहानी की 4 पुस्तकें, 5 उपन्यास तथा 3 नाटक हैं, जैसा उदाहरण 11.15 में है। उन्हें इस प्रकार व्यवस्थित करना है कि परियों की कहानी की पुस्तकें एक साथ रहें, उपन्यास एक साथ रहें तथा नाटक एक साथ रहें, परन्तु अब हम यह नहीं चाहते कि उनका कोई विशिष्ट क्रम हो। कितनी विधियों से यह किया जा सकता है?

हल : आइए पहले हम परियों की कहानी की पुस्तकों, उपन्यासों तथा नाटकों को एक–एक वस्तु मान लें।

इन तीन वस्तुओं के विन्यास $= 3! = 6$

अब हम इनमें से एक विशिष्ट क्रम माना उपन्यास→परियों की कहानी→नाटक, लेते हैं।

इस क्रम में, एक विषय की पुस्तकें निम्न प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं : उपन्यास की 5 पुस्तकें $5! = 120$ विधियों से व्यवस्थित की जा सकती हैं।

परियों की कहानी की 4 पुस्तकों को हम $4! = 24$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं तथा

3 नाटक $3! = 6$ विधियों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

इस विशिष्ट क्रम में कुल क्रमचयों की संख्या = $120 \times 24 \times 6 = 17280$

$\therefore$ 6 सम्भावित क्रमों के लिए कुल क्रमचयों की संख्या = $6 \times 17280 = 103680$

उदाहरण 11.17. कितनी विधियों से 4 लड़कियों तथा 5 लड़कों को एक पंक्ति में खड़ा किया जा सकता है ताकि चारों लड़कियाँ इकट्ठी रहें?

हल : मान लीजिए कि 4 लड़कियों का एक समूह है इस समूह के साथ 5 लड़के मिलकर 6 इकाई बन जाते हैं। इन्हें $6!$ विधियों से खड़ा किया जा सकता है।

परन्तु 4 लड़कियों को आपस में $4!$ विधियों से खड़ा किया जा सकता है।

$\therefore$ कुल क्रमचयों की वाँछित संख्या = $6! \times 4! = 720 \times 24 = 17280$

उदाहरण 11.18. 'BENGALI' शब्द के अक्षरों को कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि स्वर हमेशा इकट्ठे हों?

हल : शब्द 'BENGALI' में 7 अक्षर हैं, जिनमें से 3 स्वर तथा 4 व्यंजन हैं।

स्वर a, e, i को एक अक्षर मानकर हम 4+1 अक्षरों को $5!$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। जिनमें स्वर सदा इकट्ठे रहेंगे। इन 3 स्वरों को आपस में $3!$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। अतः कुल शब्दों की संख्या = $5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$

देखें आपने कितना सीखा 11.5

1. श्री गुप्ता, श्रीमती गुप्ता अपने चार बच्चों के साथ यात्रा कर रहे हैं। उन्हें दो नीचे की शायिकाएँ, दो बीच की शायिकाएँ तथा दो ऊपर की शायिकाएँ आबंटित की गई हैं। श्री गुप्ता के घुटने का ऑपरेशन हुआ है। इसलिए उन्हें नीचे की शायिका चाहिए। श्रीमती गुप्ता यात्रा के दौरान आराम करना चाहती हैं। इसलिए उन्हें ऊपर की शायिका चाहिए। कितनी विधियों से परिवार द्वारा शायिकाएँ आपस में बाँटी जा सकती हैं?
2. शब्द UNBIASED पर विचार कीजिए। इस शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं, जिनमें कोई दो स्वर एक साथ न रहें?
3. 4 गणित की पुस्तकें, 5 अंग्रेजी की पुस्तकें और 6 विज्ञान की पुस्तकें हैं। इन्हें कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि एक विषय की पुस्तक साथ रहें और उनका क्रम गणित → अंग्रेजी → विज्ञान हो?

4. 3 भौतिकी, 4 रसायन, 5 वनस्पति विज्ञान तथा 3 जंतु विज्ञान की पुस्तकें हैं। इन्हें आप कितनी विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं, ताकि एक विषय की पुस्तकें सदैव एक साथ रहें?
5. 4 लड़कों और 3 लड़कियों को 7 कुर्सियों पर इस प्रकार बैठाना है कि दो लड़के इकट्ठे न बैठें। ऐसा कितनी विधियों से किया जा सकता है?
6. निम्न अवस्थाओं में शब्द 'TENDULKAR' के अक्षरों से कितने क्रमचय बन सकते हैं?

   (i) T से आरम्भ तथा R पर समाप्त (ii) स्वर सदा इकट्ठे रहें (iii) स्वर कभी इकट्ठे न हों

11.5 संचय

आइए भूमिका में वर्णित उदाहरण पर फिर विचार करें। मान लीजिए कि आपके पास कमीज और पैन्ट के 4 सेट (जोड़े) हैं। जब आप यात्रा पर जा रहे हैं, तो दो सेट साथ ले जाना चाहते हैं। यह कार्य कितनी विधियों से किया जा सकता है?

मान लीजिए कि हम सेटों को S_1, S_2, S_3, S_4 से व्यक्त करते हैं। तब दो जोड़ों का चयन निम्न विधियों से किया जा सकता है :

1. $\{S_1, S_2\}$	2. $\{S_1, S_3\}$	3. $\{S_1, S_4\}$
4. $\{S_2, S_3\}$	5. $\{S_2, S_4\}$	6. $\{S_3, S_4\}$

ध्यान से देखें $\{S_1, S_2\}$ वही है, जो $\{S_2, S_1\}$ है। अतः, दो जोड़े जो आप अपने साथ ले जाना चाहते हैं उनके चयन की 6 विधियाँ हैं। निस्सन्देह, यदि आपके पास 10 जोड़े होते और 7 जोड़े ले जाना चाहते, तो जोड़ों की संख्या ऊपर दी गई विधि से ज्ञात करना बहुत कठिन होता।

अब जैसे आप 4 जोड़ों में से 2 जोड़े दो दिन जैसे सोमवार और मंगलवार को पहनने की विधियों की संख्या जानना चाहेंगे, जहाँ पहनने का क्रम भी आपके लिए महत्त्वपूर्ण है। हम पहले ही पढ़ चुके हैं कि यह ${}^4P_2 = 12$ विधियों से किया जा सकता है। परन्तु ध्यान दें 4 सेट में से दो सेट का प्रत्येक चयन आपको पहनने की दो विधियाँ प्रदान करता है, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

1. $\{S_1, S_2\} \to$ सोमवार को S_1 तथा मंगलवार को S_2 या सोमवार को S_2 तथा मंगलवार को S_1
2. $\{S_1, S_3\} \to$ सोमवार को S_1 तथा मंगलवार को S_3 या सोमवार को S_3 तथा मंगलवार को S_1
3. $\{S_1, S_4\} \to$ सोमवार को S_1 तथा मंगलवार को S_4 या सोमवार को S_4 तथा मंगलवार को S_1
4. $\{S_2, S_3\} \to$ सोमवार को S_2 तथा मंगलवार को S_3 या सोमवार को S_3 तथा मंगलवार को S_2
5. $\{S_2, S_4\} \to$ सोमवार को S_2 तथा मंगलवार को S_4 या सोमवार को S_4 तथा मंगलवार को S_2
6. $\{S_3, S_4\} \to$ सोमवार को S_3 तथा मंगलवार को S_4 या सोमवार को S_4 तथा मंगलवार को S_3

इस प्रकार, 4 जोड़ों में से 2 के पहनने की विधियाँ 12 हैं।

निम्नलिखित प्रमेय से हम देखते हैं कि यह तर्क व्यापक रूप से भी लागू होता है :

प्रमेय 11.3 मान लीजिए कि $n \geq 1$ एक पूर्णांक है और $r \leq n$ है। पुनः मान लीजिए कि n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चुनने की संख्या ${}^nC_r$ से व्यक्त की जाती है। तब,

$$ {}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} \qquad \text{... (11.5)} $$

उपपत्ति : n वस्तुओं में से r वस्तुओं को ${}^nC_r$ विधियों से चुन सकते हैं। प्रत्येक चुनी r वस्तुएँ, $r!$ विधियों से व्यवस्थित की जा सकती हैं। अतः, गणन सिद्धान्त से, r वस्तुओं को चुनना तथा चुनी हुई r वस्तुओं को ${}^nC_r.r!$ विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है। स्पष्टतः यह ${}^nP_r$ है।

$$ {}^nP_r = r!.{}^nC_r \qquad \text{... (11.6)}$$

दोनों पक्षों को $r!$ से भाग देने पर, हमें प्रमेय में दिया गया परिणाम प्राप्त हो जाता है।

अब हम एक उदाहरण दे रहे हैं, जो आपको ${}^nC_r$ से परिचित कराने में सहायक होगा।

उदाहरण 11.19. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) ${}^5C_2$ (b) ${}^5C_3$ (c) ${}^4C_3 + {}^4C_2$ (d) $\dfrac{{}^6C_3}{{}^4C_2}$

हल : (a) ${}^5C_2 = \dfrac{{}^5P_2}{2!} = \dfrac{5.4}{1.2} = 10$ (b) ${}^5C_3 = \dfrac{{}^5P_3}{3!} = \dfrac{5.4.3}{1.2.3} = 10$

(c) $${}^4C_3 + {}^4C_2 = \frac{{}^4P_3}{3!} + \frac{{}^4P_2}{2!} = \frac{4.3.2}{1.2.3} + \frac{4.3}{1.2} = 4 + 6 = 10$$

(d) $${}^6C_3 = \frac{{}^6P_3}{3!} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20 \text{ तथा } {}^4C_2 = \frac{4.3}{1.2} = 6$$

$$\therefore \frac{{}^6C_3}{{}^4C_2} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

उदाहरण 11.20. समुच्चय $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ के उन उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें 4 अवयव हों।

हल : यहाँ अवयवों को चुनने में क्रम का महत्त्व नहीं है और यह संचय का प्रश्न है।

हमें इस समुच्चय के, जिनमें 11 अवयव हैं, चार अवयवों को चुनने की विधियों की संख्या ज्ञात करनी है। समबन्ध (11.5) से, इसे

$${}^{11}C_4 = \frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} = 330 \text{ विधियों से किया जा सकता है।}$$

उदाहरण 11.21. एक वृत्त पर 12 बिन्दु दिए हुए हैं। इन बिन्दुओं का प्रयोग करके कितने चक्रीय चतुर्भुज खींचे जा सकते हैं?

हल : चार बिन्दुओं के किसी भी समुच्चय से हमें एक चक्रीय चतुर्भुज प्राप्त होता है। 12 बिन्दुओं में से 4 बिन्दुओं को चुनने की विधियों की संख्या ${}^{12}C_4 = 495$ ।

अतः, हम 495 चक्रीय चतुर्भुज खींच सकते हैं।

उदाहरण 11.22. एक बक्से में 5 काले, 3 सफेद और 4 लाल कलम हैं। कितनी विधियों से 2 काले, 2 सफेद, 2 लाल कलम चुने जा सकते हैं?

हल : 5 काले कलमों में से 2 काले कलम चुनने की विधियों की संख्या = ${}^5C_2 = \frac{{}^5P_2}{2!} = \frac{5.4}{1.2} = 10$

3 सफेद कलमों में से 2 सफेद कलम चुनने की विधियों की संख्या $= {}^3C_2 = \frac{{}^3P_2}{2!} = \frac{3.2}{1.2} = 3$

4 लाल कलमों में से 2 लाल कलम चुनने की विधियों की संख्या $= {}^4C_2 = \frac{{}^4P_2}{2!} = \frac{4.3}{1.2} = 6$

$\therefore$ गणन सिद्धान्त से, 2 काले कलम, 2 सफेद कलमों तथा 2 लाल कलम के चयन करने की $10\times3\times6 = 180$ विधियाँ हो सकती हैं!

उदाहरण 11.23. एक प्रश्न पत्र, जिसमें 10 प्रश्न हैं, को दो भागों A और B में विभाजित किया गया है। प्रत्येक भाग में 5 प्रश्न हैं। एक परीक्षार्थी को कुल 6 प्रश्न करने हैं, जिनमें कम–से–कम 2 प्रश्न भाग A तथा कम–से–कम 2 प्रश्न भाग B से हों। परीक्षार्थी कितनी विधियों से प्रश्नों का चयन कर सकता है, यदि वह सभी प्रश्नों को समान रूप से सही हल कर सकता हो?

हल : परीक्षार्थी को कुल 6 प्रश्नों का चयन करना है, जिनमें कम–से–कम 2 प्रश्न भाग A से तथा कम–से–कम 2 प्रश्न भाग B से होने चाहिए। वह प्रश्नों को निम्न विधियाँ से चुन सकता है :

	भाग A	भाग B
(i)	2	4
(ii)	3	3
(iii)	4	2

चयन (i) का अनुसरण करने पर, विधियों की संख्या = ${}^5C_2 \times {}^5C_4 = 10\times5 = 50$

चयन (ii) का अनुसरण करने पर, विधियों की संख्या = ${}^5C_3 \times {}^5C_3 = 10\times10 = 100$

चयन (iii) का अनुसरण करने पर, विधियों की संख्या = ${}^5C_4 \times {}^5C_2 = 50$

अतः, चयन की विधियों की कुल संख्या = 50 + 100 + 50 = 200

उदाहरण 11.24. 6 पुरुषों तथा 4 महिलाओं में से 5 व्यक्तियों की एक कमेटी का गठन करना है। यह कितनी विधियों से किया जा सकता है, यदि

(i) कम–से–कम 2 महिलाएँ इसमें सम्मिलित हों?

(ii) अधिक–से–अधिक 2 महिलाएँ इसमें सम्मिलित हों?

हल : (i) जब कम–से–कम 2 महिलाएँ सम्मिलित हों :

(a) 2 महिलाएँ और 3 पुरुष सम्मिलित हो सकते हैं : ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_2 \times {}^6C_3$

(b) 3 महिलाएँ और 2 पुरुष सम्मिलित हो सकते हैं : ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_3 \times {}^6C_2$

(c) 4 महिलाएँ और 1 पुरुष सम्मिलित हो सकते हैं : ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_4 \times {}^6C_1$

$\therefore$ कमेटी बनाने की विधियों की कुल संख्या

$$= {}^4C_2.{}^6C_3 + {}^4C_3.{}^6C_2 + {}^4C_4.{}^6C_1 = 4 \times 15 + 1 \times 6 + 6 \times 20 = 60 + 6 + 120 = 186$$

(ii) जब अधिक–से–अधिक 2 महिलाएँ सम्मिलित हों :

टिप्पणी

(a) 2 महिलाएँ, 3 पुरुष हो सकते हैं। ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_2.{}^6C_3$

(b) 1 महिला, 4 पुरुष हो सकते हैं। ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_1.{}^6C_4$

(c) 5 पुरुष हो सकते हैं। ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^6C_5$

$\therefore$ कमेटी बनाने की विधियों की कुल संख्या

$$= {}^4C_2.{}^6C_3 + {}^4C_1.{}^6C_4 + {}^6C_5 = 6\times 20 + 4\times 15 + 6 = 120 + 60 + 6 = 186$$

उदाहरण 11.25. भारतीय क्रिकेट टीम में 16 खिलाड़ी हैं। इसमें 2 विकेटकीपर तथा 5 गेंदबाज हैं। एक क्रिकेट एकादश के 11 खिलाड़ी कितनी विधियों से चुने जा सकते हैं, जबकि 1 विकेटकीपर तथा कम–से–कम 4 गेंदबाज चुने जाने हैं?

हल : हम 1 विकेटकीपर तथा 4 गेंदबाज या 1 विकेटकीपर तथा 5 गेंदबाज चुन सकते हैं।

1 विकेटकीपर, 4 गेंदबाज तथा 6 अन्य खिलाड़ियों को चुनने की विधियों की संख्या

$$= {}^2C_1.{}^5C_4.{}^9C_6 = 2\times\frac{5\times4\times3\times2.1}{4.3.2.1.}\times\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 2\times5\times\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 840$$

1 विकेटकीपर, 5 गेंदबाज तथा 5 अन्य खिलाड़ियों को चुनने की विधियों की संख्या

$$= {}^2C_1.{}^5C_5.{}^9C_5 = 2\times1\times\frac{9\times8\times7\times6\times5}{5\times4\times3\times2\times1} = 2\times1\times\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 252$$

$\therefore$ टीम चुनने की विधियों की कुल संख्या $= 840 + 252 = 1092$

देखें आपने कितना सीखा 11.6

1. (a) मान ज्ञात कीजिए :

(i) ${}^{13}C_3$ (ii) ${}^9C_5$ (iii) ${}^8C_2 + {}^8C_3$ (iv) $\dfrac{{}^9C_3}{{}^6C_3}$

(b) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं तथा कौन से कथन असत्य हैं :

(i) ${}^5C_2 = {}^5C_3$ (ii) ${}^4C_3 \times {}^3C_2 = {}^{12}C_6$

(iii) ${}^4C_2 + {}^4C_3 = {}^8C_5$ (iv) ${}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 = {}^{11}C_3$

2. समुच्चय {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., 23}के उन उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें 3 अवयव हों।
3. 14 बिन्दु एक वृत्त पर स्थित हैं। इन बिन्दुओं का प्रयोग करके कितने पंचभुज खींचे जा सकते हैं?
4. फलों की एक टोकरी में 5 सेब, 7 आलू बुखारे तथा 11 नारंगियाँ हैं। आपको इनमें से 3 फल चुनने हैं। आप कितनी विधियों से अपनी पसन्द बना सकते हैं?
5. एक प्रश्न पत्र, जिसमें 12 प्रश्न हैं, को दो भागों A तथा B में विभाजित किया गया है, जिनमें क्रमशः 5 तथा 7 प्रश्न हैं। एक विद्यार्थी को कुल 6 प्रश्न करने हैं, जिनमें प्रत्येक भाग से कम–से–कम 2 प्रश्न करना आवश्यक है। वह विद्यार्थी कितनी विधियों से प्रश्नों का चयन कर सकता है?
6. 5 पुरुषों तथा 3 महिलाओं मे से 3 व्यक्तियों की एक कमेटी का गठन करना है। यह कितनी विधियों से किया जा सकता है, जबकि इसमें

   (i) ठीक 1 महिला हो? (ii) कम–से–कम 1 महिला हो?
7. एक क्रिकेट टीम में 17 खिलाड़ी हैं, जिनमें 2 विकेटकीपर तथा 4 गेंदबाज हैं। कितनी विधियों से इनमें से 11 खिलाड़ी चुने जा सकते हैं, यदि 1 विकेटकीपर तथा कम–से–कम तीन गेंदबाजों का चयन करना हो?
8. 5 रिक्त स्थानों की भर्ती के लिए 25 उम्मीदवारों ने प्रार्थना पत्र दिए। इन उम्मीदवारों में 7 अनुसूचित जाति तथा 8 अन्य पिछड़ी जाति के उम्मीदवार थे। यदि 2 स्थान अनुसूचित जाति तथा 1 स्थान पिछड़ी जाति के लिए सुरक्षित हों, तो चयन करने की कुल विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

11.6 ${}^nC_r$ के कुछ सरल गुण

इस अनुच्छेद में, हम ${}^nC_r$ के कुछ सरल गुणों को सिद्ध करेंगे जो इसके मानों के अभिकलनों को सरल बनाएँगे। आइए हम प्रमेय 11.3 का अवलोकन करें। सम्बन्ध 11.6 का प्रयोग करके ${}^nC_r$ के सूत्र को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$ {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad ....(11.7)$$

उदाहरण 11.26. ${}^nC_0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $r = 0$ है।

$$\therefore\ {}^nC_0 = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{0!} = 1,$$

क्योंकि हमने $(0! = 1)$ परिभाषित किया है।

प्रमेय 11.3 में दिए गए सूत्र को हमने पिछले अनुच्छेद में प्रयोग किया था। अब हम शीघ्र ही देखेंगे कि समीकरण 11.7 में दिया गया सूत्र ${}^nC_r$ के कुछ गुणों को सिद्ध करने में लाभदायक होगा।

$$ {}^nC_r = {}^nC_{n-r} \qquad ...(11.8)$$

इसका अर्थ यही है कि n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चुनने की विधियों की संख्या वही है, जो n वस्तुओं में से $(n - r)$ वस्तुओं के न चुनने की विधियों की संख्या है। भूमिका में चर्चित उदाहरण का ठीक

यही अर्थ है कि 2 जोड़े वस्त्रों के चुनने की विधियों की संख्या वही है जो $4-2=2$ जोड़े वस्त्रों को न लेने की विधियों की संख्या है। उदाहरण 11.20 में इसका अर्थ है कि 4 अवयवों के उपसमुच्चय के चुनने की विधियों की संख्या वही है जो 8 अवयवों के उपसमुच्चय के न चुनने की है। क्योंकि 4 अवयवों के एक विशेष उपसमुच्चय का चुनना उसके आठ अवयवों वाले पूरक समुच्चय को न चुनने के तुल्य है।

आइए अब इस सम्बन्ध को समीकरण 11.7 का प्रयोग करके सिद्ध करें। इस समीकरण के दायें पक्ष के हर में $r!\,(n-r)!$ है। इससे कोई अन्तर नहीं पड़ता यदि हम r के स्थान पर $n-r$ रख दें जैसाकि नीचे दर्शाया गया है?

$$(n-r)!.[n-(n-r)]! = (n-r)!.r!$$

अंश r से स्वतन्त्र है। इसलिए समीकरण 11.7 में r के स्थान पर $n-r$ रखने पर, हमें परिणाम (11.8) प्राप्त हो जाता है।

सम्बन्ध 11.8 कितना लाभदायक है? उदाहणार्थ इस सूत्र का प्रयोग करके ${}^{100}C_{98}$ को ${}^{100}C_2$ के बराबर प्राप्त करते हैं। द्वितीय मान की गणना प्रथम की तुलना में बहुत सरल है।

उदाहरण 11.27. मान ज्ञात कीजिए :

(a) ${}^{7}C_5$ (c) ${}^{10}C_9$ (b) ${}^{11}C_9$ (d) ${}^{12}C_9$

हल : (a) सम्बन्ध 11.8 से, ${}^{7}C_5 = {}^{7}C_{7-5} = {}^{7}C_2 = \dfrac{7.6}{1.2} = 21$

(b) इसी प्रकार ${}^{10}C_9 = {}^{10}C_{10-9} = {}^{10}C_1 = 10$

(c) ${}^{11}C_9 = {}^{11}C_{11-9} = {}^{11}C_2 = \dfrac{11.10}{1.2} = 55$

(d) ${}^{12}C_{10} = {}^{12}C_{12-10} = {}^{12}C_2 = \dfrac{12.11}{1.2} = 66$

एक बहुत उपयोगी सम्बन्ध, जो ${}^{n}C_r$ द्वारा सन्तुष्ट होता है:

$${}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r = {}^{n}C_r \qquad ....(11.9)$$

$${}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r = \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{r(n-r-1)!(r-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!}\left[\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r}\right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!}\left[\frac{n}{(n-r)r}\right]$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!r(r-1)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^{n}C_r$$

उदाहरण 11.28. मान ज्ञात कीजिए :

(a) ${}^{6}C_2+{}^{6}C_1$ (b) ${}^{8}C_2+{}^{8}C_1$ (c) ${}^{5}C_3+{}^{5}C_2$ (d) ${}^{10}C_2+{}^{10}C_3$

हल :(a) संबंध (11.9) में, $n = 7$ और $r = 2$। इसलिए, ${}^{6}C_2+{}^{6}C_1={}^{7}C_2=21$

(b) यहाँ पर $n = 9,\ r = 2$। $\therefore\ {}^{8}C_2+{}^{8}C_1={}^{9}C_2=36$

(c) यहाँ पर $n = 6,\ r = 3$। $\therefore\ {}^{5}C_3+{}^{5}C_2={}^{6}C_3=20$

(d) यहाँ पर $n = 11, r = 3$। $\therefore\ {}^{10}C_2+{}^{10}C_3={}^{11}C_3=165$

यदि ${}^{n}C_{10}={}^{n}C_{12}$ हो, तो n ज्ञात कीजिए।

हल : ${}^{n}C_r={}^{n}C_{n-r}$ का प्रयोग करते हुए,

$n - 10 = 12$ या $n = 12 + 10 = 22$

देखें आपने कितना सीखा 11.7

1. (a) ${}^{n}C_{n-1}$ का मान ज्ञात कीजिए। क्या ${}^{n}C_{n-1}={}^{n}C_n$? (b) दर्शाइए कि ${}^{n}C_n={}^{n}C_0$।

2. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) ${}^{9}C_5$ (b) ${}^{14}C_{10}$ (c) ${}^{13}C_9$ (d) ${}^{15}C_{12}$

3. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) ${}^{7}C_3+{}^{7}C_2$ (b) ${}^{8}C_4+{}^{8}C_5$ (c) ${}^{9}C_3+{}^{9}C_2$ (d) ${}^{12}C_3+{}^{12}C_2$

4. यदि ${}^{10}C_r={}^{10}C_{2r+1}$ हो, तो r का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि ${}^{18}C_r={}^{18}C_{r+2}$ हो, तो ${}^{r}C_5$ का मान ज्ञात कीजिए।

11.7 क्रमचय तथा संचय दोनों से सम्बन्धित समस्याएँ

अभी तक हमने या तो केवल क्रमचय से संबद्ध या केवल संचय से संबद्ध प्रश्नों का अध्ययन किया है। इस अनुच्छेद में, हम कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे, जिनमें दोनों संकल्पनाओं की आवश्यकता होगी।

उदाहरण 11.30. 5 उपन्यास तथा 4 जीवनियाँ दी हुई हैं। एक शैल्फ पर इनमें से 4 उपन्यासों और 2 जीवनियों को कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है?

हल : 5 में से 4 उपन्यास ${}^{5}C_4$ विधियों से चुने जा सकते हैं तथा 4 में से 2 जीवनियाँ ${}^{4}C_2$ विधियों से चुनी जा सकती हैं।

उपन्यासों तथा जीवनियों के चयन की संख्या = ${}^{5}C_4\times{}^{4}C_2=5\times6=30$

30 विधियों में से किसी एक विधि से 6 पुस्तकों (4 उपन्यास और 2 जीवनियाँ) चुनने के पश्चात्, उन्हें शैल्फ पर 6! = 720 विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

गणन सिद्धान्त से, व्यवस्थाओं की कुल संख्या = $30\times720 = 21600$

उदाहरण 11.31. 5 व्यंजनों तथा 4 स्वरों में से 3 व्यंजनों तथा 2 स्वरों वाले कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल : 5 व्यंजनों में से 3 व्यंजन ${}^5C_3$ विधियों से चुने जा सकते हैं तथा 4 स्वरों में से 2 स्वर ${}^4C_2$ विधियों से चुने जा सकते हैं। प्रत्येक चयन के साथ, 5 अक्षरों को व्यवस्थित करने की विधियों की संख्या = ${}^5P_5$ ।

$\therefore$ कुल शब्दों की संख्या = ${}^5C_3\times{}^4C_2\times{}^5P_5 = \dfrac{5\times4}{2\times1}\times\dfrac{4\times3}{2\times1}\times5! = 10\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 7200$

देखें आपने कितना सीखा 11.8

1. गणित की 5 पुस्तकें, भौतिकी की 4 पुस्तकें तथा रसायन की 5 पुस्तकें हैं। इनमें से 4 गणित, 3 भौतिकी तथा 4 रसायन की पुस्तकें आप कितनी विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं यदि
   (a) एक ही विषय की पुस्तकें एक साथ रखी जाएँ, परन्तु एक विषय के अन्दर, इसकी पुस्तकों का क्रम कया है इसका महत्त्व नहीं है?
   (b) पुस्तकों को विषय अनुसार ही रखा जाए तथा विषय के अन्दर पुस्तकों के क्रम का भी महत्त्व है?
2. 9 व्यंजनों तथा 5 स्वरों में से 7 अक्षरों के कितने शब्द बनाए जा सकते हैं, जबकि इनमें से 4 व्यंजन तथा 3 स्वर लेने हैं?
3. आप अपने 6 मित्रों में से कम–से–कम एक मित्र को रात के खाने पर कितनी विधियों से आमन्त्रण दे सकते हैं?
4. एक परीक्षा में एक परीक्षार्थी को 4 भिन्न विषयों में सफल होना है। वह कितनी विधियों से असफल हो सकता है?

आइये दोहराएँ

- **गणन के मूलभूत सिद्धान्त का कथन है :**
  यदि n घटनाएँ हैं और प्रथम घटना m_1 विधियों से घटित हो सकती है, प्रथम घटना के घटित होने के पश्चात् द्वितीय घटना m_2 विधियों से घटित हो सकती है, द्वितीय घटना के घटित होने के पश्चात् तृतीय घटना m_3 विधियों से घटित हो सकती है, इत्यादि, तो सभी घटनाओं के घटित होने की कुल विधियाँ $m_1\times m_2\times m_3\times \ldots\ldots\times m_{n-1}\times m_n$ होंगी।
- n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या = $n!$
- ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
- ${}^nP_n = n!$
- n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चुनने की विधियों की संख्या ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$
- ${}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1} = {}^nC_r$

सहायक वेबसाइट

- *www.mathsisfun.com/combinatorics/combinations-permutations.html*
- *https://www.youtube.com/watch?v=M9prgasECts*
- *https://www.youtube.com/watch?v=K6Cmt8CMPaE*

आइए अभ्यास करें

1. एक प्रश्नपत्र में 8 सत्य–असत्य प्रश्न हैं। इनके कितने उत्तर सम्भव हैं?
2. एक पासे के छः फलकों पर 1,2,3,4,5 और 6 लिखा होता है। ऐसे दो पासों को एक साथ उछाला जाता है। वे कितनी विधियों से गिर सकते हैं?
3. एक जलपान गृह में 3 सब्जियाँ, 2 सलाद और 2 प्रकार की ब्रेड हैं। यदि कोई ग्राहक 1 सब्जी, 1 सलाद, 1 ब्रेड खाना चाहता है, तो वह कितनी विधियों से इनका चयन कर सकता है?
4. मान लीजिए कि आप अपनी दीवारों पर कागज लगाना चाहते हैं। दीवार पर चिपकाने के कागज 4 भिन्न रंगों के हैं। उन पर 5 भिन्न रंगों के 7 भिन्न डिज़ाइन (designs) हैं। कितनी विधियों से इन कागजों का चयन किया जा सकता है?
5. 7 विद्यार्थियों को एक पंक्ति में 7 स्थानों पर कितनी विधियों से बैठाया जा सकता है?
6. *ALTRUISM* शब्द के अक्षरों से 8 अक्षरों वाले कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?
7. यदि आपके घर में 5 खिड़कियाँ और 8 पर्दे हैं, तो आप कितनी विधियों से खिड़कियों पर पर्दे लगा सकते हैं?
8. शब्द *POLICY* के अक्षरों में से तीन अक्षरों को लेकर, अधिकतम कितने शब्द बन सकते हैं?
9. दौड़ की एक प्रतियोगिता में 10 खिलाड़ी भाग ले रहे हैं। तीन पुरस्कार प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय दिए जाने हैं। ये पुरस्कार कितनी विधियों से दिए जा सकते हैं?
10. शब्द *ATTAIN* के अक्षरों को कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है ताकि दोनों T तथा दोनों *A* एक साथ रहें?
11. 12 मित्रों का एक समूह एक प्रीतिभोज में मिलता है। इनमें से प्रत्येक व्यक्ति अन्य सभी से एक बार हाथ मिलाता है। हाथ मिलाने की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।
12. मान लीजिए कि आपके पास एक दुकान है, जहाँ टेलीविजन बिकते हैं। आप 5 भिन्न प्रकार के टेलीविजन सेट बेच रहे हैं, परन्तु दिखाने के लिए आपके शोकेस में केवल 3 टेलीविजन सेट रखने का ही स्थान है। दिखाने के लिए आप कितनी विधियों से टेलीविजन सेटों का चयन कर सकते हैं?
13. एक ठेकेदार को 4 बढ़इयों की आवश्यकता है। समान योग्यता वाले पाँच बढ़ई इस काम के लिए आवेदन देते हैं। ठेकेदार कितनी विधियों से बढ़इयों का चुनाव कर सकता है?
14. 13 व्यक्तियों के एक समूह में से 9 सदस्यों की एक समिति कितनी विधियों से बनाई जा सकती है?

15. 15 पुरुषों और 12 महिलाओं के एक समूह में से 3 पुरुष और 2 महिलाएँ चुनकर एक समिति कितनी विधियों से बनाई जा सकती है?

16. 4 ग्रेड (grade) I और 7 ग्रेड II अधिकारियों में से 6 व्यक्ति कितनी विधियों से चुने जा सकते हैं, ताकि प्रत्येक श्रेणी से कम–से–कम दो अधिकारी अवश्य ही लिए जाएँ?

17. 6 लड़कों और 4 लड़कियों में से 5 सदस्यों की एक समिति बनानी है। ऐसा कितनी विधियों से किया जा सकता है, यदि समिति में

    (a) ठीक 2 लड़कियाँ हों? (b) कम–से–कम 2 लड़कियाँ हों?

18. अंग्रेजी वर्णमाला में 5 स्वर और 21 व्यंजन हैं। इस वर्णमाला में से 2 भिन्न स्वर और 2 भिन्न व्यंजन लेकर बनाए जा सकने वाले शब्दों की अधिकतम संख्या क्या है?

19. 5 व्यंजनों और 5 स्वरों में से 3 व्यंजनों और 2 स्वरों का प्रयोग करते हुए, कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

20. एक विद्यालय के वार्षिक समारोह में एक विविध कार्यक्रम आयोजित किया गया। 3 छोटे नाटक, 6 गायन और 4 नृत्य के कार्यक्रम की योजना बनाई गई। परन्तु समारोह के लिए आमन्त्रित मुख्य अतिथि ने अपने भाषण को समाप्त करने में आशा से बहुत अधिक समय ले लिया। शीघ्र ही समाप्त करने के लिए, यह निर्णय लिया गया कि केवल 2 नाटक, 4 गायन और 3 नृत्य के कार्यक्रम ही किए जाएँ। उन्हें चुनने की कितनी विधियाँ उपलब्ध थीं,

    (a) यदि कार्यक्रम किसी भी क्रम में किए गए?

    (b) यदि एक प्रकार के कार्यक्रम एक ही दौर में किए गए?

    (c) यदि एक प्रकार के कार्यक्रम एक ही दौर में किए गए और साथ–साथ एक प्रकार के कार्यक्रम के प्रदर्शन के क्रम का भी ध्यान रखा गया?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 11.1

1. (a) 180 (b) 8 (c) 12 2. (a) 48 (b) 20

देखें आपने कितना सीखा 11.2

1. (a) 17576 (b) 900 2. (a) 105 (b) 60
3. (a) 24 (b) 24

देखें आपने कितना सीखा 11.3

1. (a) (i) 720 (ii) 5040 (iii) 5046 (iv) 17280 (v) 10
   (b) (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य
2. (a) 120 (b) 40320 (c) 24

देखें आपने कितना सीखा 11.4

1. (a) (i) 12 (ii) 120 (iii) 4 (iv) 7200 (v) $n!$

(b) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

2. (a) (i) 7980 (ii) 9240 (b) 20 (c) 840

देखें आपने कितना सीखा 11.5

1. 96 2. 1152 3. 2073600 4. 2488320
5. 144 6. (i) 5040 (ii) 30240 (iii) 332640

देखें आपने कितना सीखा 11.6

1. (a) (i) 286 (ii) 126 (iii) 84 (iv) $\frac{21}{5}$

   (b) (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य

2. 1771 3. 2002 4. 57750 5. 805
6. (i) 30 (ii) 46 7. 3564 8. 7560

देखें आपने कितना सीखा 11.7

1. (a) n , नहीं
2. (a) 126 (b) 1001 (c) 715 (d) 455
3. (a) 56 (b) 126 (c) 120 (d) 286
4. 3 5. 56

देखें आपने कितना सीखा 11.8

1 (a) 600 (b) 2073600 2. 6350400
3. 63 4. 15

आइए अभ्यास करें

1. 256	2. 36	3. 12	4. 140
5. 5040	6. 40320	7. 6720	8. 120
9. 720	10. 24	11. 66	12. 10
13. 5	14. 715	15. 30030	16. 371
17. (a) 120	(b) 186	18. 50400	19. 12000
20. (a) 65318400	(b) 1080	(c) 311040	