13

311hi13

निर्देशांकों की कार्तीय प्रणाली

आपने सिनेमा हॉल, स्टेडियम, बस या रेल में अपना स्थान ढूँढा होगा। उदाहरणार्थ H-4 का अर्थ है Hवीं पंक्ति में चौथा स्थान। दूसरे शब्दों में H और 4 आपके स्थान के निर्देशांक हैं। इस प्रकार किसी भी स्थिति को ज्यामिति में संख्या तथा वर्णमाला (बीजीय अवधारणा) द्वारा निरूपित किया जाता है। किसी कॉलोनी के चित्र में भी विभिन्न घरों (जो कि एक विशेष अनुक्रम में हों) की तथा सड़कों और पार्कों की स्थिति दिखाई जाती है, अर्थात् बीजीय अवधारणा को ज्यामितीय चित्रें जैसे सरल रेखा, वृत्त और बहुभुज द्वारा निरूपित किया जाता है।

गणित की उस शाखा के अध्ययन, जो ज्यामिति व बीजगणित में परस्पर सम्बन्ध बताती है, को **निर्देशांक ज्यामिति** या कार्तीय ज्यामिति कहते हैं। इसका श्रेय फ्रांस के प्रसिद्ध गणितज्ञ रेने दकोर्त को जाता है।

इस पाठ में हम निर्देशांक ज्यामिति की मौलिकताएँ तथा ज्यामिति में सरल रेखा की धारणा और उसके बीजगणितीय निरूपण में सम्बन्ध के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे :

- निर्देशांकों की कार्तीय प्रणाली को परिभाषित करना, जिनमें मूलबिन्दु, निर्देशांक अक्ष, चतुर्थांश आदि सम्मिलित हैं;
- दूरी सूत्र और विभाजन सूत्र व्युत्पन्न करना;
- दिए हुए शीर्षों से त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र व्युत्पन्न करना;
- दिए हुए तीन बिन्दुओं की संरेखता प्रमाणित करना;
- झुकाव तथा रेखा की प्रवणता जैसे पदों की व्याख्या करना;
- दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता का सूत्र ज्ञात करना;
- दी गई प्रवणता वाली रेखाओं की समान्तरता तथा लम्बवतता के प्रतिबन्ध की व्याख्या करना;
- रेखा द्वारा निर्देशांक अक्षों पर बने अन्तःखण्डों को ज्ञात करना;
- दो रेखाओं के बीच कोण ज्ञात करना, यदि उनकी प्रवणताएं दी हुई हैं।

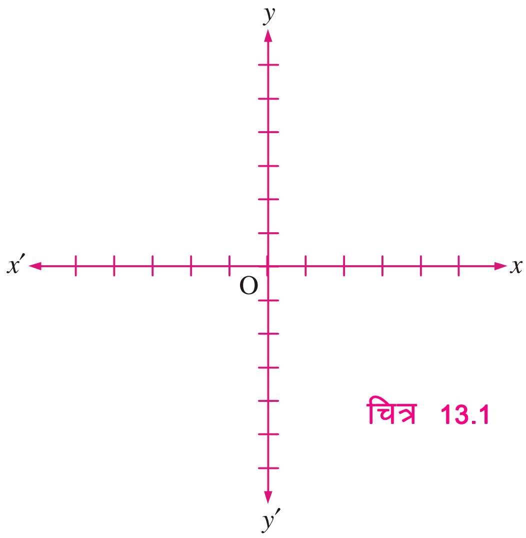
- एक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना, यदि मूल बिन्दु को किसी अन्य बिन्दु पर स्थानान्तरित कर दिया जाए।
- किसी वक्र का रूपांतरित समीकरण ज्ञात करना, यदि मूल बिन्दु को किसी अन्य बिन्दु पर स्थानान्तरित कर दिया जाए।

पूर्व ज्ञान

- संख्या पद्धति
- एक निर्देशांक तल में बिन्दुओं को चित्रित करना
- रैखिक समीकरणों का आलेख
- रैखिक समीकरणों के हल

13.1 आयताकार निर्देशांक अक्ष

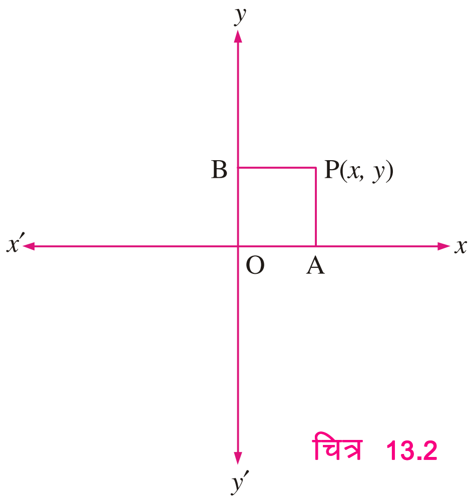
पुनः याद कीजिए कि हम पिछली कक्षाओं में दो परस्पर लम्बवत रेखाओं द्वारा एक तल में एक बिन्दु की स्थिति स्थिर (निश्चित) करना सीख चुके हैं। उस स्थिर (निश्चित) बिन्दु O को, जहाँ ये रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं मूलबिन्दु कहते हैं जैसा चित्र 13.1 में दर्शाया गया है। ये परस्पर लम्बवत रेखाएँ निर्देशांक अक्ष कहलाती हैं। क्षैतिज रेखा XOX' को x- अक्ष या x का अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर रेखा YOY' को y- अक्ष या y का अक्ष कहते हैं।



चित्र 13.1

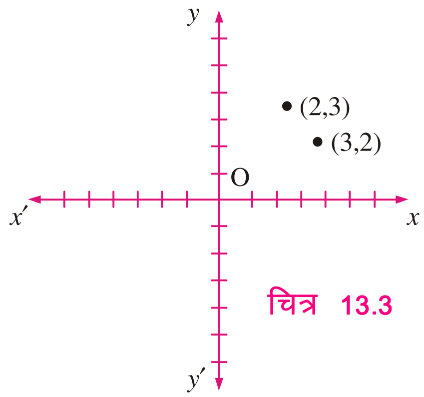
13.1.1 एक बिन्दु के कार्तीय निर्देशांक

एक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए हम निम्न विधि का अनुसरण करेंगे। X'OX तथा YOY' को निर्देशांक अक्ष लें। माना इस तल में P कोई बिन्दु है। बिन्दु P से $PA \perp XOX'$ तथा $PB \perp YOY'$ खींचिए। तब दूरी OA = x, x-अक्ष के अनुदिश तथा OB = y, y-अक्ष के अनुदिश लीजिए। इन अक्षों के अनुसार बिन्दु P की स्थिति का पता चलता है। x अक्ष के अनुदिश मापी गई दूरी OA, भुज या x- निर्देशांक तथा y- अक्ष के अनुदिश मापी गई दूरी OB (=PA) बिन्दु P की कोटि या y- निर्देशांक कहलाते हैं। भुज और कोटि एक साथ लेने पर बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते हैं। इस प्रकार बिन्दु P के निर्देशांक (x तथा y) हैं, जो तल में एक बिन्दु की स्थिति दर्शाते हैं। ये दो संख्याएँ **क्रमित युग्म** बनाती हैं, क्योंकि यह क्रम जिसमें हम इन पूर्णांकों को लिखते हैं, महत्त्वपूर्ण है।



चित्र 13.2

चित्र 13.3 में आप देख सकते हैं कि युग्म (2, 3) के क्रम की स्थिति (3, 2) से भिन्न है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि (x, y) तथा (y, x) दो भिन्न प्रकार के जोड़े तल में दो भिन्न प्रकार के बिन्दु दर्शाते हैं।

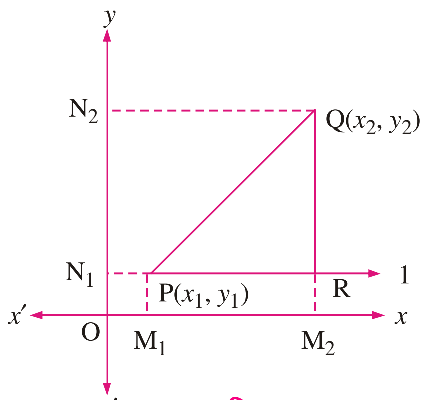


चित्र 13.3

13.1.2 चतुर्थांश

हम जानते हैं कि निर्देशांक अक्ष XOX' तथा YOY' एक तल को चार भागों में बाँटते हैं। ये भाग चतुर्थांश कहलाते हैं, जैसा चित्र 13.4 में दर्शाया गया है। चिह्नों के अनुसार बिन्दु $P(x, y)$ की स्थिति विभिन्न चतुर्थांशों में, हमें प्राप्त होती है।

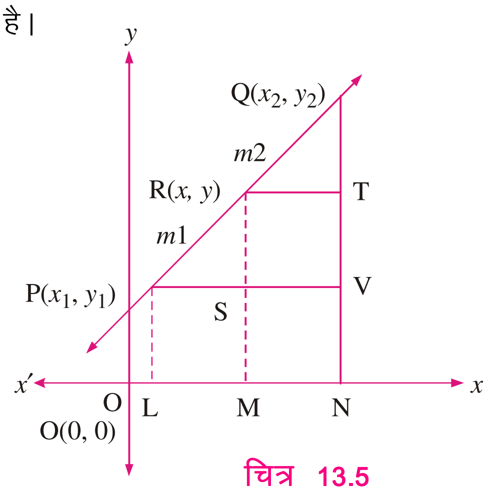
I	प्रथम चतुर्थांश	$x > 0, y > 0$
II	द्वितीय चतुर्थांश	$x < 0, y > 0$
III	तृतीय चतुर्थांश	$x < 0, y < 0$
IV	चतुर्थ चतुर्थांश	$x > 0, y < 0$



चित्र 13.4

13.2 दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

याद कीजिए कि आपने दो बिन्दुओं $P(x_1,y_1)$ तथा $Q(x_2,y_2)$ के बीच की दूरी निम्न प्रकार से व्युत्पन्न की है। एक रेखा $l \parallel XX'$ खींचिए जो P से होकर जाए। Q से l पर एक लम्ब खींचिये तथा मानिये कि प्रतिच्छेदी बिंदु R है। ΔPQR एक समकोण त्रिभुज है।



चित्र 13.5

साथ ही, $PR = M_1M_2$

$= OM_2 - OM_1$

$= x_2 - x_1$

और $QR = QM_2 - RM_2$

$= QM_2 - PM_1$

$= ON_2 - ON_1$

$= y_2 - y_1$

अब $PQ^2 = PR^2 + QR^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

टिप्पणी: यह सूत्र सभी चतुर्थांशों के बिन्दुओं के लिए सत्य है। बिन्दु P(x,y) की मूलबिन्दु O(0,0) से दूरी

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ है।}$$

आइए इन सूत्रों को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें।

उदाहरण 13.1. निम्नलिखित बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

(*i*) $A(14,3)$ तथा $B(10,6)$ (*ii*) $M(-1,2)$ तथा $N(0,-6)$

हल :

(*i*) दो बिन्दुओं के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

यहाँ $x_1 = 14,\ y_1 = 3,\ x_2 = 10,\ y_2 = 6$

$\therefore$ A और B के बीच की दूरी $= \sqrt{(10-14)^2 + (6-3)^2}$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

A और B के बीच की दूरी 5 इकाई है।

(*ii*) यहाँ $x_1 = -1,\ y_1 = 2,\ x_2 = 0$ और $y_2 = -6$

M और N के बीच की दूरी $= \sqrt{(0-(-1))^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{1+(-8)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

M और N बिन्दुओं के बीच की दूरी $= \sqrt{65}$ इकाई

उदाहरण 13.2. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P(–1, –1), Q(2, 3) और R (–2, 6) समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल:

$PQ^2 = (2 + 1)^2 + (3 + 1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$QR^2 = (-4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25$

और $RP^2 = 1^2 + (-7)^2 = 1 + 49 = 50$

$\therefore$ $PQ^2 + QR^2 = 25+25=50= RP^2$

$\Rightarrow$ $\Delta\, PQR$ एक समकोण Δ है (पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा)

उदाहरण 13.3. दर्शाइये कि बिन्दु A(1, 2), B(4, 5) तथा C(–1, 0) एक सरल रेखा पर स्थित हैं।

हल : यहाँ

AB = $\sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2}$ इकाई $= \sqrt{18}$ इकाई $= 3\sqrt{2}$ इकाई

BC = $\sqrt{(-1-4)^2 + (0-5)^2}$ इकाई $= \sqrt{50}$ इकाई $= 5\sqrt{2}$ इकाई

और $AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2}$ इकाई = $\sqrt{4+4}$ इकाई = $2\sqrt{2}$ इकाई

अब $AB + AC = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{2})$ इकाई $= 5\sqrt{2}$ इकाई $= BC$

अर्थात् $BA + AC = BC$

अतः A, B, C एक सरल रेखा पर स्थित हैं। दूसरे शब्दों में; A,B,C संरेख हैं।

उदाहरण 13.4. सिद्ध कीजिये कि बिन्दु (2a, 4a), (2a, 6a) तथा $(2a + \sqrt{3}a, 5a)$ समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं जिसकी प्रत्येक भुजा 2a है।

हल : माना बिन्दु A (2a, 4a), B (2a, 6a) तथा C $(2a + \sqrt{3}a, 5a)$ हैं।

$AB = \sqrt{0 + (2a)^2} = 2a$ इकाई

$BC = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (-a)^2}$ इकाई $= \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$ इकाई

और $AC = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (+a)^2} = 2a$ इकाई

$\Rightarrow$ AB + BC > AC, BC + AC > AB और

AB + AC > BC और AB = BC = AC = 2a

$\Rightarrow$ A, B, C भुजा 2a वाले समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

देखें आपने कितना सीखा 13.1

1. निम्नलिखित बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये:

   (a) (5, 4) तथा (2, –3) (b) (a, –a) तथा (b, b)

2. सिद्ध कीजिए कि निम्न बिन्दुओं का प्रत्येक समूह एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं :

   (a) (4, 4), (3, 5), (–1,–1) (b) (2, 1), (0, 3), (–2, 1)

3. दिखाइये कि निम्न बिन्दुओं का प्रत्येक समूह एक त्रिभुज के शीर्ष हैं :

   (a) (3, 3), (–3, 3) तथा (0, 0) (b) (0, a), (a, b) तथा (0, 0) (यदि ab = 0)

4. दिखाइये कि निम्न बिन्दुओं का प्रत्येक समूह संरेख है :

   (a) (3, –6), (2, –4) तथा (– 4, 8) (b) (0,3), (0, – 4) तथा (0, 6)

5. (a) दिखाइये कि बिन्दु (0, –1), (–2, 3), (6, 7) तथा (8, 3) एक आयत के शीर्ष हैं।

   (b) दिखाइये कि बिन्दु (3, –2), (6, 1), (3, 4) तथा (0, 1) एक वर्ग के शीर्ष हैं।

13.3 विभाजन सूत्र

13.3.1 अन्तः विभाजन

माना $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ रेखा l पर दो दिए गए बिन्दु हैं तथा $R(x, y)$, PQ को $m_1 : m_2$ अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

ज्ञात करना है : बिन्दु R के निर्देशांक x और y

रचना : P, Q और R से XX' पर क्रमशः PL, QN और RM लम्ब खींचिये जो XX' को क्रमशः L, M तथा N पर मिलते हैं। $RT \perp QN$ तथा $PV \perp QN$ खींचिये।

विधि : R रेखाखण्ड PQ को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

$\Rightarrow$ R रेखाखण्ड PQ पर स्थित है और $\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{m_1}{m_2}$

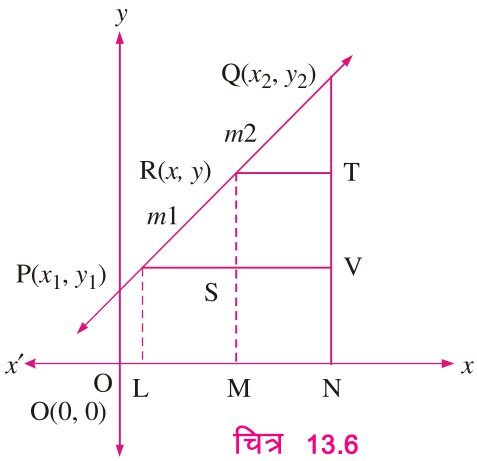
तथा $\Delta\ RPS$ और $\Delta\ QRT$ में,

$\angle RPS = \angle QRT$ (संगत कोण क्योंकि $PS \parallel RT$)

और $\angle RSP = \angle QTR = 90^0$

$\therefore \quad \Delta RPS \sim \Delta QRT$ (कोंं, कोंं कोंं समरूपता)

$$\Rightarrow \quad \frac{PR}{RQ} = \frac{RS}{QT} = \frac{PS}{RT} \quad \ldots (i)$$



चित्र 13.6

साथ ही $PS = LM = OM - OL = x - x_1$

$RT = MN = ON - OM = x_2 - x$

$RS = RM - SM = y - y_1$

$QT = QN - TN = y_2 - y$.

समीकरण (i) से हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\Rightarrow m_1(x_2 - x) = m_2(x - x_1)$$

और $m_1(y_2 - y) = m_2(y - y_1)$

$$\Rightarrow x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \text{ तथा } y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

इस प्रकार R के निर्देशांक हैं :

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

यदि R, PQ का मध्य बिन्दु है, तो $m_1 = m_2 = 1$ (क्योंकि R, PQ को अनुपात 1:1 में विभाजित करता है)

मध्य बिन्दु के निर्देशांक $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

13.3.2 बाह्य विभाजन

माना R रेखाखण्ड PQ को अनुपात $m_1 : m_2$ में बाह्य विभाजित करता है।

ज्ञात करना है : R के निर्देशांक

रचना : बिन्दु P, Q और R से XX' पर क्रमशः PL, QN और RM लम्ब खींचिये और $PS \perp RM$ तथा $QT \perp RM$ खींचिये।

स्पष्टतः $\Delta RPS \sim \Delta RQT.$

$$\therefore \frac{RP}{RQ} = \frac{PS}{QT} = \frac{RS}{RT}$$

या $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x-x_1}{x-x_2} = \frac{y-y_1}{y-y_2}$$

$$\Rightarrow m_1(x-x_2) = m_2(x-x_1)$$

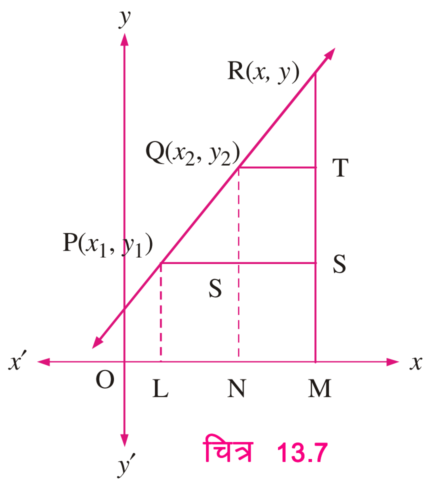
तथा $m_1(y-y_2) = m_2(y-y_1)$

इनसे प्राप्त होता है

$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

अतः बाह्य विभाजन के बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right) \text{ हैं।}$$



चित्र 13.7

अब हम कुछ उदाहरण करेंगे।

उदाहरण 13.5. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (4, –2) तथा (–3, 5) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:3 के अन्तः व बाह्य अनुपात में विभाजित करता है।

हल : **(i)** माना $P\ (x, y)$ अन्तः विभाजन का बिन्दु है।

$$\therefore x = \frac{2(-3)+3(4)}{2+3} = \frac{6}{5} \text{ और } y = \frac{2(5)+3(-2)}{2+3} = \frac{4}{5} \quad \therefore \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ बिन्दु } P \text{ के निर्देशांक हैं।}$$

यदि $Q\ (x', y')$ बाह्य विभाजन का बिन्दु है, तब

$$x' = \frac{(2)(-3)-3(4)}{2-3} = 18 \text{ और } y' = \frac{(2)(5)-3(-2)}{2-3} = -16$$

अतः बाह्य विभाजन के बिन्दु के निर्देशांक (18, –16) हैं।

उदाहरण 13.6. (1,4) और (–3, 16) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (3, –2) किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : माना कि बिन्दु $P(3, -2)$ रेखाखण्ड को $k : 1$ में विभाजित करता है।

तब P के निर्देशांक $\left(\frac{-3k+1}{k+1}, \frac{16k+4}{k+1}\right)$ हैं।

परन्तु P के दिए गए निर्देशांक (3, –2) हैं।

$$\therefore \quad \frac{-3k+1}{k+1} = 3 \Rightarrow -3k+1 = 3k+3 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow P$, रेखाखण्ड को 1:3 के बाह्य अनुपात में बाँटता है।

उदाहरण 13.7. एक चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष क्रमशः (1, 4), (–2,1), (0, –1) और (3, 2) हैं। यदि E, F, G, H क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु हों, तो सिद्ध कीजिए कि $EFGH$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल : क्योंकि E, F, G, H क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA, के मध्य बिन्दु हैं, इसलिए E, F, G, H के निर्देशांक क्रमशः

$$\left(\frac{1-2}{2}, \frac{4+1}{2}\right), \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1-1}{2}\right), \left(\frac{0+3}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) \text{ तथा } \left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right), F(-1, 0), G\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ तथा } H(2, 3) \text{ अभीष्ट बिन्दु हैं।}$$

तथा विकर्ण EG के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}}{2}, \frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ हैं।}$$

FH के मध्य बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ हैं।

क्योंकि दोनों विकर्णों के मध्य बिन्दु समान हैं, इसलिए विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अतः $EFGH$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

देखें आपने कितना सीखा 13.2

1. उन रेखाखण्डों के मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए जिनके अन्तः बिन्दु नीचे दिए गए हैं :

   (a) (–2, 3) और (3, 5) (b) (6,0) और (–2,10)

2. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो (–5, –2) और (3, 6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 3:1 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

3. (a) एक समातर चतुर्भुज के तीन शीर्ष (0,3), (0,6) और (2,9) हैं, चौथा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

   (b) एक वर्ग के शीर्ष (4, 0), (– 4, 0), (0,– 4) और (0, 4) हैं। सिद्ध कीजिए कि उसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से बना चतुर्भुज भी एक वर्ग होगा।

4. (2, 3) और (5, –1) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को तीन भागों में बाँटा गया है। उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो इसे तीन भागों में बाँटते हैं।

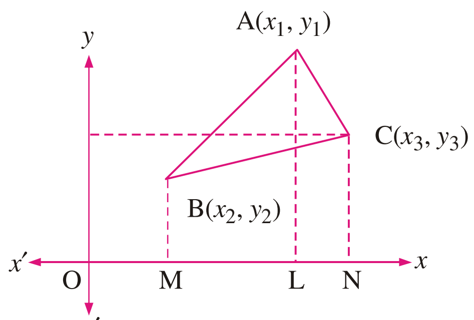
5. दिखाइये कि एक आयत की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति एक समचतुर्भुज होती है।

13.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल

आइए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके शीर्ष

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ हैं।

रचना : XX' पर AL, BM तथा CN लम्ब खींचिये।



चित्र 13.8

Δ ABC का क्षेत्रफल = समलम्ब चतुर्भुज $BMLA$ का क्षेत्रफल+ समलम्ब चतुर्भुज ALNC का क्षेत्रफल – समलम्ब चतुर्भुज BMNC का क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}(BM+AL)ML+\frac{1}{2}(AL+CN)LN-\frac{1}{2}(BM+CN)MN$$

$$=\frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)-\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$$

इसे हम सारणिक रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$\Delta \text{ ABC का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

उदाहरण 13.8. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $A(3, 4)$, $B(6, -2)$ और $C(-4, -5)$ हैं।

हल : ΔABC का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}[3(-2+5)-4(6+4)+1(-30-8)] = \frac{1}{2}[9-40-38] = \frac{-69}{2}$$

क्षेत्रफल धनात्मक होता है।

$$\therefore \Delta ABC = \frac{69}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 13.9. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(1, k)$, $(4, -3)$ और $(-9, 7)$ तथा इसका क्षेत्रफल 15 वर्ग इकाई हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}[-3-7-k(4+9)+1(28-27)]$$

$$= \frac{1}{2}[-10-13k+1] = \frac{1}{2}[-9-13k]$$

क्योंकि Δ का क्षेत्रफल दिया है 15,

$$\therefore \qquad \frac{-9-13k}{2} = 15$$

या $\qquad -9-13k = 30$

या $\qquad -13k = 39$

या $\qquad k = -3$

देखें आपने कितना सीखा 13.3

1. निम्नलिखित त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिनके शीर्ष नीचे दिए गए हैं :

   (1) (0, 5), (5, –5) और (0,0) $\qquad$ (b) (2, 3), (–2,–3) और (–2, 3)

   (c) (a, 0), (0, – a) और (0, 0)

2. त्रिभुज A BC का क्षेत्रफल, जिसके शीर्षों के निर्देशांक A (2, –3), B(3, –2) तथा $C\left(\frac{5}{2}, k\right)$ हैं, $\frac{3}{2}$ वर्ग इकाई है। k का मान ज्ञात कीजिये।

3. उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (5, 4), (5,– 4), (–5, 4) और (–5, – 4) हैं।

4. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (5, –2), (4, –7), (1, 1) और (3, 4) हैं।

13.5 तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबन्ध

तीन बिन्दु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ संरेख होंगे यदि और केवल यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल शून्य हो

अर्थात् $\frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3] = 0$

अर्थात् $x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = 0$

संक्षेप में इस परिणाम को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

आइए इसे उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें :

उदाहरण 13.10. दिखाइये कि बिन्दु $A(a, b+c)$, $B(b, c+a)$ तथा $C(c, a+b)$ संरेख हैं।

हल : ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1 + C_2$ के प्रयोग से

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ दिए गए बिन्दु संरेख हैं।

उदाहरण 13.11. k के किस मान के लिए बिन्दु $(1, 5)$, $(k, 1)$ तथा $(4, 11)$ संरेख हैं?

हल : दिए हुए बिन्दुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix}$

$\because$

$$= \frac{1}{2}[-10 - 5k + 20 + 11k - 4]$$

$$= \frac{1}{2}[6k + 6] = 3k + 3$$

क्योंकि दिए गये बिन्दु संरेख हैं, इसलिए

$$3k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1$$

अतः $k = -1$ के लिए, दिए गये बिन्दु संरेख हैं।

मॉड्यूल - IV

निर्देशांक ज्यामिति

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 13.4

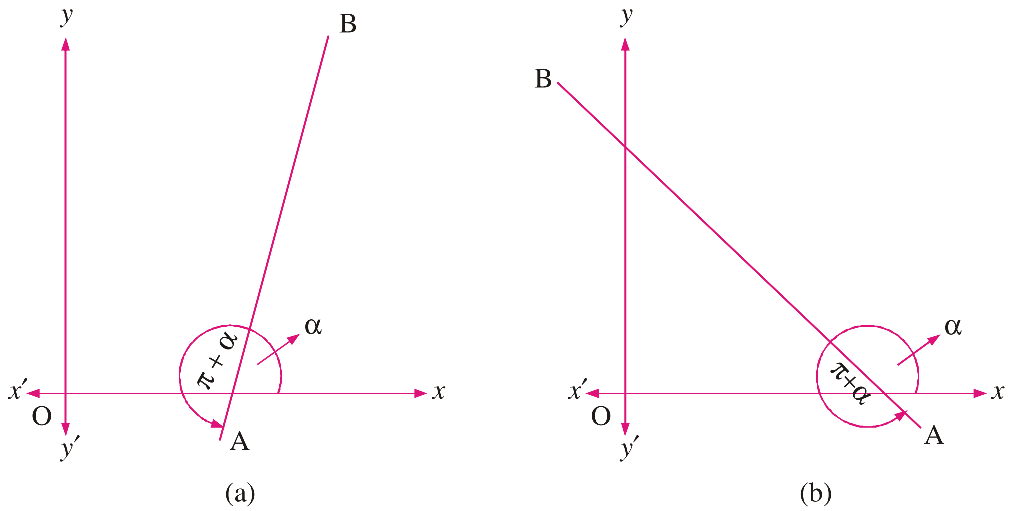
1. दिखाइये कि बिन्दु (–1,–1), (5, 7) और (8, 11) संरेख हैं।
2. दिखाइये कि बिन्दु (3, 1), (5, 3) और (6, 4) संरेख हैं।
3. सिद्ध कीजिये कि बिन्दु $(a, 0)$, $(0, b)$ और (1, 1) संरेख हैं यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.
4. यदि बिन्दु $(a, b), (a_1, b_1)$ तथा $(a-a_1, b-b_1)$ संरेख हों, तो दिखाइये कि $a_1 b = ab_1$
5. k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु (5, 7), $(k, 5)$ और (0, 2) संरेख हैं
6. k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु $(k, 2-2k)$, $(-k+1, 2k)$ और $(-4-k, 6-2k)$ संरेख हैं।

13.6 आनति और रेखा की प्रवणता

चित्र 13.9 देखिए। रेखा AB, x अक्ष के साथ कोण α बनाती है तथा BA कोण $\pi+\alpha$ बनाती है (घड़ी की विपरीत दिशा में मापे जाने पर)

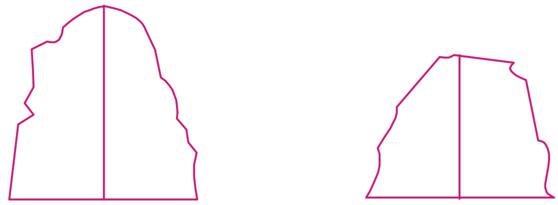
एक दी गई रेखा की आनति (झुकाव) उसके द्वारा धनात्मक अक्ष के साथ बनाए गए कोण से निरूपित की जाती है (घड़ी की विपरात दिशा में मापे जाने पर)

एक विशेष स्थिति में जब रेखा x- अक्ष के समान्तर हो या उसके साथ संपाती हो, तो रेखा की आनति 0^0 परिभाषित की जाती है।



चित्र 13.9

पुनः नीचे दिए गए दो पहाड़ों के चित्र देखिए। यहाँ चित्र 13.10 (a) के पहाड़ की चढ़ाई, चित्र 13.10 (b) के पहाड़ की चढ़ाई से अधिक है।



चित्र 13.10

इसकी ढलान की मात्रा को कैसे मापते हैं? यहाँ हम कह सकते हैं कि पहाड़ (a) की भूमि के साथ आनति पहाड़ (b) की भूमि के साथ आनति से अधिक है।

प्रत्येक दशा में भूतल से शिखर की ऊँचाइयों का अनुपात ज्ञात करने का प्रयास कीजिये।

वास्तव में, आपको पता लगेगा कि स्थिति (a) का अनुपात स्थिति (b) की तुलना में अधिक है। इसका अर्थ है कि हमारा तात्पर्य ऊँचाई और आधार से है और इनका अनुपात कोण के टेन्जैन्ट से सम्बन्धित है। इसलिए गणित में इस अनुपात अर्थात् आनति के टेन्जैन्ट को प्रवणता कहते हैं। हम प्रवणता को एक कोण के टेन्जैन्ट के रूप में परिभाषित करेंगे।

किसी रेखा की प्रवणता उस कोण θ (माना)) का टेन्जैन्ट होता है जो वह रेखा x- अक्ष की धनात्मक दिशा की साथ बनाती है। सामान्यतः इसे संकेत m (= tan θ) से लिखा जाता है।

टिप्पणीः यदि कोई रेखा ***x*–**अक्ष के साथ ***90⁰*** या ***270⁰*** का कोण बनाती है तो उसका ढलान परिभाषित नहीं किया जा सकता।

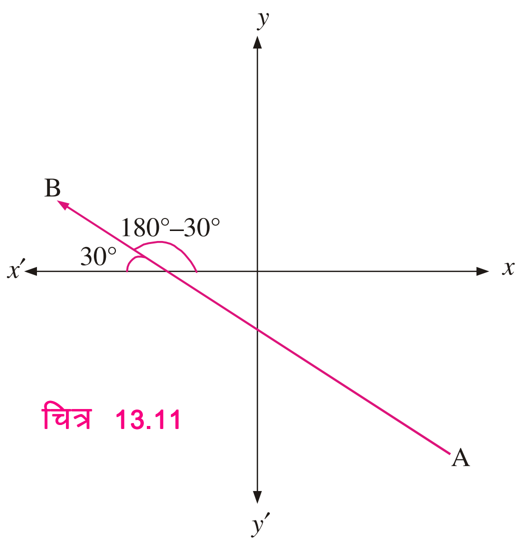
उदाहरण 13.12. चित्र 13.9 में रेखाओं *AB* और *BA* की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा *AB* की प्रवणता = tan α

रेखा *BA* का प्रवणता $= \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$.

टिप्पणीः इस उदाहरण से स्पष्ट है कि किसी रेखा की प्रवणता उसकी दिशा पर निर्भर नहीं करती।

उदाहरण 13.13. एक रेखा *x*- अक्ष की ऋणात्मक दिशा के साथ 30^0 का कोण बनाती है। उसकी प्रवणता ज्ञात कीजिये।



चित्र 13.11

हल :

यहाँ $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$\therefore$ m = रेखा की प्रवणता

$= \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

उदाहरण 13.14. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ 60° का कोण बनाती है।

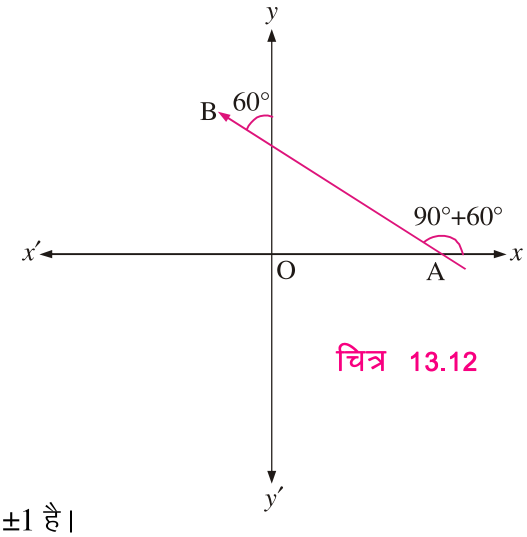
हल :

यहाँ $\theta = 90^\circ + 60^\circ$

$\therefore$ m = रेखा की प्रवणता

$= \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ$

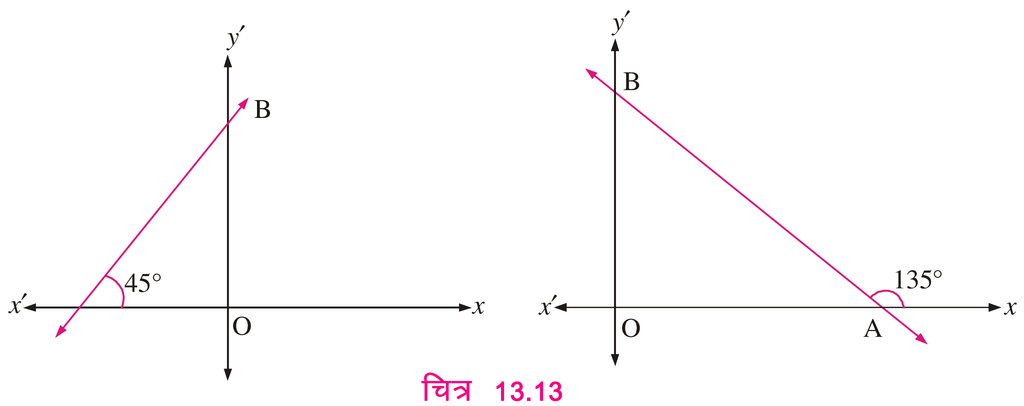
$= -\tan 30^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



चित्र 13.12

उदाहरण 13.15. यदि एक रेखा अक्षों से समान रूप से झुकी हुई है तो दिखाइये कि इसका प्रवणता ±1 है।

हल : माना कि रेखा AB अक्षों से समान रूप से झुकी हुई है और अक्षों पर बिन्दु A तथा B पर मिलती है जैसा चित्र 13.13 में दर्शाया गया है।



चित्र 13.13

चित्र 13.13(a) में, रेखा AB की आनति = $\angle XAB = 45^0$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता = $tan\ 45^\circ = 1$

चित्र 13.13 (b) रेखा AB की आनति = $\angle XAB = 180^0 - 45^0 = 135^0$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता = $tan\ 135^0 = tan\ (180^0 - 45^0) = -\ tan\ 45^0 = -1$

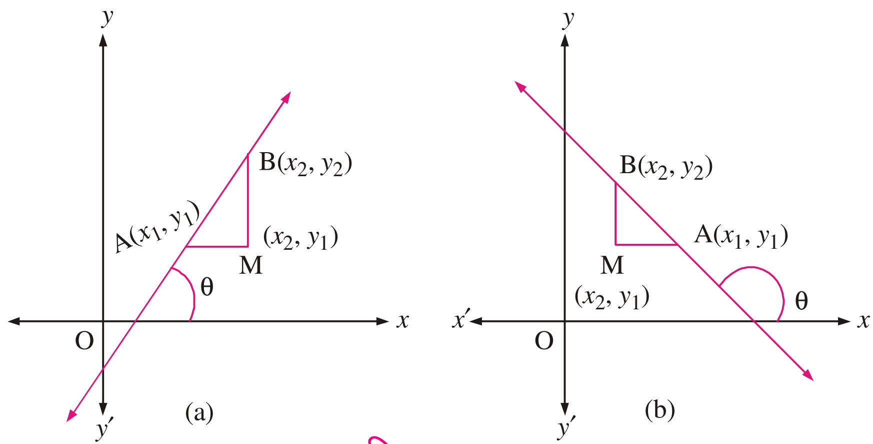
इस प्रकार यदि एक रेखा अक्षों से समान रूप से झुकी होती है तब उस रेखा की प्रवणता ± 1 होगी।

देखें आपने कितना सीखा 13.5

1. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिये जो धनात्मक x- अक्ष के साथ 60^0 (ii) 150^0 का कोण बनाती है।
2. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिये जो धनात्मक x- अक्ष के साथ 30^0 का कोण बनाती है।
3. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिये जो ऋणात्मक x- अक्ष के साथ 60^0 का कोण बनाती है।

13.7 दो भिन्न बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

माना $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ दो भिन्न बिन्दु हैं। A और B से गुज़रती हुई एक रेखा खींचिये और मान लीजिये कि रेखा की आनति θ है। A से होती हुई एक क्षैतिज रेखा तथा B से होती हुई एक ऊर्ध्वाधर रेखा का प्रतिच्छेदन बिन्दु माना M है। तब M के निर्देशांक चित्र 13.14 के अनुसार होंगे।



चित्र 13.14

(A) चित्र 13.14 (a) में आनति कोण MAB न्यूनकोण θ के बराबर है। फलस्वरूप

$$\tan\theta = \tan(\angle MAB) = \frac{MB}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(B) चित्र 13.14 (b) में आनति कोण अधिक कोण θ है और क्योंकि θ और $\angle MAB$ सम्पूरक हैं, फलस्वरूप

$$\tan\theta = -\tan(\angle MAB) = -\frac{MB}{MA} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

अतः दोनों ही स्थितियों में, रेखा जो $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ से गुज़रती है की प्रवणता

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

टिप्पणी: यदि $x_1 = x_2$ हो, तो m परिभाषित नहीं होता। उस अवस्था में रेखा y- अक्ष के समान्तर होती है।

क्या कोई रेखा ऐसी है जिसकी प्रवणता 1 है? हाँ जब कोई रेखा धनात्मक x- अक्ष से 45° पर झुकी होती है। क्या कोई रेखा ऐसी है जिसकी प्रवणता $\sqrt{3}$ है? हाँ जब कोई रेखा धनात्मक x-अक्ष से 60^0 पर झुकी होती है।

इन प्रश्नों के उत्तर से आप देखेंगे कि प्रत्येक वास्तविक संख्या m के लिए एक रेखा होती है जिसकी प्रवणता m होती है। (क्योंकि हम सदैव एक कोण α ढूँढ़ सकते हैं जिसके लिए $\tan\alpha = m$)।

उदाहरण 13.16. बिन्दु $A(6, 3)$ और $B(4, 10)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल : (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

यहाँ $x_1 = 6,\ y_1 = 3;\ x_2 = 4,\ y_2 = 10.$

अब इन मानों को रखने पर, हम प्रवणता प्राप्त करते हैं $= \frac{10-3}{4-6} = -\frac{7}{2}$

उदाहरण 13.17. x का मान ज्ञात कीजिए, जिससे कि (3, 6) और (x, 4) से गुज़रने वाली रेखा की प्रवणता 2 हो।

हलः प्रवणता $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-6}{x-3} = \frac{-2}{x-3}$

$\therefore \frac{-2}{x-3} = 2$ .... (दिया है)

$\therefore\ 2x - 6 = -2$ या $x = 2$

देखें आपने कितना सीखा 13.6

1. बिन्दु $A(6, 8)$ तथा $B(4, 14)$ से गुज़रने वाली रेखा की प्रवणता क्या होगी?
2. x का मान ज्ञात कीजिए जिससे $A(6,12)$ तथा $B(x, 8)$ से गुज़रने वाली रेखा की प्रवणता 4 हो।
3. y का मान ज्ञात कीजिए जिससे बिन्दु $A(-8, 11)$ तथा $B(2, y)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता $-\frac{4}{3}$ हो।
4. त्रिभुज ABC के शीर्ष $A(2, 3)$ $B(0, 4)$ तथा $C(-5, 0)$ हैं। बिन्दु B तथा AC के मध्य बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
5. $A(-2, 7)$, B(1, 0), C(4, 3) तथा D(1, 2) एक चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष हैं। दिखाइये कि

   (i) AB की प्रवणता = CD की प्रवणता (ii) BC की प्रवणता = AD की प्रवणता

13.8 रेखाओं के समान्तरता और लम्बवतता होने का प्रतिबन्ध

13.8.1 समान्तर रेखाओं की प्रवणता

माना l_1, l_2, दो (लम्बवत नहीं) रेखाएँ हैं जिनकी प्रवणता क्रमशः m_1 तथा m_2 है।

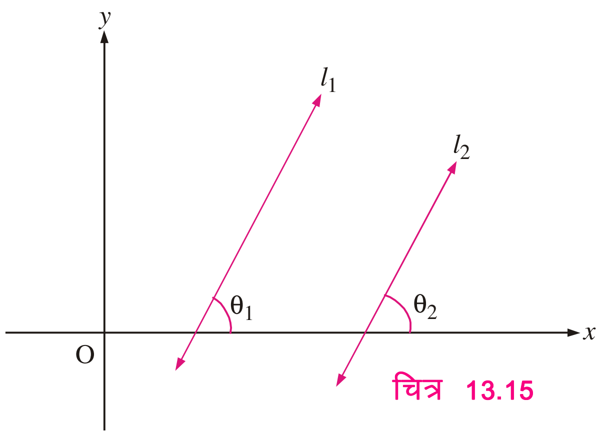
माना θ_1 तथा θ_2 इन रेखाओं की आनति है।

स्थिति I : माना रेखाएँ l_1 तथा l_2 समान्तर हैं,

तब $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\Rightarrow m_1 = m_2$

इस प्रकार, यदि दो रेखाएँ समान्तर होती हैं तो उनकी प्रवणताएँ समान होती हैं।



चित्र 13.15

स्थिति II : माना रेखाओं l_1, तथा l_2 की प्रवणताएँ समान हैं

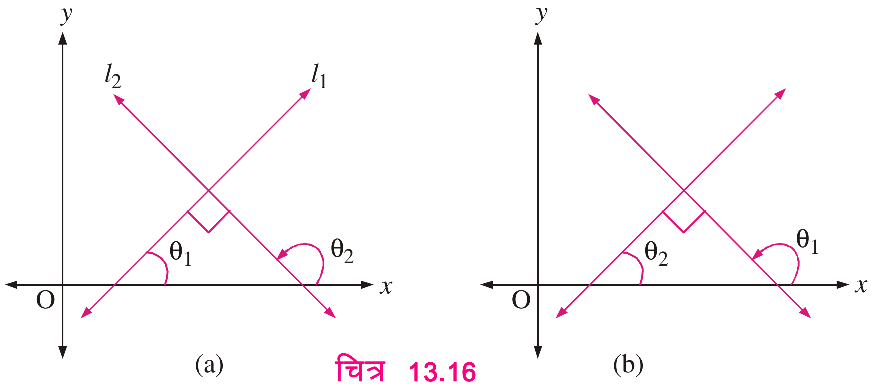
अर्थात् $m_1 = m_2 \Rightarrow \tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \; (0^\circ \le \theta \le 180^\circ) \Rightarrow l_1 \parallel l_2$

अतः दो (लम्बवत नहीं) रेखाएँ समान्तर हैं यदि और केवल यदि $m_1 = m_2$

13.8.2 लम्बवत रेखाओं की प्रवणता

माना l_1 तथा l_2 दो (ऊर्ध्वाधर नहीं) रेखाएँ हैं जिनकी प्रवणता क्रमशः m_1 तथा m_2 है। माना θ_1 तथा θ_2 उनकी आनति हैं।



चित्र 13.16

स्थिति I : माना $l_1 \perp l_2$

$\Rightarrow \theta_2 = 90^0 + \theta_1$ या $\theta_1 = 90^0 + \theta_2$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = \tan(90^0 + \theta_1)$ या $\tan\theta_1 = \tan(90^0 + \theta_2)$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = -\cot(\theta_1)$ या $\tan\theta_1 = -\cot(\theta_2)$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = -\dfrac{1}{\tan\theta_1}$ या $\Rightarrow \tan\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_2}$

$\Rightarrow$ दोनों स्थितियों में, हमें प्राप्त होता है

$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$

या $\quad m_1.m_2 = -1$

इस प्रकार दो रेखाएँ लम्बवत होंगी यदि उनकी प्रवणताओं का गुणनफल –1 है।

स्थिति II : माना दो रेखाएँ l_1 तथा l_2 इस प्रकार हैं कि उनकी प्रवणताओं का गुणनफल –1 है।

अर्थात् $m_1.m_2 = -1 \Rightarrow \tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$

$$\Rightarrow \tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2} = -\cot\theta_2 = \tan\left(90^0 + \theta_2\right)$$

$\Rightarrow$ या तो $\theta_1 = 90^0 + \theta_2$ or $\theta_2 = 90^0 + \theta_1$ $\Rightarrow$ दोनों स्थितियों में $l_1 \perp l_2$.

अतः दो रेखाएँ लम्बवत होंगी यदि और केवल यदि $m_1.m_2 = -1$.

उदाहरण 13.18. दिखाइये कि बिन्दुओं A(5,6) तथा B(2,3) से होकर जानेवाली रेखा बिन्दुओं C(9,–2) तथा D(6,–5) से होकर जानेवाली रेखा के समांतर है।

हल : रेखा AB की प्रवणता $= \frac{3-6}{2-5} = \frac{-3}{-3} = 1$

रेखा CD की प्रवणता $= \frac{-5+2}{6-9} = \frac{-3}{-3} = 1$

क्योंकि प्रवणताएँ बराबर हैं

$\therefore$ AB $\parallel$ CD.

उदाहरण 13.19. दिखाइये कि बिन्दुओं A(2,–5) तथा B(–2,5) से होकर जानेवाली रेखा बिन्दुओं L(6,3) तथा M(1,1) से होकर जानेवाली रेखा पर लम्ब है।

हल : यहाँ m_1 = AB रेखा की प्रवणता $= \frac{5+5}{-2-2} = \frac{10}{-4} = \frac{-5}{2}$

और m_2 = LM रेखा की प्रवणता $= \frac{1-3}{1-6} = \frac{2}{5}$

अब $m_1.m_2 = \frac{-5}{2} \times \frac{2}{5} = -1$

अतः रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब हैं।

उदाहरण 13.20. प्रवणता की अवधारणा का उपयोग करके दिखाइये कि बिन्दु A(4,4), B(3,5)

त ह ा ा

C (–1, –1) समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं?

हल : रेखा AB की प्रवणता $= m_1 = \frac{5-4}{3-4} = -1$

रेखा BC की प्रवणता $= m_2 = \frac{-1-5}{-1-3} = \frac{3}{2}$

और रेखा AC की प्रवणता $= m_3 = \frac{-1-4}{-1-4} = 1$

अब $m_1 \times m_3 = -1$

$\Rightarrow AB \perp AC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

अतः A(4,4), B(3,5) तथा $C(-1,-1)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

उदाहरण 13.21. y का मान क्या होगा जिसके लिए बिन्दुओंA$(3, y)$ और B$(2,7)$ से होकर जानेवाली रेखा बिन्दुओं C $(-1, 4)$ तथा D $(0,6)$ से होकर जानेवाली रेखा के लम्बवत है?

हल : रेखा AB की प्रवणता $= m_1 = \dfrac{7-y}{2-3} = y-7$

रेखा CD की प्रवणता $= m_2 = \dfrac{6-4}{0+1} = 2$

क्योंकि रेखाएँ लम्बवत हैं

$\therefore m_1 \times m_2 = -1$ या $(y-7)\times 2 = -1$ या $2y - 14 = -1$ या $2y = 13$ या $y = \dfrac{13}{2}$

देखें आपने कितना सीखा 13.7

1. दिखाइए कि बिन्दुओं (2,–3) तथा (– 4,1) को मिलाने वाली रेखा

   (i) बिन्दुओं (7,–1) तथा (0,3) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

   (ii) बिन्दुओं (4,5) तथा (0,–2) को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत है!

2. बिन्दुओं (– 4,1) तथा (2,3) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

3. बिन्दुओं (–5,7) तथा (0,–2) को मिलाने वाली रेखा बिन्दुओं (1,3) तथा (4, x). को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है, x ज्ञात कीजिए।

4. A(–2,7), B(1,0), C(4,3) तथा D(1,2) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं। दिखाइये कि ABCD की भुजाएँ समान्तर हैं।

5. रेखा की प्रवणता की अवधारणा का उपयोग करके, दिखाइये कि बिन्दु A(6, – 1), B(5,0) तथा C(2,3) संरेख हैं। [संकेत : AB, BC तथा CA की प्रवणताएँ बराबर होना चाहिएँ]

6. k का मान ज्ञात कीजिए जिससे कि बिन्दुओं (k, 9) तथा (2,7) को मिलाने वाली रेखा बिन्दुओं (2,–2) तथा (6,4) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर हैं।

7. रेखा की प्रवणता की अवधारणा का उपयोग करके दिखाइये कि बिन्दुओं (– 4,–1), (–2,– 4), (4,0) तथा (2,3) को दिए हुए क्रम में लेने पर यह एक आयत के शीर्ष हैं।

8. त्रिभुज ABC के शीर्ष A(–3,3), B(–1,– 4) तथा C(5,–2). हैं। M तथा N, AB और AC के मध्यबिन्दु हैं। दिखाइये कि MN $\parallel$ BC और MN $= \dfrac{1}{2}$ BC.

13.9 एक रेखा द्वारा अक्षों पर बने अन्तःखण्ड

यदि एक रेखा (मूलबिन्दु से होकर नहीं जाती) x-अक्ष को बिन्दु A पर तथा y-अक्ष को बिन्दु B पर मिलती है, जैसा चित्र 13.17 में दर्शाया गया है। तब

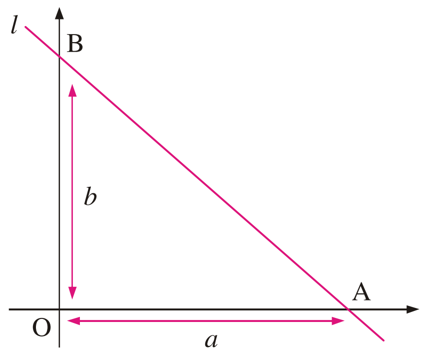
(i) OA, x-अन्तःखण्ड कहलाता है या x-अक्ष पर रेखा द्वारा काटा गया अन्तःखण्ड।

(ii) OB, y-अन्तःखण्ड कहलाता है या y-अक्ष पर रेखा द्वारा काटा गया अन्तःखण्ड।

(iii) इस क्रम में OA तथा OB साथ–साथ लेने पर रेखा l द्वारा अक्षों पर बने अन्तःखण्ड कहलाते हैं।

(iv) अक्षों के मध्य रेखा पर कटे अंतःखण्ड को रेखा AB का भाग कहते हैं।

(v) बिन्दु A के निर्देशांक $(a,0)$ तथा बिन्दु B के $(0,b)$ हैं।



चित्र 13.17

एक दिए गए तल में x-अक्ष पर रेखा द्वारा कटे अन्तः खण्ड को ज्ञात करने के लिए हम रेखा के दिये गये समीकरण में $y = 0$ रखते हैं। इस प्रकार प्राप्त x के मान को x अन्तः खण्ड कहते हैं। y-अक्ष पर रेखा का अन्तः खण्ड प्राप्त करने के लिए हम $x = 0$ रखते हैं और इस प्रकार प्राप्त y के मान को y अन्तः खण्ड कहते हैं।

टिप्पणीः 1. एक रेखा जो मूलबिन्दु से होकर जाती है अक्षों पर कोई अंतः खण्ड नहीं बनाती।

2. क्षैतिज रेखा का $\boldsymbol{x}$ अन्तः खण्ड तथा ऊध्वधिर रेखा का $\boldsymbol{y}$ अन्तः खण्ड नहीं होता।

3. सामान्यतया $\boldsymbol{x}$- अक्ष तथा $\boldsymbol{y}$-अक्ष पर कटे अन्तः खण्डों को क्रमशः $\boldsymbol{a}$ तथा $\boldsymbol{b}$ से दर्शाते हैं। परन्तु यदि केवल $\boldsymbol{y}$-अन्तः खण्ड पर विचार करना हो तो इसे $\boldsymbol{c}$ से दर्शाते हैं।

उदाहरण 13.22. एक रेखा का समीकरण $2x+3y=6$ है। इसके x तथा y अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिये।

हल : दी गई रेखा का समीकरण है : $2x+3y=6$ ... (i)

(i) में $x = 0$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है $y = 2$ इस प्रकार y-अन्तः खण्ड 2 है।

पुनः $y = 0$ समीकरण (i) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है $2x = 6 \Rightarrow x = 3$ इस प्रकार x-अन्तः खण्ड 3 है।

देखें आपने कितना सीखा 13.8

1. यदि रेखाओं के समीकरण निम्न हों, तो x तथा y अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिये :

(i) $x+3y=6$ (ii) $7x+3y=2$ (iii) $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$ (iv) $ax+by=c$

(v) $\frac{y}{2}-2x=8$ (vi) $\frac{y}{3}-\frac{2x}{3}=7$

13.10 दो रेखाओं के बीच का कोण

माना l_1 तथा l_2 ऐसी दो रेखाऐं हैं जो ऊर्ध्वाधर अथवा लम्बवत नहीं हैं तथा जिनकी प्रवणताएँ क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं। मान लीजिए l_1 तथा l_2 द्वारा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बने कोण क्रमशः α_1 तथा α_2 हैं। तब $m_1 = \tan\alpha_1$ तथा $m_2 = \tan\alpha_2$

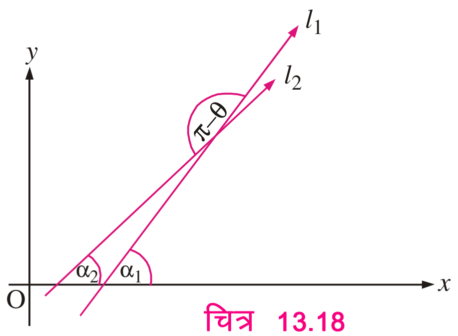
चित्र से, हमें प्राप्त होता है $\alpha_1 = \alpha_2 + \theta$

$\therefore \quad \theta = \alpha_1 - \alpha_2$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \tan(\alpha_1 - \alpha_2)$

अर्थात् $\quad \tan\theta = \dfrac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1 . \tan\alpha_2}$

अर्थात् $\quad \tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2} \quad ...(1)$



चित्र 13.18

जैसा कि चित्र से स्पष्ट है कि रेखाओं l_1 तथा l_2 के बीच दो कोण θ तथा $\pi - \theta$ हैं।
हम जानते हैं $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\therefore \quad \tan(\pi - \theta) = -\left(\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right)$

माना $\quad \pi - \theta = \phi$

$\therefore \quad \tan\phi = -\left(\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right) \quad ...(2)$

- यदि $\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}$ धनात्मक है तब $\tan\theta$ धनात्मक हैं तथा $\tan\phi$ ऋणात्मक है अर्थात् θ न्यूनकोण है तथा ϕ अधिक कोण है।

- यदि $\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}$ ऋणात्मक है तब $\tan\theta$ ऋणात्मक है तथा $\tan\phi$ धनात्मक है अर्थात् θ अधिककोण तथा ϕ न्यूनकोण है।

रेखाओं l_1 तथा l_2 जिनकी प्रवणताएँ क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं के बीच न्यूनकोण (θ कह सकते हैं) इस प्रकार दिया जाता है

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right| \quad \text{जहाँ} \quad 1 + m_1 m_2 \neq 0.$$

अधिककोण (ϕ कह सकते हैं) सूत्र $\phi = 180° - \theta$ उपयोग द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 13.23. उन रेखाओं के बीच न्यूनकोण तथा अधिककोण ज्ञात कीजिए जिनकी प्रवणताएँ $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{-1}{7}$ हैं।

हल : मान लीजिए रेखाओं के बीच क्रमशः θ तथा ϕ न्यूनकोण तथा अधिक कोण हैं।

$$\therefore \qquad \tan\theta = \left|\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-1}{7}\right)}\right| = \left|\frac{21+4}{28-3}\right| = |1| = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = 45°$$

$$\therefore \qquad \phi = 180° - 45° = 135°.$$

उदाहरण 13.24. x-अक्ष तथा बिन्दुओं (3, –1) और (4, –2) को मिलाने वाली रेखा के बीच कोण (न्यूनकोण या अधिककोण) ज्ञात कीजिए।

हल : x-अक्ष की प्रवणता (m_1 कह सकते हैं) = 0

दी गई रेखा की प्रवणता (m_2 कह सकते हैं) = $\frac{-2+1}{4-3} = -1$

$$\therefore \qquad \tan\theta = \left|\frac{0+1}{1+(0)(-1)}\right| = 1$$

$\Rightarrow \qquad \theta = 45°$ न्यूनकोण है।

उदाहरण 13.25. यदि दो रेखाओं के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ है तथा एक रेखा की प्रवणता $\frac{1}{2}$ है तो दूसरी रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{\frac{1}{2}-m_2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)(m_2)}\right|$

$$\Rightarrow \qquad \left|\frac{1-2m_2}{2+m_2}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1-2m_2}{2+m_2} = 1 \text{ or } \frac{1-2m_2}{2+m_2} = -1.$$

$$\Rightarrow \qquad m_2 = -\frac{1}{3} \text{ or } m_2 = 3.$$

$\therefore$ दूसरी रेखा की प्रवणता 3 या $-\frac{1}{3}$.

देखें आपने कितना सीखा 13.9

1. उन रेखाओं के बीच न्यूनकोण ज्ञात कीजिए जिनकी प्रवणताएँ 5 तथा $\frac{2}{3}$ हैं।

2. उन रेखाओं के बीच का अधिककोण ज्ञात कीजिए जिनकी प्रवणताएँ 2 तथा –3 हैं।

3. रेखाओं l_1 तथा l_2 के बीच का न्यूनकोण ज्ञात कीजिए जहाँ l_1 बिन्दुओं (0, 0) और (2, 3) के मिलने से बनती है तथा l_2 बिन्दुओं (2, –2) और (3, 5) के मिलने से बनती है।

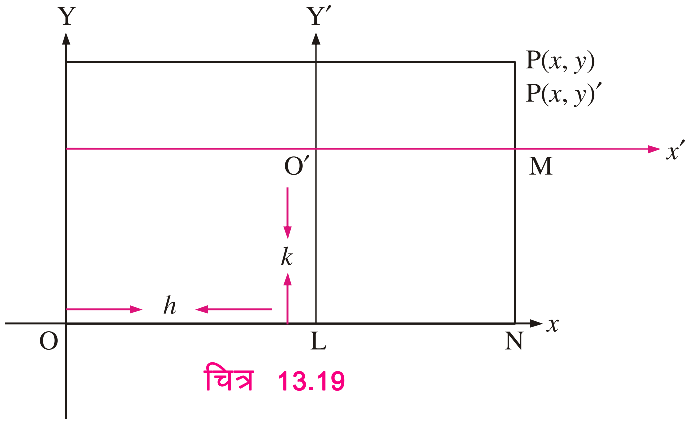
13.11 मूलबिन्दु का स्थानान्तरण

x-अक्ष तथा y-अक्ष को आलेखितकर प्रत्येक समतल को चार भागों में बाँटा/ विभाजित किया जाता है तथा समतल में स्थित प्रत्येक बिंदु एक वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म द्वारा निरूपित किया जाता हैं जो अक्षों से उस बिन्दु की लम्बवत दूरियाँ दर्शाता हैं। हम यह भी जानते हैं कि यह अक्ष स्वेच्छा से लिए जा सकते हैं, अतः समतल में स्थित इन अक्षों की स्थिति निश्चित नहीं है। अक्षों की स्थिति परिवर्तित हो सकती। जब हम अक्षों की स्थिति बदलते हैं तो प्रत्येक बिन्दु के संगत निर्देशांक भी बदल जाते हैं। फलस्वरूप वक्र की समीकरण भी बदल जाती है।

निम्नलिखित विधियों द्वारा अक्षों को बदल/परिवर्तित कर सकते हैं।

(i) अक्षों का स्थानान्तरण (ii) अक्षों का घूर्णन/परिक्रमण (iii) अक्षों का स्थानान्तरण और परिक्रमण

इस भाग में हम केवल अक्षों के स्थानान्तरण अर्थात् निर्देशांकों में परिवर्तन पर चर्चा करेंगे।



चित्र 13.19

एक दिए गए समतल के मूलबिन्दु का स्थानान्तरण करके निर्देशांकों में परिवर्तन प्राप्त करना जिसमें निर्देशांक अक्षों की दिशा न बदले, को अक्षों का स्थानान्तरण कहते हैं।

आइए देखें कि समतल में स्थित एक बिन्दु के निर्देशांक, अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा कैसे परिवर्तित होते हैं। मान लीजिए $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ दिए गए अक्ष हैं। माना मूलबिन्दु O अक्षों $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ के स्थानान्तरण द्वारा $O'(h, k)$ पर स्थानान्तरित हो जाता है। मान लीजिए $\overrightarrow{O'X'}$ तथा $\overrightarrow{O'Y'}$ नये अक्ष हैं जैसा कि उपरोक्त चित्र में दर्शाया गया है। तब $\overrightarrow{O'X'}$ तथा $\overrightarrow{O'Y'}$ के संदर्भ में बिन्दु O' के निर्देशांक (0, 0) हैं।

मान लीजिए निकाय $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ में P के निर्देशांक (x, y) तथा $\overrightarrow{O'X'}$ तथा $\overrightarrow{O'Y'}$ में P के निर्देशांक (x', y') हैं तब $O'L = k$ तथा $OL = h$ है।

अब
$$\begin{aligned} x &= ON = OL + LN \\ &= OL + O'M \\ &= h + x'. \end{aligned}$$

तथा $y = PN = PM + MN = PM + O'L = y' + k.$

अतः $x = x' + h;\ y = y' + k$

या $x' = x - h,\ y' = y - k$

- यदि अक्षों के रूपान्तरण द्वारा मूलबिन्दु को (h, k) पर स्थानान्तरित किया जाता है तब बिन्दु $P(x, y)$ के निर्देशांक $P(x - h, y - k)$ में परिवर्तित हो जाते हैं तथा वक्र $F(x, y) = 0$ का समीकरण $F(x' + h, y' + k) = 0$ में परिवर्तित हो जाता है।
- स्थानान्तरण सूत्र हमेशा सत्य होता है तथा इस पर निर्भर नहीं करता कि नए निकाय का मूलबिंदु किस चतुर्थांश में है।

उदाहरण 13.26. जब मूलबिन्दु को अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा बिन्दु $(-3, 2)$ पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है, तब नये अक्ष के सापेक्ष बिन्दु $(1, 2)$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $(h, k) = (-3, 2)$, $(x , y) = (1, 2)$, $(x', y') = ?$

$x' = x - h = 1 + 3 = 4$

$y' = y - k = 2 - 2 = 0$

अतः $(x', y') = (4, 0)$

उदाहरण 13.27. जब मूल बिन्दु को अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा बिन्दु $(3, 4)$ पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है तब रेखा $3x + 2y - 5 = 0$ की परिवर्तित समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $(h, k) = (3, 4)$

$\therefore \quad x = x' + 3$ तथा $y = y' + 4$.

x तथा y के इन मानों को रेखा की समीकरण में रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$3(x' + 3) + 2(y' + 4) - 5 = 0$$

अर्थात् $3x' + 2y' + 12 = 0$.

देखें आपने कितना सीखा 13.10

1. (i) अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा, क्या रेखाखण्ड की लम्बाई परिवर्तित होती है? हाँ या नहीं में उत्तर दीजिए।

   (ii) अक्षों के स्थानान्तरण के सापेक्ष क्या अचर बिन्दु होते हैं? हाँ या नहीं में उत्तर दीजिए।

   (iii) जब मूलबिन्दु को अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा बिन्दु $(4, -5)$ पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है, तो बिन्दु $(0, 3)$ के निर्देशांक हैं....

   (iv) जब मूल बिन्दु को $(2, 3)$, पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है, तब P के निर्देशांक बदलकर/परिवर्तित होकर, $(4, 5)$ हो जाते हैं। मूल निकाय में बिन्दु P के निर्देशांक हैं....

   (v) अक्षों के स्थानान्तरण से यदि बिन्दु $(3, 0)$, बिंदु $(2, -3)$ में परिवर्तित हो जाता है, तब मूलबिन्दु, बिन्दु.... पर स्थानान्तरित हो जाता है।

आइये दोहराएँ

- बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के बीच की दूरी $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ है।

- बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

  $$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

- बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में बाहय विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

  $$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$$ हैं।

- (x_1,y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

  $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$ हैं।

- शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

  $$\frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]$$

- तीन बिन्दु A, B, और C संरेख होते हैं यदि उनके द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य हो।
- यदि किसी रेखा का x- अक्ष से ऊपर का भाग धनात्मक x-अक्ष के साथ θ कोण बनाए तो रेखा की प्रवणता $m = \tan\theta$ होती है।
- $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- एक रेखा जिसकी प्रवणता m_1 है, रेखा जिसकी प्रवणता m_2 है, के समान्तर होगी यदि

  $m_1 = m_2$

- एक रेखा जिसकी प्रवणता m_1 है, दूसरी रेखा जिसकी प्रवणता m_2 है, के लम्बवत होगी यदि

  $m_1 \times m_2 = -1.$

- एक रेखा l (मूल बिन्दु से होकर नहीं जाती) x- अक्ष को A पर तथा y- अक्ष को B पर मिलती है, तब OA को x-अन्तः खण्ड तथा OB को y- अन्तः खण्ड कहते हैं।
- यदि दो रेखाओं की प्रवणताएं क्रमशः m_1 और m_2 हैं, तो उनके बीच का कोण θ, निम्न प्रकार ज्ञात किया जाता है। $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$ जहां $m_1m_2 \neq 0$

  यदि $\tan\theta$ का मान ऋणात्मक है तो रेखाओं के बीच का कोण अधिककोण है और यदि $\tan\theta$ धनात्मक हो तो कोण अधिककोण हो।

- जब मूल बिन्दु को (h, k) पर स्थानातरित किया जाता है तो बिन्दु $P(x, y)$ के परिवर्तित निर्देशांक (मान लीजिए (x', y')) $(x - h, y - k)$ हैं।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=4qMOPFtQ4iQ*
- *https://www.youtube.com/watch?v=iCX3d6aQPKw*

आइए अभ्यास करें

1. बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए :

   (a) (2, 0) और (1, cot θ) (b) (–sin A, cosA) और (sin B, cos B)

2. नीचे दिए गए बिन्दुओं के समूहों में से कौन–कौन से त्रिभुज बनाते हैं?

   (a) (3, 2), (–3, 2) और (0, 3) (b) (3, 2), (3, –2) और (3, 0)

3. बिन्दुओं (3. –5) और (–6, 8) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

4. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक हैं :

   (a) (1, 2), (–2, 3), (–3, –4) (b)(c, a), (c + a, a), (c – a, –a)

5. दिखाइये कि निम्नलिखित बिन्दुओं के समूह संरेख हैं (यह दिखाकर कि त्रिभुज का क्षेत्रफल जो बिन्दुओं से बनता है शून्य है :

   (a) (–2, 5), (2, –3) और (0, 1) (b) (a, b + c), (b, c + a) और (c, a + b)

6. यदि (–3, 12), (7, 6) और (x, a) संरेख हों, तो x ज्ञात कीजिए।

7. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (4,3) (–5,6) (0,7) और (3,–6) हैं।

8. निम्न बिन्दुओं से होकर जानेवाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए :

   (a) (1,2), (4,2) (b) (4, – 6), (–2, –5)

9. y का मान क्या होगा जिससे, (3, y) तथा (2,7) से होकर जाने वाली रेखा (–1, 4) और (0, 6) से होकर जाने वाली रेखा के समान्तर हो।

10. पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग किए बिना दिखाइये कि बिन्दु (4, 4), (3, 5) और (–1, –1) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

11. प्रवणता की अवधारणा का उपयोग करके बताइये कि निम्नलिखित बिन्दुओं का कौन सा समूह संरेख है : (i) (–2, 3) , (8, –5) और (5, 4) (ii) (5, 1) , (1, – 1) और (11, 4),

12. यदि A (2, –3) और B (3, 5) आयत ABCD के दो शीर्ष हैं, प्रवणता ज्ञात कीजिए :

    (i) BC की (ii) CD की (iii) DA की

13. एक चतुर्भुज के शीर्ष बिन्दु (7, 3), (3, 0), (0, – 4) और (4, –1) हैं। प्रवणता का उपयोग करके दिखाइये कि चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से बना चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है।

14. निम्नलिखित रेखाओं के x- अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिए :

    (*i*) $2x-3y=8$ (*ii*) $3x-7y+9=0$ (*iii*) $x-\frac{y}{2}=3$

15. जब अक्षों के स्थानान्तरण से मूलबिन्दु को बिन्दु (3, 4) पर स्थानान्त्रित किया जाता है, तो $2x^2+4xy+5y^2=0$ की परिवर्तित समीकरण ज्ञात कीजिए।

16. यदि मूलबिन्दु को बिन्दु (3, –4), पर स्थानान्तरित किया जाता है, तब वक्र की परिवर्तित समीकरण $(x')^2+(y')^2=4$ है, तो वक्र की मूल समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. यदि A(–2, 3), B(3, 8) तथा C(4, 1) ΔABC के शीर्ष हैं, $\angle$ABC ज्ञात कीजिए।

18. बिन्दुओं A(9, 2), B(17, 11), C(5, – 3) तथा D(–3, –2) द्वारा बने चतुर्भुज ABCD के विकर्णों के बीच बने न्यूनकोण को ज्ञात कीजिए।

19. रेखाओं AB तथा BC के बीच का न्यूनकोण ज्ञात कीजिए, दिया है कि A (5, –3), B (–3, –2) तथा C (9, 12)।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 13.1

(a) $\sqrt{58}$ (b) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

देखें आपने कितना सीखा 13.2

1. (a) $\left(\frac{1}{2},4\right)$ (b) (2,5) 2. (1,4)

3. (a) (2,6) 4. $\left(3,\frac{5}{3}\right),\left(4,\frac{1}{3}\right)$

देखें आपने कितना सीखा 13.3

1. (a) $\frac{25}{2}$ वर्ग इकाई (b) 12 वर्ग इकाई (c) $\frac{a^2}{2}$ वर्ग इकाई

2. $k=\frac{5}{3}$ 3. 80 वर्ग इकाई 4. $\frac{41}{2}$ वर्ग इकाई

देखें आपने कितना सीखा 13.4

5. $k = 3$ 6. $k=\frac{1}{2},-1$

देखें आपने कितना सीखा 13.5

1. (*i*) $\sqrt{3}$ (*ii*) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $-\sqrt{3}$ 3. $-\sqrt{3}$

देखें आपने कितना सीखा 13.6

1. -3 2. 5 3. $-\frac{7}{3}$ 4. $\frac{5}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 13.7

2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{14}{3}$ 6. $k = \frac{10}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 13.8

1. (*i*) x-अन्तः खण्ड = 6 (*ii*) x-अन्तः खण्ड = $\frac{2}{7}$ (*iii*) x-अन्तः खण्ड = $2a$

y-अन्तः खण्ड = 2 y-अन्तः खण्ड = $\frac{2}{3}$ y-अन्तः खण्ड = $2b$

(*iv*) x-अन्तः खण्ड = $\frac{c}{a}$ (*v*) x-अन्तः खण्ड = -4 (*vi*) x-अन्तः खण्ड = $\frac{-21}{2}$

y-अन्तः खण्ड = $\frac{c}{b}$ y-अन्तः खण्ड = 16 y-अन्तः खण्ड = 21

देखें आपने कितना सीखा 13.9

1. 45° 2. 135° 3. $\tan\theta = \frac{11}{23}$

देखें आपने कितना सीखा 13.10

1. (i) नहीं (ii) हां (i) (–4, 8), (iv) (6, 8) (v) (1, 3)

आइए अभ्यास करें

1. (a) cosec θ (b) $2 \sin \frac{A+B}{2}$
2. दिया गया कोई समूह त्रिभुज नहीं बनाता
3. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 4. (a) 11 वर्ग इकाई (b) a^2 वर्ग इकाई
6. $\frac{51-5a}{3}$ 7. 29 वर्ग इकाई 8. (*a*) 0 (b) $-\frac{1}{6}$
9. $y = 3$ 11. केवल (*ii*) 12. (*i*) $-\frac{1}{8}$ (*ii*) 8 (*iii*) $-\frac{1}{8}$
14. (*i*) 4 (*ii*) -3 (*iii*) 3
15. $x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$ 16. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$
17. $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ 18. $\tan^{-1}\left(\frac{48}{145}\right)$ 19. $\tan^{-1}\left(\frac{62}{55}\right)$