20

आव्यूह

311hi20

19वीं शताब्दी के मध्य में एक ब्रिटिश गणितज्ञ ऑर्थर कैले (1821–1895) ने गणित को एक नई विधा, जिसे आव्यूह (Matrices) कहा गया, को जन्म दिया। उसने युगपत समीकरणों के निकायों को निरुपित करने में आव्यूह का उपयोग किया। आज आव्यूह के सिद्धान्त गणित का एक महत्त्वपूर्ण अंग बन चुके हैं। खेल–सिद्धान्त, व्यय निर्धारण, उपोत्पादन के बजट बनाने, आदि में आव्यूह उपयोग में लाए जाते हैं। अर्थशास्त्री उनका उपयोग सामाजिक लेखा विधि, निवेश–उत्पादन सारणियों तथा अन्तर्उद्योग अर्थशास्त्र के अध्ययन में करते हैं। युगपत समीकरण निकायों के हल करने में आव्यूह विस्तृत रूप से उपयोग में लाये जाते हैं। रैखिक प्रोग्रामन का आधार आव्यूह बीजगणित में ही है। आव्यूह के अनुप्रयोग केवल गणित में ही नहीं, बल्कि अन्य विषयों जैसे भौतिक शास्त्र, रसायन शास्त्र, इन्जीनियरिंग, रैखिक प्रोग्रामन, आदि में भी भरपूर मिलते हैं।

इस पाठ में हम आव्यूह के विभिन्न प्रकारों तथा आव्यूह पर बीजीय संक्रियाओं के विषय में विस्तार से चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगेः

- आव्यूह को परिभाषित करना, उसका क्रम बताना तथा उदाहरण देना
- विभिन्न प्रकार के आव्यूह–जैसे वर्ग आव्यूह, आयताकार, इकाई, शून्य, विकर्ण, पंक्ति, स्तंभ को परिभाषित करना तथा उनके उदाहरण देना
- दो आव्यूहों के समान होने का प्रतिबन्ध बताना
- एक आव्यूह का परिवर्त परिभाषित करना
- सममित तथा विषम सममित आव्यूहों को परिभाषित करना तथा उदाहरण देना
- एक ही क्रम वाले दो आव्यूहों के योग तथा अन्तर ज्ञात करना
- एक आव्यूह को अदिश से गुणा करना
- दो आव्यूहों के गुणन के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध बताना
- जहां संभव हो, दो आव्यूहों को गुणा करना
- प्रारंभिक संक्रियाओं का प्रयोग करना
- प्रारंभिक संक्रियाओं का प्रयोग कर आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- संख्या निकाय का ज्ञान
- रैखिक समीकरणों के निकाय का हल

20.1 आव्यूह तथा उनका निरूपण

मान लीजिए कि हम यह अभिव्यक्त करना चाहते हैं कि अनिल के पास 6 पेंसिल हैं। हम इसे [6] या (6) लिखकर, इस समझ के साथ कि [ ] अथवा ( ) के अन्दर लिखी हुई संख्या अनिल के पास होने वाली पेंसिलों की संख्या को दर्शाती है, अभिव्यक्त कर सकते हैं। अगली बार मान लीजिए कि हम यह अभिव्यक्त करना चाहते हैं कि अनिल के पास 2 पुस्तक तथा 5 पेंसिल हैं। हम इसे [2, 5] लिखकर, इस समझ के साथ कि [ ] के अन्दर प्रथम प्रविष्टि अनिल के पास पुस्तकों की संख्या को दर्शाती है, जबकि दूसरी प्रविष्टि पेंसिलों की संख्या बताती हैं, प्रकट कर सकते हैं।

आइए, अब, दो मित्रों श्याम तथा इरफान की स्थिति पर विचार करें। श्याम के पास 2 पुस्तकें, 4 कापियां तथा 2 पैन हैं; तथा इरफान के पास 3 पुस्तकें, 5 कापियां तथा 3 पैन हैं।

इस जानकारी को प्रस्तुत करने का एक सुविधाजनक ढंग इसे नीचे दी गयी सारणी के रूप में लिखना है।

	पुस्तक	कापियां	पैन
श्याम	2	4	2
इरफान	3	5	3

इसे हम संक्षेप में नीचे दी गयी विधि से लिख सकते हैं:

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \text{प्रथम स्तंभ} & \text{द्वितीय स्तंभ} & \text{तृतीय स्तंभ} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{प्रथम पंक्ति} \\ \text{द्वितीय पंक्ति} \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

उपरोक्त निरूपण निम्नलिखित जानकारी प्रदान करता है:

(1) प्रथम तथा द्वितीय पंक्तियों में प्रविष्टियां क्रमशः श्याम तथा इरफान के पास वस्तुओं की संख्या (पुस्तक, कापियाँ, पैन) दर्शाती है।

(2) प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय स्तंभों में प्रविष्टियां क्रमशः पुस्तकों, कापियों तथा पैनों की संख्या दर्शाती हैं।

इस प्रकार, प्रथम पंक्ति तथा तृतीय स्तंभ में प्रविष्टि श्याम के पास पैनों की संख्या को दर्शाती है। उपर्युक्त प्रदर्शन में प्रत्येक प्रविष्टि की इसी ढंग से व्याख्या की जा सकती है।

उपर्युक्त जानकारी को इस प्रकार भी निरूपित किया जा सकता है:

	श्याम	इरफान
पुस्तक	2	3
कापियां	4	5
पैन	2	3

इस को तीन पंक्तियों तथा दो स्तंभों में निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ऊपर दिखायी गयी व्यवस्था को आव्यूह कहा जाता है। प्रायः आव्यूह को हम अंग्रेजी वर्णमाला के एक बड़े अक्षर यथा A, B, X आदि से निर्दिष्ट करते हैं। इस प्रकार ऊपर दी गयी जानकारी को एक आव्यूह के रूप में निरूपित करने के लिए हम लिखते हैं:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{अथवा} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

टिप्पणी: आव्यूह का वहुवचन भी आव्यूह है।

20.1.1 आव्यूह की कोटि (क्रम)

निम्नलिखित आव्यूहों (संख्याओं की व्यवस्था) को ध्यानपूर्वक देखिए।

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

आव्यूह (a) में दो पंक्तियां तथा दो स्तंभ हैं। इसे $2-2$ आव्यूह अथवा 2×2 कोटि वाला आव्यूह कहा जाता है। इसे 2×2 आव्यूह लिखा जाता है। आव्यूह (b) में तीन पंक्तियां तथा दो स्तंभ हैं। यह एक $3-2$ आव्यूह अथवा 3×2 कोटि वाला आव्यूह है। इसे 3×2 आव्यूह लिखा जाता है। आव्यूह (c) 3×4 कोटि वाला आव्यूह है।

ध्यान दीजिए कि एक आव्यूह में कितनी भी पंक्तियां तथा कितने भी स्तंभ हो सकते हैं। यदि आव्यूह A में m पंकितयां तथा n स्तंभ हैं, तो इस की कोटि $m \times n$ होगी तथा इसे $m \times n$ आव्यूह पढ़ा जायेगा।

दो प्रव्ययों (अनुलग्नों) i तथा j का उपयोग एक आव्यूह के किसी विशेष अवयव का अवलोकन करने में सहायक होता है। उपर्युक्त $m \times n$ आव्यूह में अवथव a_{ij}, i वीं पंक्ति तथा j वे स्तंभ में आता है।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots a_{2j} & \cdots a_{2n} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \cdots a_{3j} & \cdots a_{3n} \\ a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3} \cdots\ a_{ij} & \cdots a_{in} \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3} \cdots a_{mj} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ क्रम वाले एक आव्यूह को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है:

$$A = [a_{ij}],\ i = 1, 2, ..., m;\ \text{तथा}\ j = 1, 2, ..., n$$

उदाहरण 20.1. निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक की कोटि लिखिए:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

हल: आव्यूह

(i) की कोटि 2×2 है।

(ii) की कोटि 3×1 है।

(iii) की कोटि 1×3 है।

(iv) की कोटि 2×3 है।

उदाहरण 20.2. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ के लिए

(i) A की कोटि ज्ञात कीजिए।

(ii) A के कुल अवयवों की संख्या लिखिए।

(iii) A के अवयव a_{23}, a_{32}, a_{14} तथा a_{34} लिखिए।

(iv) A में प्रत्येक अवयव '3' को a_{ij}. के रूप में लिखिए।

हल: (i) क्योंकि A में 3 पंक्तियां तथा 4 स्तंभ हैं, इस लिए A की कोटि 3×4 है।

(ii) A में कुल अवयवों की संख्या $= 3 \times 4 = 12$

(iii) $a_{23} = 2;\ a_{32} = 2;\ a_{14} = 4$ तथा $a_{34} = 6$

(iv) a_{22}, a_{31} तथा a_{33}

उदाहरण 20.3. यदि एक 2×3 आव्यूह A की i वीं पंक्ति तथा j वें स्तंभ का अवयव $\dfrac{i+2j}{2}$ हो, तो आव्यूह A लिखिए।

हल: यहां $a_{ij} = \dfrac{i+2j}{2}$ (दिया है)

$$a_{11} = \frac{1+2\times1}{2} = \frac{3}{2};\quad a_{12} = \frac{1+2\times2}{2} = \frac{5}{2};\quad a_{13} = \frac{1+2\times3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$a_{21} = \frac{2+2\times1}{2} = 2;\quad a_{22} = \frac{2+2\times2}{2} = 3;\quad a_{23} = \frac{2+2\times3}{2} = 4$$

इस प्रकार, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

उदाहरण 20.4. दो स्टोर A तथा B हैं। स्टोर A में 120 कमीजें, 100 पैंटें तथा 50 कार्डिगन हैं; तथा स्टोर B में 200 कमीजें, 150 पैंटें तथा 100 कार्डिगन हैं। इस जानकारी को दो भिन्न तरीकों से सारणी रूप में तथा आव्यूह रूप में भी व्यक्त कीजिए।

हलः **सारणी रूप 1** **आव्यूह रूप**

	कमीजें	पैंटें	कार्डिगन
स्टोर A	120	100	50
स्टोर B	200	150	100

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 120 & 100 & 50 \\ 200 & 150 & 100 \end{bmatrix}$$

सारणी रूप 2 **आव्यूह रूप**

	स्टोर A	**स्टोर B**
कमीजें	120	200
पैंटें	100	150
कार्डिगन	50	100

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 120 & 200 \\ 100 & 150 \\ 50 & 100 \end{bmatrix}$$

देखें आपने कितना सीखा 20.1

1. तीन परीक्षाओं में दो विद्यार्थियों A तथा B द्वारा प्राप्त किये गये अंक साथ वाली सारणी में दिए गए हैं। इस जानकारी को दो भिन्न तरीकों में आव्यूह के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

	परीक्षा 1	परीक्षा 2	परीक्षा 3
A	56	65	71
B	29	37	57

2. तीन फर्म X, Y, Z किसी ठेकेदार को क्रमशः पत्थरों के 40, 35 तथा 25 ट्रक तथा रेत के 10, 5 तथा 8 ट्रकों की आपूर्ति करती हैं। दो तरीकों से इस जानकारी को आव्यूह के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

3. एक परिवार P में 4 पुरुष, 6 महिलाएं तथा 3 बच्चे; तथा परिवार Q, में 4 पुरुष, 3 महिलाएं तथा 5 बच्चे हैं। इस जानकारी को एक 2×3 क्रम वाले आव्यूह द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

4. किसी
   (a) 2×3 आव्यूह (b) 3×4 आव्यूह (c) 4×2 आव्यूह
   (d) 6×2 आव्यूह (e) $a \times b$ आव्यूह (f) $m \times n$ आव्यूह
   में कितने–कितने अवयव हैं?

5. किसी आव्यूह के कौन–कौन से संभव क्रम होंगे यदि इसके कुल अवयवों को संख्या
   (a) 8 (b) 5 (c) 12 (d) 16 हो?

6. आव्यूह A में $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 3 & -3 & 9 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ज्ञात कीजिये:

(a) पंक्तियों की संख्या

(b) स्तंभों की संख्या

(c) आव्यूह A की कोटि

(d) आव्यूह A के कुल अवयवों की संख्या

(e) अवयव $a_{14}, a_{23}, a_{34}, a_{45}$ तथा a_{33} ।

7. एक ऐसा 3×3 कोटि वाला आव्यूह बनाइए जिसकी iवीं पंक्ति तथा jवें स्तंभ का संगत अवयव है:

(a) $i - j$ (b) $\dfrac{i^2}{j}$ (c) $\dfrac{(i+2j)^2}{2}$ (d) $3j - 2i$

8. एक ऐसा 3×2 कोटि वाला आव्यूह बनाइए जिसकी iवीं पंक्ति तथा jवें स्तंभ का संगत अवयव है:

(a) $i + 3j$ (b) $5.i.j.$ (c) i^j (d) $i + j - 2$

20.2 आव्यूहों के प्रकार

पंक्ति आव्यूह: एक आव्यूह, जिस में केवल एक पंक्ति हो, पंक्ति आव्यूह कहलाता है। इसमें कितने भी स्तंभ हो सकते हैं, जैसे कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ एक पंक्ति आव्यूह है। पंक्ति आव्यूह की कोटि $1 \times n$ होती है।

स्तंभ आव्यूह: एक आव्यूह को स्तंभ आव्यूह कहा जाता है यदि इसमें केवल एक स्तंभ हो, किन्तु इसमें कितनी भी पंक्तियां हो सकती हैं, यथा आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ एक स्तंभ आव्यूह है।

एक स्तंभ आव्यूह की कोटि $m \times 1$ होती है।

वर्ग आव्यूह: एक आव्यूह, जिसमें पंक्तियों की संख्या उसके स्तंभों की संख्या के बराबर हो, को वर्ग आव्यूह कहा जाता है, जैसे कि आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

में 3 पंक्तियां तथा 3 स्तंभ हैं, इसलिए यह एक वर्ग आव्यूह है। एक वर्ग आव्यूह की कोटि $n \times n$ अथवा केवल n होती है। एक वर्ग आव्यूह का विकर्ण, जो चोटी के सबसे बायें अवयव से आरंभ होकर उसकी तली के सबसे दायें अवयव पर समाप्त होता है, आव्यूह का मुख्य विकर्ण कहा जाता है। आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ के मुख्य विकर्ण के अवयव 2, 1 तथा 9 हैं।

टिप्पणीः एक दिये हुए $m \times n$ क्रम वाले आव्यूह $A = [a_{ij}]$ में मुख्य विकर्ण के अवयव $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ हैं।

आयताकार आव्यूहः एक आव्यूह, जिस में उसकी पंक्तियों की संख्या उसके स्तंभों की संख्या के बराबर न हो, को एक आयताकार आव्यूह कहा जाता है, जैसे कि आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

जिसमें 3 पंक्तियाँ तथा 4 स्तंभ हैं, एक आयताकार आव्यूह है।

इस बात को नोट कर लीजिए कि क्रम $1 \times n \ (n \neq 1)$ वाला पंक्ति आव्यूह तथा क्रम $m \times 1 \ (m \neq 1)$ वाला स्तंभ आव्यूह दोनों ही आयताकार आव्यूह हैं।

शून्य आव्यूहः एक आव्यूह, जिसका प्रत्येक अवयव शून्य हो, को शून्य आव्यूह कहते हें। उदाहरणार्थ, आव्यूहों में से प्रत्येक एक शून्य आव्यूह है। शून्य आव्यूह को O द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

टिप्पणीः एक शून्य आव्यूह किसी भी क्रम $m \times n$ का हो सकता है।

विकर्ण आव्यूहः एक वर्ग आव्यूह, जिसके मुख्य विकर्ण को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य हों, को एक विकर्ण आव्यूह कहा जाता है। अर्थात् यदि $A = [a_{ij}]$ क्रम m $\times$ n वाला एक वर्ग आव्यूह है, तो इसे विकर्ण आव्यूह कहेंगे यदि सभी $i \neq j$ के लिए $a_{ij} = 0$ हो।

उदाहरण के लिए $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ विकर्ण आव्यूह हैं।

टिप्पणीः एक विकर्ण आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ को $A =$ विकर्ण $[a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}]$ भी लिखा जाता है।

अदिश आव्यूहः एक विकर्ण आव्यूह को अदिश आव्यूह कहा जाता है यदि इसके मुख्य विकर्ण के सभी अवयव किसी शून्येतर अचर यथा k के बराबर हों जैसे कि आव्यूह $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ एक अदिश आव्यूह है।

टिप्पणीः एक वर्ग शून्य आव्यूह एक अदिश आव्यूह नहीं होता।

इकाई या तत्समक आव्यूहः एक अदिश आव्यूह को एक इकाई अथवा तत्समक आव्यूह कहा जाता है यदि उसके मुख्य विकर्ण का प्रत्येक अवयव 1 (एक) हो। इसे I_n से निर्दिष्ट किया जाता है यदि इसका कोटि n है, उदाहरणार्थ आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

कोटि 3 वाला एक इकाई आव्यूह है।

टिप्पणी: एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ एक इकाई आव्यूह होता है, यदि $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ हो।

समान आव्यूह: दो आव्यूह समान आव्यूह कहलाते हैं यदि उनकी कोटि समान हो तथा उनके संगत अवयव बराबर हों।

यदि A एक $m \times n$ क्रम वाला आव्यूह है तथा B, $p \times r$ क्रम वाला आव्यूह है, तो $A = B$ होगा यदि

(1) $m = p; n = r;$ तथा

(2) $a_{ij} = b_{ij}$ सभी $i = 1,2,3,\ldots,m$ तथा $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ के लिए

नीचे दिये गए दो आव्यूह X तथा Y समान नहीं हैं क्योंकि उनके क्रम भिन्न हैं जो क्रमशः 2×3 तथा 3×2 हैं।

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

नीचे दिए गए दो आव्यूह भी समान नहीं हैं क्योंकि P के कुछ अवयव Q के संगत अवयवों के बराबर नहीं हैं।

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.5. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह समान हैं अथवा नहीं;

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

(ii) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

हल: (i) आव्यूह A तथा B का एक ही क्रम 2×2 है। किन्तु उनके कुछ संगत अवयव बराबर नहीं हैं। अतएव, $A \neq B$

(ii) आव्यूह P तथा Q के क्रम भिन्न हैं। इसलिए $P \neq Q$

(iii) आव्यूह X तथा Y का एक ही क्रम 3×3 हैं, तथा उनके संगत अवयव भी बराबर हैं। इसलिए $X = Y$

उदाहरण 20.6. x तथा y के मान निर्धारित कीजिए, यदि

(i) $\begin{bmatrix} x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

हल: क्योंकि दो आव्यूह समान हैं, उनके संगत अवयव बराबर होने चाहियें।

(i) $x = 2$

(ii) $x = 4, \quad y = 3$

(iii) $x = 1, \quad y = -5$

उदाहरण 20.7. $a, b, c, d,$ के किन मानों के लिए नीचे दिए गए आव्यूह समान होंगे?

(i) $A = \begin{bmatrix} a & -2 & 2b \\ 6 & 3 & d \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & 5c & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $P = \begin{bmatrix} a & b-2d \\ -3 & 2b \\ a+c & 7 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

हल: (i) दिये गये आव्यूह A तथा B समान होंगे, केवल यदि उनके संगत अवयव बराबर हों, अर्थात् यदि

$$a=1, \ 2b=4, \ 3=5c, \ \text{तथा} \ d=2 \ \text{हो।}$$

$$\Rightarrow a=1, \ b=2, \ c=\frac{3}{5} \ \text{तथा} \ d=2 \ \text{हो।}$$

इस प्रकार $a = 1, \ b = 2, \ c = \frac{3}{5}$ तथा $d = 2$ के लिए आव्यूह A तथा B समान होंगे।

(ii) दिये गये आव्यूह P तथा Q समान होंगे, यदि उनके संगत अवयव बराबर हों, अर्थात् यदि

$$a = 5, \ b-2d = 1, \ 2b = 6 \ \text{तथा} \ a+c = 4$$

$$\Rightarrow a = 5, \ b = 3, \ c = -1 \ \text{तथा} \ d = 1$$

इस प्रकार $a = 5, \ b = 3, \ c = -1$ तथा $d = 1$, के लिए P तथा Q समान होंगे।

देखें आपने कितना सीखा 20.2

1. निम्नलिखित आव्यूहों में से कौन–कौन से आव्यूह

(a) पंक्ति आव्यूह हैं? (b) स्तंभ आव्यूह हैं? (c) वर्ग आव्यूह हैं? (d) विकर्ण आव्यूह हैं? (e) अदिश आव्यूह हैं? (f) समान आव्यूह हैं? (g) शून्य आव्यूह हैं?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 & 8 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. a, b, c तथा d के मान ज्ञात कीजिए, यदि

(a) $\begin{bmatrix} b & 2c \\ b+d & c-2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a+2 & 4 \\ b+3 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2c \\ 6 & 5d \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2a & b \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ d & 3c \end{bmatrix}$

3. क्या एक 1×2 क्रम वाला आव्यूह क्रम 2×1 वाले आव्यूह के समान हो सकता है?

4. क्या एक क्रम 2×3 वाला आव्यूह क्रम 3×3 वाले आव्यूह के समान हो सकता है?

20.3 एक आव्यूह का परिवर्त

प्रत्येक दिये हुए आव्यूह का एक सहयोगी आव्यूह होता है जिसे उसका परिवर्त कहते हैं। एक दिये हुए आव्यूह A का परिवर्त इसकी पंक्तियों तथा स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त होता है तथा इस A' द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। उदाहरणार्थ, यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix},\ \text{तब}\ A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

साधारणतः, यदि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ आव्यूह है, तो A का परिवर्त A', $n \times m$ आव्यूह होगा तथा A का (a_{ij}) वाँ अवयव A' के (a_{ji}) वें अवयव के बराबर होगा।

20.3.1 सममित आव्यूह

एक वर्ग आव्यूह एक सममित आव्यूह कहलाता है यदि $A' = A$ हो।

उदाहरणार्थ,

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3i & 1-i \\ 3i & 4 & 2i \\ 1-i & 2i & 5 \end{bmatrix}$,तो $A' = \begin{bmatrix} 2 & 3i & 1-i \\ 3i & 4 & 2i \\ 1-i & 2i & 5 \end{bmatrix}$

क्योंकि $A' = A$, तो A एक सममित आव्यूह है।

टिप्पणी: (1) एक सममित आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, में, सभी i तथा j के लिए $a_{ij} = a_{ji}$ होगा।

(2) एक आयताकार आव्यूह कभी सममित नहीं हो सकता।

20.3.2 विषम सममित आव्यूह

एक वर्ग आव्यूह A को विषम सममित आव्यूह कहा जाता है यदि $A' = -A$, अर्थात् सभी i तथा j के लिए $a_{ij} = -a_{ji}$ हो।

उदाहरणार्थ, यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & c & d \\ -c & 0 & f \\ -d & -f & 0 \end{bmatrix}$ है, तो $A' = \begin{bmatrix} 0 & -c & -d \\ c & 0 & -f \\ d & f & 0 \end{bmatrix}$

किन्तु $-A = \begin{bmatrix} 0 & -c & -d \\ c & 0 & -f \\ d & f & 0 \end{bmatrix}$, जो A' के समान है अर्थात $A' = -A$

अएतव, A एक विषम सममित आव्यूह है।

टिप्पणी: एक विषम सममित आव्यूह $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ में $i = j$ के लिए $a_{ij} = 0$ होता है अर्थात् एक विषम सममित आव्यूह के मुख्य विकर्ण में सभी अवयव शून्य होते हैं।

20.4 एक आव्यूह का अदिश गुणन

आइए निम्नलिखित परिस्थिति पर विचार करें।

तीन विद्यार्थियों द्वारा अंग्रेजी, हिन्दी तथा गणित में प्राप्त किए गए अंक नीचे दिए गए हैं:

	अंग्रेजी	हिन्दी	गणित
एलिजाबेथ	20	10	15
ऊषा	22	25	27
शबनम	17	25	21

यह भी दिया हुआ है कि प्रत्येक दशा में पूर्णांक 30 हैं।

आव्यूह के रूप में उपर्युक्त जानकारी को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 22 & 25 & 27 \\ 17 & 25 & 21 \end{bmatrix}$$

(यह समझा जाता है कि पंक्तियाँ नामों के संगत तथा स्तंभ विषयों के संगत हैं।)

यदि प्रत्येक दशा में पूर्णांक को दुगुना कर दिया जाए, तो लड़कियों द्वारा प्राप्तांक भी दुगुने हो जायेंगे। आव्यूह के रूप में नये अंकों को निम्नलिखित तरीके से प्रदर्शित किया जायेगा:

$$\begin{bmatrix} 2\times 20 & 2\times 10 & 2\times 15 \\ 2\times 22 & 2\times 25 & 2\times 27 \\ 2\times 17 & 2\times 25 & 2\times 21 \end{bmatrix} \text{ जो } \begin{bmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 44 & 50 & 54 \\ 34 & 50 & 42 \end{bmatrix} \text{ के बराबर है।}$$

टिप्पणी

इसलिए हम लिखते है कि

$$2\times\begin{bmatrix}20 & 10 & 15\\ 22 & 25 & 27\\ 17 & 25 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times20 & 2\times10 & 2\times15\\ 2\times22 & 2\times25 & 2\times27\\ 2\times17 & 2\times25 & 2\times21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40 & 20 & 30\\ 44 & 50 & 54\\ 34 & 50 & 42\end{bmatrix}$$

अब एक अन्य आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 6\end{bmatrix}$ पर विचार कीजिये।

आइए देखें कि जब हम आव्यूह A को 5 से गुणा करते हैं, तो क्या होता है।

अर्थात् $$5\times A=5A=5\times\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times3 & 5\times2\\ 5\times(-2) & 5\times0\\ 5\times1 & 5\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 10\\ -10 & 0\\ 5 & 30\end{bmatrix}$$

जब एक अदिश से किसी आव्यूह को गुणा किया जाता है, तो उसके प्रत्येक अवयव को उस अदिश से गुणा किया जाता है।

उदाहरणार्थ

यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो $kA=\begin{bmatrix}k\times2 & k\times(-1)\\ k\times6 & k\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k & -k\\ 6k & 3k\end{bmatrix}$

जब $k=-1$ होगा, तो $kA=(-1)A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}$ होगा।

इसलिए $(-1)A=-A$

इस प्रकार, यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो $-A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}$ होगा।

उदाहरण 20.8. यदि $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो निम्न ज्ञात कीजिए:

(i) $2A$ (ii) $\frac{1}{2}A$ (iii) $-A$ (iv) $\frac{2}{3}A$

हलः यहां (i) यहां $2A=2\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times(-2) & 2\times3 & 2\times4\\ 2\times(-1) & 2\times0 & 2\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6 & 8\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$

(ii) $$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\times(-2) & \frac{1}{2}\times3 & \frac{1}{2}\times4\\ \frac{1}{2}\times(-1) & \frac{1}{2}\times0 & \frac{1}{2}\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{2} & 2\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(iii) $$-A = (-1) \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(iv) $$\frac{2}{3}A = \frac{2}{3} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

देखें आपने कितना सीखा 20.3

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए:

   (a) $4A$ (b) $-A$ (c) $\frac{1}{2}A$ (d) $-\frac{3}{2}A$

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए।

   (a) $5A$ (b) $-3A$ (c) $\frac{1}{3}A$ (d) $-\frac{1}{2}A$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ हो, तो $(-7)\,A$ ज्ञात कीजिए।

4. यदि $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए।

   (a) $5X$ (b) $-4X$ (c) $\frac{1}{3}X$ (d) $-\frac{1}{2}X$

5. A' (A का परिवर्त) ज्ञात कीजिए:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. किसी आव्यूह, A के लिए, सिद्ध कीजिए कि $(A')' = A$

7. दिखाइए कि निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक एक सममित आव्यूह है:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. दिखाइए कि निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक एक विषम सममित आव्यूह है:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & i & 4 \\ -i & 0 & 2-i \\ -4 & -2+i & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

20.5 आव्यूहों का योग

दो छात्र A तथा B दो परीक्षाओं में गणित, भौतिकी तथा अंग्रेजी में प्राप्त अपने अंकों की तुलना करते हैं। प्रत्येक विषय के पूर्णांक 50 हैं। उनके द्वारा प्राप्तांक नीचे दिये गए हैं।

प्रथम परीक्षा

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{गणित} & \text{भौतिकी} & \text{अंग्रेजी} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 50 & 38 & 33 \\ 47 & 40 & 36 \end{bmatrix} \end{array}$$

द्वितीय परीक्षा

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{गणित} & \text{भौतिकी} & \text{अंग्रेजी} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 45 & 32 & 30 \\ 42 & 30 & 39 \end{bmatrix} \end{array}$$

दोनों परीक्षाओं में कुल मिलाकर प्रत्येक विषय में उनके द्वारा प्राप्त किए गये अंक हम कैसे ज्ञात करेंगे?

ध्यान से देखिए कि दोनों आव्यूहों की संयुक्त जानकारी को प्रदान करने वाला नया आव्यूह है:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{गणित} & \text{भौतिकी} & \text{अंग्रेजी} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 50+45 & 38+32 & 33+30 \\ 47+42 & 40+30 & 36+39 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{गणित} & \text{भौतिकी} & \text{अंग्रेजी} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 95 & 70 & 63 \\ 89 & 70 & 75 \end{bmatrix} \end{array}$$

यह नया आव्यूह दिये हुए आव्यूहों का योग कहलाता है।

यदि A तथा B एक ही क्रम के दो आव्यूह दिये गये हों, तो उनका योग एक आव्यूह C जिस के क्रमवार अवयव आव्यूहों A तथा B के संगत अवयवों के योगफल हों, द्वारा परिभाषित किया जाता है तथा इसे $C = A + B$ के रूप में लिखते हैं।

टिप्पणी: 1. आव्यूह C का क्रम भी वही होगा जो कि A तथा B का
2. दो भिन्न क्रम वाले आव्यूहों का योग करना संभव नहीं है।

उदाहरण 20.9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो $A + B$ ज्ञात कीजिए।

हल: क्योंकि दिये गए आव्यूह A तथा B समान क्रम 2×2 के हैं, हम उनका योग कर सकते हैं। इसलिए

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 3+2 \\ 4+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.10. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो $A + B$ ज्ञात कीजिए।

हल: क्योंकि दिये गये आव्यूह समान क्रम अर्थात् 2×3 के हैं, हम उनका योग कर सकते हैं। इसलिए

$$A + B = \begin{bmatrix} 0+3 & 1+0 & -1+4 \\ 2+1 & 3+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

20.5.1 योग के गुण

स्मरण कीजिए कि संख्याओं में हमने प्राप्त किया है:

(i) $x + y = y + x$, अर्थात् योग क्रम विनिमेय है।

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, अर्थात् योग सहचारी है।

(iii) $x + 0 = x$, योग के तत्समक अवयव का अस्तित्व है।

(iv) $x + (-x) = 0$, अर्थात् योज्य–व्युत्क्रम का अस्तित्व है।

आइए, अब खोज करें कि ये गुण आव्यूहों में भी सही ठहरते हैं अथवा नहीं।

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, तब

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2-2 \\ -1+1 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

तथा

$$B + A = \begin{bmatrix} 0+1 & -2+2 \\ 1+(-1) & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

हम देखते हैं कि $A + B$ तथा $B + A$ एक ही आव्यूह को निर्दिष्ट करते हैं।

एक ही क्रम वाले दो आव्यूहों A तथा B के लिए, $A + B = B + A$
अर्थात् आव्यूहों का योग क्रम विनिमेय होता है।

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. तब

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+1 & -4+0 \\ 0+2 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2 & 3+(-4) \\ -2+2 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

तथा $$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 0+1 & 3+(-4) \\ -2+0 & 1+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & -1+0 \\ -2+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

हम देखते हैं कि $A + (B + C)$ तथा $(A + B) + C$ एक ही आव्यूह को निर्दिष्ट करते हैं। इस प्रकार, व्यापक रूप में

एक ही क्रम के तीन आव्यूहों A, B तथा C के लिए
$A + (B + C) = (A + B) + C$ होता है अर्थात् आव्यूहों का योग सहचारी होता है।

स्मरण कीजिए कि हमने शून्य आव्यूह के विषय में बात की है। एक शून्य आव्यूह वह आव्यूह है जिसके सभी अवयव शून्य होते हैं। यह किसी भी क्रम का हो सकता है।

मान लीजिए, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तब

$$A + O = \begin{bmatrix} 2+0 & -2+0 \\ 4+0 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

तथा $$O + A = \begin{bmatrix} 0+2 & 0-2 \\ 0+4 & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

हम देखते हैं कि $A + O$ तथा $O + A$ उसी आव्यूह A को निर्दिष्ट करते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$A + O = A = O + A$, जहां O एक शून्य आव्यूह है।

आव्यूह O, जो शून्य आव्यूह है, को योग का तत्समक आव्यूह कहा जाता है।

योग का तत्समक आव्यूह एक शून्य आव्यूह होता है जिसे दिए हुए आव्यूह में जोड़ने पर वही आव्यूह प्राप्त होता है, अर्थात् $A + O = A = O + A$.

उदाहरण 20.11. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ हो,

तो (a) $A + B$ (b) $B + C$ (c) $(A + B) + C$ (d) $A + (B + C)$

ज्ञात कीजिए।

हलः

(a) $A+B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+(-3) & 0+1\\ 1+1 & 3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

(b) $B+C=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-3)+(-1) & 1+0\\ 1+0 & 2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}$

(c) $(A+B)+C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)+(-1) & 1+0\\ 2+0 & 5+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

(d) $A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+(-4) & 0+1\\ 1+1 & 3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

उदाहरण 20.12. यदि $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ तथा $O=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(a) $A+O$ (b) $O+A$ ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

हलः (a) $A+O=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-2+0 & 3+0 & 5+0\\ 1+0 & -1+0 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

(b) $O+A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0+(-2) & 0+3 & 0+5\\ 0+1 & 0+(-1) & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

(a) तथा (b), से हम देखते हैं कि

$$A+O=O+A=A$$

20.6 आव्यूहों का व्यवकलन

मान लीजिए कि A तथा B एक ही क्रम के दो आव्यूह हैं। तब आव्यूह A−B को A से B के व्यवकलन के रूप में परिभाषित किया जाता है। A के अवयवों में से B के संगत अवयव घटाने से A− B प्राप्त होता है। हम लिख सकते हैं:

$$A-B=A+(-B)$$

*टिप्पणी: **A−B तथा B−A एक ही आव्यूह को निर्दिष्ट नहीं करते जब तक कि A= B न हो।***

उदाहरण 20.13. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ हो, तो

(a) $A-B$ (b) $B-A$ ज्ञात कीजिए।

हलः (a) हम जानते हैं कि

$$A - B = A + (-B) \qquad \text{(i)}$$

क्योंकि $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, हम प्राप्त करते हैं $-B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

इसे (i) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 0+(-2) \\ 2+(-1) & (-1)+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(b) इसी प्रकार,

$$B - A = B + (-A)$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 2+0 \\ 1+(-2) & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

टिप्पणीः $A - B$ प्राप्त करने के लिए हम A के अवयवों में से B के संगत अवयव सीधे घटा सकते हैं।

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-3 & 0-2 \\ 2-1 & -1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

तथा $$B - A = \begin{bmatrix} 3-1 & 2-0 \\ 1-2 & 4-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.14. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ तथा $A+B = O$, हो तो B ज्ञात कीजिए।

हलः यहां यह दिया गया है कि A+B = O

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2+a & 3+b \\ -1+c & 4+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + a = 0 \quad ; \quad 3 + b = 0$$
$$-1 + c = 0 \quad ; \quad 4 + d = 0$$

$\Rightarrow \quad a = -2;\ b = -3;\quad c = 1$ तथा $d = -4$

$$\therefore \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

टिप्पणीः उदाहरण 20.15 में B के अवयव A के संगत अवयवों के योज्य–व्युत्क्रम हैं। इसलिए हम आव्यूह B को आव्यूह A का योज्य–व्युत्क्रम कहते हैं। साथ ही,

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = (-1) \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = (-1) \times A = -A$$

व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि यदि एक आव्यूह ***A*** दिया हो, और एक ऐसे अन्य आव्यूह ***B* = (− 1) A** का अस्तित्व हो ताकि ***A* + *B*= *O*** हो, तो ऐसे आव्यूह ***B*** को आव्यूह ***A*** का योज्य–व्युत्क्रम कहा जाता है।

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 20.4

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) $A+B$ (b) $2A+B$ (c) $A+3B$ (d) $2A+3B$ ज्ञात कीजिए।

2. यदि $P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) $P-Q$ (b) $Q-P$ (c) $P-2Q$ (d) $2Q-3P$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) $A+B$ (b) $A-B$ (c) $-A+B$ (d) $3A+2B$ ज्ञात कीजिए।

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो शून्य आव्यूह O, जो $A+O = A$

   को सन्तुष्ट करता हो, ज्ञात कीजिये।

5. यदि $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) $-A$ (b) $A+(-A)$ (c) $(-A)+A$ ज्ञात कीजिए।

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ हो, तो

   ज्ञात कीजिए:

   (a) $2A$ (b) $3B$ (c) $2A+3B$ (d) यदि $2A + 3B + 5X = O$ हो, तो X क्या होगा?

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) A' (b) B' (c) $A+B$ (d) $(A+B)'$ (e) $A'+B'$ ज्ञात कीजिये!

आप क्या देखते हैं?

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो

ज्ञात कीजिए:

(a) A−B (b) B−C (c) A−C (d) 3B−2C (e) A−B−C (f) 2A−B−3C

20.7 आव्यूहों का गुणन

सैलीना तथा राखी दो मित्र हैं। सैलीना 17 किग्रा. गेहूँ, 3 किग्रा. दालें तथा 250 ग्रा. घी खरीदना चाहती हैं? जबकि राखी 15 किग्रा. गेहूँ, 2 किग्रा. दालें तथा 500 ग्रा. घी खरीदना चाहती है। गेहूँ, दालों तथा घी के प्रति किग्रा. मूल्य क्रमशः 8.00 रु., 27.00 रु. तथा 90.00 रु. है। उनमें से प्रत्येक कितनी धन राशि व्यय करेगी? स्पष्टतः, सैलीना तथा राखी को जितनी धन राशि की आवश्यकता होंगी उसे नीचे दिया गया है:

सैलीना 17 किग्रा. गेहूँ का मूल्य $\Rightarrow 17 \times 8$ रु. = 136.00 रु.

3 किग्रा. दालों का मूल्य $\Rightarrow 03 \times 27$ रु. = 81.00 रु.

250 ग्रा. घी का मूल्य $\Rightarrow \frac{1}{4} \times 90$ रु. = 22.50 रु.

योग = 239.50 रु.

राखी 15 किग्रा. गेहूँ का मूल्य $\Rightarrow 15 \times 8$ रु. = 120.00 रु.

2 किग्रा. दालों का मूल्य $\Rightarrow 2 \times 27$ रु. = 54.00 रु.

500 ग्रा. घी का मूल्य $\Rightarrow \frac{1}{2} \times 90$ रु. = 45.00 रु.

योग = 219.00 रु.

आव्यूह के रूप में उपर्युक्त जानकारी को निम्नलिखित ढंग से प्रदर्शित किया जा सकता है:

आवश्यकताएं मूल्य आवश्यक धन राशि

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17\times8+3\times27+0.250\times90 \\ 15\times8+2\times27+0.500\times90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239.50 \\ 219.00 \end{bmatrix}$$

उसी बस्ती में एक अन्य दुकान पर निम्नलिखित मूल्य लिखे गए हैं:

गेहूँ, : 9 रु. प्रति किग्रा.; दालें : 26 रु. प्रति किग्रा. घी : 100 प्रति किग्रा.

सौलीना तथा राखी को इस दुकान से अपनी वांछित वस्तुओं की मात्रा खदीदने के लिए निम्नलिखित धन राशि की आवश्यकता होगी।

सैलीना 17 किग्रा. गेहूँ, $\Rightarrow 17 \times 9$ रु. = 153.00 रु.

3 किग्रा. दालें $\Rightarrow 3 \times 26$ रु. = 78.00 रु.

250 ग्रा. घी $\Rightarrow \frac{1}{4} \times 100$ रु. = 25.00 रु.

कुल = 256.00 रु.

राखी   15 किग्रा. गेहूँ, $\Rightarrow 15 \times 9$ रु. $= 135.00$ रु.

02 किग्रा. दालें $\Rightarrow 2 \times 26$ रु. $= 52.00$ रु.

500 ग्रा. घी $\Rightarrow \frac{1}{2} \times 100$ रु. $= 50.00$ रु.

कुल $= 237.00$ रु.

आव्यूह के रूप में उपरोक्त जानकारी को निम्नलिखित ढंग से प्रदर्शित किया जा सकता है।

आवश्यकताएं   मूल्य   आवश्यक धन राशि (रु. में)

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.00 \\ 26.00 \\ 100.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \times 9.00 + 3 \times 26.00 + 0.250 \times 100 \\ 15 \times 900 + 2 \times 26.00 + 0.500 \times 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256.00 \\ 237.00 \end{bmatrix}$$

एक तुलनात्मक अध्ययन के लिए, दोनों जानकारियों को निम्नलिखित ढंग से एकत्रित किया जा सकता हैः

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.00 & 9.00 \\ 27.00 & 26.00 \\ 90.00 & 100.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239.50 & 256.00 \\ 219.00 & 237.00 \end{bmatrix}$$

आइए देखें कि कैसे और कब हम इस गुणनफल को लिखते हैंः

(i) प्रथम आव्यूह की पहली पंक्ति के तीन अवयवों को दूसरे आव्यूह के प्रथम स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा किया जाता है तथा उनका योग किया जाता है। यह योगफल गुणनफल–आव्यूह की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का अवयव होता है। उसी ढंग से पहले आव्यूह की दूसरी पंक्ति के अवयवों को दूसरे आव्यूह के प्रथम स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा करके जोड़ा जाता है। यह योगफल गुणनफल–आव्यूह की दूसरी पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ का अवयव होता है; तथा इसी प्रकार गुणनफल आव्यूह के अन्य अवयव प्राप्त किये जाते हैं।

(ii) पहले आव्यूह के स्तंभों की संख्या दूसरे आव्यूह को पंक्तियों की संख्या के बराबर है ताकि प्रथम आव्यूह दूसरे आव्यूह द्वारा गुणा किये जाने के अनुकूल है।

इस प्रकार,   यदि $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$

तब, $A \times B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 \end{bmatrix}$

परिभाषाः यदि A तथा B दो आव्यूह क्रमशः $m \times p$ तथा $p \times n$ क्रम वाले हों, तो उनका गुणनफल एक $m \times n$ क्रम वाला आव्यूह C होगा; तथा यदि a_{ij}, b_{ij} तथा c_{ij} क्रमशः A, B तथा C आव्यूहों को iवीं पंक्ति तथा jवें स्तंभ के अवयव हों, तो

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

टिप्पणी

उदाहरण 20.15. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ हो, तो

ज्ञात कीजिए: (a) AB (b) BA क्या $AB = BA$ है?

हल: A का क्रम 1×3 है।

B का क्रम 3×1 है।

$\therefore$ A के स्तंभों की संख्या $= B$ की पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ AB का अस्तित्व है।

$$\text{अब, } AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 0 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार $AB = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$, 1×1 क्रम का आव्यूह

पुनः, B के स्तंभों की संख्या $= A$ की पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ BA का अस्तिव है।

$$\text{अब, } BA = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 1 & (-2) \times (-1) & (-2) \times 2 \\ 0 \times 1 & 0 \times (-1) & 0 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times (-1) & 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{इस प्रकार, } BA = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \; 3 \times 3 \text{ क्रम का आव्यूह}$$

ऊपर की सभी चर्चा से हम पाते हैं कि $AB \neq BA$ ।

उदाहरण 20.16. आव्यूहों A तथा B के लिए, यदि संभव हो, AB तथा BA ज्ञात कीजिए जबकि

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

हल: यहां A के स्तंभों की संख्या $\neq$ B की पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ AB का अस्तित्व नहीं है।

पुनः, B के स्तंभों की संख्या $\neq$ A की पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ BA का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 20.17. यदि $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो

AB तथा BA ज्ञात कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि AB = BA है अथवा नहीं।

हलः यहां, A के स्तंभों की संख्या = B को पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ AB का अस्तित्व है।

B के स्तंभों की संख्या = A को पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ BA का अस्तित्व है।

अब,
$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 2+2\times 2 & 1\times 1+2\times 2\\ -1\times 2+0\times 2 & -1\times 1+0\times 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+4 & 1+4\\ -2+0 & -1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5\\ -2 & -1\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

तथा
$$BA=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 1+1\times(-1) & 2\times 2+1\times 0\\ 2\times 1+2\times(-1) & 2\times 2+2\times 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2-1 & 4+0\\ 2-2 & 4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

इस प्रकार, $AB\neq BA$

टिप्पणीः हम देखते हैं कि AB तथा BA एक ही क्रम 2×2, वाले हैं, फिर भी $AB\neq BA$ है।

उदाहरण 20.18. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ हो, तो

AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या $AB=BA$ है?

हलः यहां दोनों A तथा B का क्रम 2×2 है। इस लिए दोनों AB तथा BA के अस्तित्व हैं। अब,

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}8+0 & 0+0\\ 0+0 & 0-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}_{2\times 2}$$ तथा

$$BA=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8+0 & 0+0\\ 0+0 & 0-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

यहां, दोनों AB तथा BA एक ही क्रम के हैं तथा $AB=BA$ भी हैं।

अतएव, यदि दो आव्यूहों A तथा B को गुणा किया जाए, तो निम्नलिखित पांच स्थितियां उत्पन्न होती हैं;

(i) दोनों AB तथा BA के अस्तित्व होते हैं, किन्तु उनके क्रम भिन्न होते हैं

(ii) केवल एक गुणनफल AB अथवा BA का अस्तित्व होता है।

(iii) AB तथा BA में से किसी का भी अस्तित्व नहीं होता।

(iv) दोनों AB तथा BA के अस्तित्व होते हैं तथा उनके क्रम भी एक ही होते हैं, किन्तु $AB\neq BA$ होता है।

(v) दोनों AB तथा BA के अस्तित्व होते हैं तथा उनके क्रम भी एक ही होते हैं। साथ ही $AB=BA$ होता है।

टिप्पणी

उदाहरण 20.19. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $A^2-2A-3I=O$

हल: यहां, $A^2=AA=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9+0 & 0+0\\ 0+0 & 0+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}$

$$2A=2\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix} \quad \text{तथा} \quad 3I=3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^2-2A-3I=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-9 & 0-0\\ 0-0 & 9-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

अतएव, सत्यापित हुआ।

उदाहरण 20.22. आव्यूह समीकरण $\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$ हल कीजिए।

हल: यहां बायां पक्ष $=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-3y\\ x+y\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2x-3y\\ x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} \Rightarrow 2x-3y=1; x+y=3$$

इन समीकरणों को हल करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$x=2$ तथा $y=1$

उदाहरण 20.21. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, तो AB ज्ञात कीजिये।

हल: यहां, $AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-1)+1\times1 & 1\times1+1\times(-1)\\ 1\times(-1)+1\times1 & 1\times1+1\times(-1)\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-1+1 & 1-1\\ -1+1 & 1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

टिप्पणी: उदाहरण 3.23से हमें ज्ञात होता है कि दो शून्येतर आव्यूहों का गुणनफल एक शून्य आव्यूह हो सकता है, अर्थात् $A\neq O$ तथा $B\neq O$ तब भी $AB=O$ हो सकता है।

अतएव, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दो शून्येतर आव्यूहों का गुणनफल एक शून्य आव्यूह हो सकता है, जबकि संख्याओं में दो शून्योतर संख्याओं का गुणनफल सदा शून्येतर होता है।

टिप्पणी

उदाहरण 20.22. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

के लिए (a) $(AB)C$ (b) $A(BC)$ ज्ञात कीजिये

क्या $(AB)\,C = A\,(BC)$ है?

हलः (a)

$$(AB)C = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & 0-4 \\ 12-5 & 0+10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+0 & 0-12 \\ -7+0 & 0+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -7 & 30 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4+0 & 0+0 \\ 1+0 & 0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-2 & 0-12 \\ -12+5 & 0+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -7 & 30 \end{bmatrix}$$

(a) तथा (b) से हम पाते हैं कि $(AB)C = A(BC)$, अर्थात् आव्यूह गुणन सहचारी होता है।

देखें आपने कितना सीखा 20.5

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या $AB=BA$ है?

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या AB = BA है?

3. यदि $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA में से जिस का भी अस्तित्व हो, उसे ज्ञात कीजिए।

4. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ हो, तो BA ज्ञात कीजिए। क्या AB का अस्तित्व है?

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) क्या AB का अस्तित्व है? क्यों? (b) क्या BA का अस्तित्व है? क्यों?

टिप्पणी

6. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या AB=BA है?

7. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 5 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो

AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या AB=BA है?

8. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ हो तो, AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या AB=BA है?

9. x तथा y के मान ज्ञात कीजिए यदि

(a) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 7\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -3\end{bmatrix}$ हो।

10. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि AB=O है।

11. $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

$A^2-5A+I=O$, जहां I एक दो क्रम वाला इकाई आव्यूह है।

12. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो निम्न ज्ञात कीजिए:

(a) A(BC) (b) (AB)C (c) (A+B)C

(d) AC+BC (e) A^2-B^2 (f) (A−B) (A+B)

13. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ हो, तो (a) AC (b) BC

ज्ञात कीजिए।

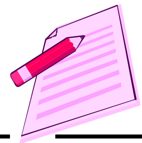
क्या AC = BC है? आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

14. यदि $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 7 & -1\end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए:

(a) B+C (b) A (B+C) (c) AB (d) AC (e) AB+AC

ध्यान पूर्वक देखने से आप क्या पाते हैं?

15. आव्यूहों $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि $(AB)'=B'A'$



टिप्पणी

16. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ हो, तो ऐसा आव्यूह X ज्ञात कीजिए कि $AX = B$ हो।

17. यदि $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए कि $A^2-(a+d)\,A = (bc-ad)\,I$

18 यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो क्या, यह सत्य है कि

(a) $(A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$?   (b) $(A-B)^2 = A^2+B^2-2AB$?

(c) $(A+B)\,(A-B) = A^2-B^2$?

20.8 व्युत्क्रमणीय आव्यूह

परिभाषाः 'A' एक n क्रम का वर्ग आव्यूह व्युत्क्रमणीय होता है यदि 'B' दूसरा उसी क्रम (n) का आव्यूह, इस तरह है कि

$AB = I_n = BA$, जहाँ I_n तत्समक (n कोटि का) आव्यूह हो।

इस तरह के अवसर पर, A का व्युत्क्रम B होता है तथा $A^{-1} = B$ लिखते हैं।

प्रमेय 1 : प्रत्येक व्युत्क्रमणीय आव्यूह का एक अद्वितीय व्युत्क्रम होता है।

उपपत्ति : माना A एक n क्रम का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

माना B, तथा C आव्यूह A के दो व्युत्क्रम हैं।

तब $AB = BA = I_n$ ...(*i*)

तथा $AC = CA = I_n$ ...(*ii*)

अब $AB = I_n$

$\Rightarrow$ $C(AB) = C\,I_n$ ['C' से पहले गुणा करने पर]

$\Rightarrow$ $(CA)\,B = C\,I_n$ [साहचर्य गुण द्वारा]

$\Rightarrow$ $I_n\,B = C\,I_n$ ($\because CA = I_n$ समीकरण (*ii*) से]

$\Rightarrow$ $B = C$ [$\because I_n\,B = B,\ C\,I_n = C$]

अतः एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह का एक विशेष (अद्वितीय) व्युत्क्रम होता है।

उपप्रमेय : यदि A व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो $(A^{-1})^{-1} = A$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि $A\ A^{-1} = I = A^{-1}A$

$\Rightarrow$ A, A^{-1} का व्युत्क्रम हुआ

अतः $A = (A^{-1})^{-1}$

प्रमेय 2: एक वर्ग आव्यूह तभी व्युत्क्रमणीय होगा जब वह अव्युत्क्रमणीय नहीं है।

उपपत्तिः माना A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। तब B आव्यूह इस तरह है कि $AB = I_n = BA$

$\Rightarrow$ $|AB| = |I_n|$ $\Rightarrow$ $|A|\,|B| = 1$ $\Rightarrow$ $|A| \neq 0$

$\Rightarrow$ A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

विलोमत : माना A, n कोटि का एक व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है।

तब

$$\Rightarrow \quad A\left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right) = I_n = \left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right) A \quad \left[\because |A| \neq 0 \therefore \frac{1}{|A|} \text{ का मान होगा}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj\ A$$ [व्युत्क्रम की परिभाषा]

अतः A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह होगा।

टिप्पणी: यह प्रमेय व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम जानने के लिए उपयोगी है।

A का व्युत्क्रम

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj\ A$$

20.9 एक आव्यूह पर प्रारम्भिक रूपांतरण अथवा प्रारम्भिक संक्रियाएँ

निम्न तीन संक्रियाओं का किसी आव्यूह की पंक्तियों (स्तंभ) पर प्रयोग प्रारम्भिक पंक्ति (स्तंभ) रूपांतरण कहलाता है।

(i) दो पंक्तियों (स्तंभों) को परस्पर बदलना

किसी आव्यूह में 'i' वीं पंक्ति (स्तंभ) को 'j' वीं पंक्ति (स्तम्भ) से परस्पर बदलने को $R_i \leftrightarrow R_j$ ($C_i \leftrightarrow C_j$) से निर्दिष्ट करते हैं।

उदाहरणार्थ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, तब $R_2 \leftrightarrow R_3$ का निरूपण करने पर

हमें B आव्यूह मिलता है–

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) किसी आव्यूह के किसी पंक्ति (स्तंभ) के सभी अवयवों को एक शून्येत्तर अदिश से गुणा करने पर :

यदि 'i' वीं पंक्ति (स्तंभ) के अवयवों को एक शून्येतर अदिश k, से गुणा किया जाए तो उसे $R_i \to k\,R_i$ [$C_i \to k\,C_i$] से निर्दिष्ट करते हैं

उदाहरणार्थ :

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, तब $R_1 \to 2R_1$ के निरूपण करने पर निम्न B मिलता है।

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

(iii) किसी पंक्ति (स्तंभ) के अवयवों को किसी अन्य पंक्ति (स्तंभ) के संगत अवयवों को किसी अदिश से गुणा करके जोड़ना–इसे $R_i \to R_i + kR_j$ ($C_i \to C_i + k\,C_j$) से निरूपण करते हैं।

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, पर $R_3 \to R_3 + 2R_1$ निरूपित करते हैं तो हमें आव्यूह B मिलता है

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

20.10 प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा एक आव्यूह का व्युत्क्रम

प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं या स्तंभ संक्रियाओं, परन्तु दोनों एक साथ नहीं, प्रयोग करते हुए एक आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कर सकते हैं जबकि उसका अस्तित्व हो।

माना 'A' n कोटि का एक व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है।

यदि हम प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा A^{-1} प्राप्त करना चाहते हैं तो

$$A = I_n\, A \text{ लिखते हैं} \qquad ...(i)$$

एक प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया में दो आव्यूह के गुणन को उसी प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया के अग्रिम गुणनखण्ड से प्रभावित किया जा सकता है।

हम प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं प्रयोग समीकरण (i) पर तब तक करते हैं जब तक बायाँ पक्ष I_n तथा दायाँ पक्ष में (संगत प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग I_n के अग्रिम (पूर्व) गुणन करने के बाद)

हम पाते हैं $$I_n = BA \qquad ...(ii)$$

इसका तात्पर्य आव्यूह A तथा आव्यूह B एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं। अतः $A^{-1} = B$

इसी तरह यदि हम चाहते हैं A^{-1}, प्रारम्भिक स्तंभ संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा तो हम लिखते हैं

$$A = A\, I_n \qquad ...(iii)$$

अब (iii) पर प्रारम्भिक स्तंभ संक्रियाओं का प्रयोग जब तक करते हैं जब तक बायाँ पक्ष I_n नहीं हो जाता दायाँ पक्ष (संगत प्रारम्भिक स्तंभ संक्रियाओं का प्रयोग पश्च गुणन (post factor) I_n पर करने के बाद) दायाँ पक्ष इस तरह हो जाता है

$$I_n = AB$$

तब $$A^{-1} = B$$

इस विधि को निम्न उदाहरण द्वारा समझाया गया है।

उदाहरण 20.23. प्रारम्भिक स्तंभ संक्रियाओं द्वारा आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

हल : $A = A\, I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_2 \to C_2 + 3C_1 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_1 \to \frac{1}{2}C_1 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad C_1 \to C_1 - \frac{1}{2}C_2 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow I_2 = AB, \text{ जहाँ } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.24. प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं द्वारा आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

हल : $A = I_2A \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}A$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}A \quad R_1 \to \frac{1}{10} R_1 \text{ निरूपित करने पर}$$

$R_2 \to R_2 + 5\ R_1$ निरूपित करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}A$$

जैसा कि आव्यूह के बायें पक्ष में एक पंक्ति के सभी अवयव '0' हैं। अतः इस आव्यूह का व्युत्क्रम नहीं हो सकता, क्योंकि बायें पक्ष के आव्यूह को तत्समक आव्यूह में नहीं बदला जा सकता।

टिप्पणी: क्योंकि $|A| = 0$, आव्यूह अव्युत्क्रमणीय है।

उदाहरण 20.25. प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

हल : $A = I\,A$ या $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$, $R_1 \to R_1 - R_2$ निरूपित करने पर

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} A$, $R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$ निरूपित करने पर

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} A$, $R_2 \to \frac{1}{2}R_2$ निरूपित करने पर

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{bmatrix} A$, $R_1 \to R_1 + R_2,\ R_3 \to R_3 + 2R_2$ निरूपित करने पर

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{-5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} A$, $R_3 \to \frac{1}{4}R_3$ निरूपित करने पर

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} A$, $R_1 \to R_1 + \frac{1}{2}R_3,\ R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_3$ निरूपित करने पर

अत: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 20.6

1. निम्नलिखित आव्यूहों का प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

आइये दोहराएँ

- पंक्तियों तथा स्तंभों के रूप में व्यवस्थित संख्याओं के एक आयताकार विन्यास को आव्यूह कहा जाता है। प्रत्येक संख्या को आव्यूह का एक अवयव कहा जाता है।
- एक 'm' पंक्तियों तथा 'n' स्तंभों वाले आव्यूह का क्रम $m \times n$ होता है।
- यदि किसी आव्यूह की पंक्तियों की संख्या उसके स्तंभों की संख्या के बराबर हो, तो उसे वर्ग आव्यूह कहा जाता है।
- एक विकर्ण आव्यूह ऐसा वर्ग आव्यूह होता है जिस में विकर्ण के अवयवों को छोड़ कर शेष सभी अवयव शून्य होते हैं।
- किसी भी क्रम का एक इकाई आव्यूह उसी क्रम का एक विकर्ण आव्यूह होता है जिसमें प्रत्येक विकर्ण का अवयव 1 होता है।
- शून्य आव्यूह एक ऐसा आव्यूह होता है जिसके सभी अवयव शून्य होते हैं।
- दो आव्यूहों को समान आव्यूह, कहा जाता है यदि उनका क्रम एक ही हो तथा उनके संगत अवयव बराबर हों।
- किसी आव्यूह का परिवर्त उसकी पंक्तियों तथा इसके स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त होता है।
- एक आव्यूह A को सममित आव्यूह कहते हैं यदि $A' = A$ हो, तथा इसे विषम सममित कहते हैं यदि $A' = -A$ हो।
- किसी आव्यूह की अदिश से गुणा, उसके प्रत्येक अवयव को अदिश से गुणा करके प्राप्त की जाती है।
- दो आव्यूहों (एक ही क्रम वाले) का योग उनके संगत अवयवों को जोड़ने से प्राप्त आव्यूह होता है।
- दो आव्यूहों A तथा B का अन्तर आव्यूह A तथा आव्यूह B के ऋणात्मक आव्यूह के योगफल के बराबर होता है।
- दो आव्यूहों, $m \times n$ क्रम के आव्यूह A तथा $n \times p$ क्रम के आव्यूह B को गुणनफल $m \times p$, क्रम वाला एक ऐसा आव्यूह होगा जिसके अवयवों को A की पंक्तियों के अवयवों को B के स्तंभों के संगत अवयवों से गुणा करके जोड़ने पर प्राप्त किया जाता है।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi?c=sys*
- *https://www.youtube.com/watch?v=lsOsce_7gK8*
- *https://www.youtube.com/watch?v=lYEdR8-u9qo*
- *https://www.youtube.com/watch?v=sX6iWfQhM4w*
- *https://www.youtube.com/watch?v=slgM3nAEozM*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित क्रम वाले आव्यूहों में से प्रत्येक के अवयवों की संख्या ज्ञात कीजिए:

   (a) 2×1 (b) 3×2 (c) 3×3 (d) 3×4

2. एक 3×2 क्रम वाले आव्यूह का निर्माण कीजिए जिसके अवयव a_{ij} निम्नलिखित रूप में दिये गये हैं:

   (a) $a_{ij} = i - 2j$ (b) $a_{ij} = 3i - j$ (c) $a_{ij} = i + \frac{3}{2}j$

3. आव्यूह का क्रम क्या है?

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

   (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

4. x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए, यदि

   (a) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x+y & z \\ 6 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} x-2 & 3 \\ 0 & y+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ y+z & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} x+y & y-z \\ z-2x & y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए:

   (a) A+B (b) 2A (c) 2A−B

6. आव्यूह X ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. a तथा b के मान ज्ञात कीजिए जिससे

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-b & 2 & -2 \\ 4 & a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 2a+b & 5 \end{bmatrix}$$

8. आव्यूहों $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

के लिए सत्यापित कीजिए कि $A+(B+C) = (A+B)+C$

9. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या

AB = BA है?

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या

AB = BA है?

11. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ हो, तो A^2 ज्ञात कीजिए।

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ हो, तो

A (B+C) ज्ञात कीजिए।

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}$ हो, तो

तथा $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ हो, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

14. दिखाइए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

समीकरण $A^2 + 4A - 2I = O$ को सन्तुष्ट करता है।

Find intverse of the following matrces using elementary transformations:

15. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 16. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 17. $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 18. $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 19. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 21. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 20.1

1. $\begin{bmatrix} 56 & 65 & 71 \\ 29 & 37 & 57 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 56 & 29 \\ 65 & 37 \\ 71 & 57 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 40 & 35 & 25 \\ 10 & 5 & 8 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 40 & 10 \\ 35 & 5 \\ 25 & 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

4. (a) 6   (b) 12   (c) 8   (d) 12   (e) ab   (f) *mn*

5. (a) $1 \times 8; 2 \times 4; 4 \times 2; 8 \times 1$ (b) $1 \times 5; 5 \times 1$
   (c) $1 \times 12; 2 \times 6; 3 \times 4; 4 \times 3; 6 \times 2; 12 \times 1$
   (d) $1 \times 16; 2 \times 8; 4 \times 4; 8 \times 2; 16 \times 1$

6. (a) 4   (b) 5   (c) 4×5 (d) 20
   (e) $a_{14} = 0; a_{23} = 7; a_{34} = -3; a_{45} = 1$ तथा $a_{33} = 3$

7. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} \\ 9 & \frac{9}{2} & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} & \frac{49}{2} \\ 8 & 18 & 32 \\ \frac{25}{2} & \frac{49}{2} & \frac{81}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \\ 15 & 30 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 20.2

1. (a) G   (b) B   (c) A, D, E तथा F   (d) A, D तथा F
   (e) D तथा F   (f) F   (g) C

2. (a) $a = 2$, $b = 10$, $c = 6$, $d = -2$
   (b) $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 5$
   (c) $a = \frac{3}{2}$, $b = -2$, $c = 2$, $d = -4$

3. नहीं   4. नहीं

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 20.3

1. (a) $\begin{bmatrix} 28 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-21}{2} & -3 \\ -3 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -9 & -3 & -12 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -28 & -14 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 20 & -10 & 0 \\ -5 & 0 & 25 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -12 & 0 & -4 \\ -16 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & -20 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 20.4

1. (a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 19 & 10 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 \\ -9 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -4 & -11 & -15 \\ 11 & -10 & -10 \end{bmatrix}$

3. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \\ -2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -14 & 9 \\ 14 & 9 & 8 \\ 16 & 15 & 14 \end{bmatrix}$ 4. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 18 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 27 & 31 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-17}{5} & \frac{-21}{5} \\ \frac{-27}{5} & \frac{-31}{5} \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

हम देखते हैं कि $(A+B)' = B' + A'$

8. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -16 & -3 \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 20.5

1. $AB = \begin{bmatrix} -6 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $AB \neq BA$

2. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -3 & 13 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, $AB \neq BA$

3. $AB = \begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{bmatrix}$; BA का अस्तित्व नहीं है।

4. $BA = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$; AB का अस्तित्व नहीं है।

टिप्पणी

5. दोनों AB तथा BA के अस्तित्व नहीं हैं। AB का अस्तित्व इसलिए नहीं है क्योंकि A के स्तंभों की संख्सा B की पंक्तियों की संख्या के बराबर नहीं है। BA का अस्तित्व इसलिए नहीं है क्योंकि B के स्तंभों की संख्या A की पंक्तियों की संख्या के बराबर नहीं हैं।

6. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 17 \end{bmatrix} \quad ; AB \neq BA$

7. $AB = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 17 & 24 \\ 14 & -13 & 17 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 16 & -8 & -11 \\ 16 & 11 & 3 \\ 10 & 21 & 11 \end{bmatrix}; AB \neq BA.$

8. $AB = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; AB \neq BA.$

9. (a) $x = 3,\ y = -1$ (b) $x = -1,\ y = 2$

12. (a) $\begin{bmatrix} -14 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -14 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

13. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$; AC= BC

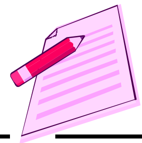
यहां, $A \neq B$ तथा $C \neq O$, फिर भी $AC = BC$
अर्थात् उभयनिष्ठ शून्येतर गुणनखंड को समीकरण के दोनों पक्षों से काट देने का नियम आव्यूहों में लागू नहीं होता।

14. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 9 \end{bmatrix}$

हम देखते हैं कि $A(B + C) = AB + AC$

16. $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ 18. (a) नहीं (b) नहीं (c) नहीं



देखें आपने कितना सीखा 20.6

1. (a) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{23}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (c) does not exist

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

आइए अभ्यास करें

1. (a) 2 (b) 6 (c) 9 (d) 12

2. (a) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 \\ \frac{7}{2} & 5 \\ \frac{9}{2} & 6 \end{bmatrix}$

3. (a) 3×1 (b) 1×3 (c) 3×2 (d) 2×3

4. (a) $x = 1, y = 2, z = 3$ (b) $x = 5, y = 1, z = 5$ (c) $x = 3, y = -3\ z = 3$

(d) $x = 2, y = 1, z = 5$

5. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. $a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{3}{2}$

9. $AB = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 38 & 43 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 17 \\ 6 & 14 & 24 \\ 4 & 21 & 37 \end{bmatrix}; AB \neq BA$

10. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; AB = BA$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

13. $x = 1, y = -4.$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

18. $\frac{1}{22}\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$