23

संबंध एवं फलन-II

311hi23

हमारे दैनिक जीवन में हमें वस्तुओं के बीच विभिन्न प्रकार के संबंध देखने को मिलते हैं। संबंध की अवधारणा को गणितीय रूप में स्थापित किया जा चुका है। हम क्रमित युग्म, कार्तीय गुणनफल संबंध, फलन उनके प्रांत तथा परिसर से परिचित है।

इस पाठ में हम संबंधों के प्रकार, फलनों के प्रतिलोम, द्विआधारी सक्रियाएं दो समुच्चयों के बीच संबंध, एक संबंध का फलन होने की स्थितियाँ, विभिन्न प्रकार के फलन और उनके गुणों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- विभिन्न प्रकार के संबंधों को परिभाषित करना
- विभिन्न प्रकार के फलनों के उदाहरणों जैसे एकैकी, बहु-एक, आच्छादक, अन्तर्क्षेपी और ऐकैकी आच्छादन (bijection) को बताकर उन्हें परिभाषित करना
- यह बताना कि क्या फलन एकैकी, बहु-एक, आच्छादक या अन्तर्क्षेपी हैं
- दो फलनों का संयोजन परिभाषित करना
- प्रतिलोम फलनों को परिभाषित करना
- प्रतिलोम के अस्तित्व की परिस्थिति बता सकना
- द्विआधारी संक्रियाओ तथा उनके गुणों की व्याख्या करना, समुच्चय के किसी अवयव का तत्समक तथा प्रतिलोम ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- संख्या पद्धति, क्रमित युग्म की अवधारणा संबंध एवं फलन की परिभाषा संबंध एवं फलन के प्रांत, सह-प्रांत, सह-प्रांत व परिसर

23.1 सम्बन्ध

23.1.1 सम्बन्ध

मान लीजिए A तथा B दो समुच्चय हैं तब समुच्चय A से समुच्चय R में सम्बन्ध R, $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है।

इस प्रकार A से B में सम्बन्ध R $\Leftrightarrow R \subseteq A \times B$

- यदि $(a, b) \in R$ है तब हम इसे aRb लिखते हैं जो कि a, b से सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित है, पढ़ा जाता है। यदि $(a, b) \notin R$ तब हम इसे $a \not R\, b$ लिखते हैं तब हम कहते हैं कि a, b से सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित नहीं है।
- यदि $n(A) = m$ तथा $n(B) = n$, तब $A \times B$ के mn क्रमित युग्म होते हैं तब A से B में कुल सम्बन्धों की संख्या 2^{mn} होती है।

23.1.2 सम्बन्धों के प्रकार

(i) स्वतुल्य संबंध

समुच्चय A पर सम्बन्ध R स्वतुल्य कहलाता है, यदि A का प्रत्येक अवयव स्वयं से सम्बन्धित हो।

इस प्रकार R स्वतुल्य होता है $\Leftrightarrow$ प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a, a) \in R$

एक सम्बन्ध R स्वतुल्य नहीं होगा यदि उनमें से एक भी अवयव $a \in A$ के लिए $(a, a) \notin R$.

मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$ एक समुच्चय है तब

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (2, 1)\}$ A पर स्वतुल्य सम्बन्ध है।

लेकिन $R_1 = \{(1, 1), (3, 3)\ (2, 1)\ (3, 2)\}$, A पर स्वतुल्य सम्बन्ध नहीं है। क्योंकि $2 \in A$ लेकिन $(2,2) \notin R$.

(ii) सममित सम्बन्ध

समुच्चय A पर सम्बन्ध R सममित सम्बन्ध कहलाता है यदि

प्रत्येक $(a, b) \in A$ के लिए $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

अर्थात् प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए $aRb \Rightarrow bRa$

माना $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा R_1 और R_2 समुच्चय A पर सम्बन्ध

$R_1 = \{(1, 3), (1, 4), (3, 1), (2, 2), (4, 1)$

एवं $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$ द्वारा परिभाषित हैं।

- R_1 समुच्चय A पर एक सममित सम्बन्ध है क्योंकि प्रत्येक $(a, b) \in R_1$ के लिए $(a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \in R_1$ या प्रत्येक $(a, b) \in A$ के लिए $aR_1b \Rightarrow bR_1a$

  लेकिन R_2 सममित नहीं है क्योंकि $(1, 3) \in R_2$ लेकिन $(3, 1) \notin R_2$.

यह आवश्यक नहीं कि समुच्चय A पर स्वतुल्य सम्बन्ध, सममित हो। उदाहरण के लिए सम्बन्ध $R =\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$, समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ पर स्वतुल्य सम्बन्ध है लेकिन यह सममित नहीं है।

(iii) संक्रमक सम्बन्ध

मान लीजिए कि A कोई समुच्चय है। A पर सम्बन्ध R संक्रमक सम्बन्ध कहलाता है यदि प्रत्येक $a, b, c \in A$ के लिए $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

अर्थात् प्रत्येक $a, b, c \in A$ के लिए aRb एवं $bRc \Rightarrow$ aRc

उदाहरण के लिए

प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर, सम्बन्ध R, $x\text{R}y \Rightarrow x, y$ से छोटा है, द्वारा परिभाषित किया जाता है।

संक्रमक है क्योंकि प्रत्येक $x, y, z \in \text{N}$ के लिए $x < y$ तथा $y < z \Rightarrow x < z$

अर्थात् $x\text{R}y$ तथा $y\text{R}z \Rightarrow x\text{R}z$

दूसरा उदाहरण लेने पर

माना समतल में सभी सरल रेखाओं का समुच्चय A है तब A में सम्बन्ध 'के समांतर है' संक्रमक सम्बन्ध है। क्योंकि प्रत्येक $l_1, l_2, l_3 \in \text{A}$ के लिए $l_1 \parallel l_2$ तथा $l_2 \parallel l_3 \Rightarrow l_1 \parallel l_3$.

उदाहरण 23.1. स्वतुल्यता, सममिति तथा संक्रमकता के लिए सम्बन्ध R की जाँच कीजिए जहाँ R इस प्रकार परिभाषित है कि प्रत्येक $l_1, l_2 \in \text{A}$ के लिए $l_1\text{R}l_2$ यदि $l_1 \perp l_2$।

हल : माना समतल में सभी रेखाओं का समुच्चय A है। दिया है कि प्रत्येक $l_1, l_2 \in \text{A}$ के लिए $l_1\text{R}l_2 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$।

स्वतुल्यता: R स्वतुल्य नहीं है क्योंकि एक रेखा स्वयं के लम्बवत् नहीं हो सकती अर्थात् $l \perp l$ सत्य नहीं है।

सममितता : माना $l_1, l_2 \in \text{A}$ अतः $l_1\text{R}l_2$

तब $l_1 \text{R} l_2 \Rightarrow l_1 \perp l_2 \Rightarrow l_2 \perp l_1 \Rightarrow l_2\text{R}l_1$

A पर R सममित है

संक्रमकता:

R संक्रमक नहीं है क्योंकि $l_1 \perp l_2$ तथा $l_2 \perp l_3 \not\Rightarrow l_1 \perp l_3$

23.1.3 समतुल्य सम्बन्ध

समुच्चय A पर सम्बन्ध R समतुल्य कहलाता है यदि

(i) यह स्वतुल्य है अर्थात् प्रत्येक $a \in \text{A}$ के लिए $(a, a) \in \text{R}$

(ii) यह सममित है अर्थात् प्रत्येक $a, b \in \text{A}$ के लिए $(a, b) \in \text{R} \Rightarrow (b, a) \in \text{R}$

(iii) यह संक्रमक है अर्थात् प्रत्येक $a, b, c \in \text{A}$ के लिए $(a, b) \in \text{R}$ तथा $(b, c) \in \text{R}$ $\Rightarrow (a, c) \in \text{R}$

उदाहरण के लिए सम्बन्ध ''के सर्वांगसम है'' एक समतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि

(i) यह स्वतुल्य है जैसे प्रत्येक $\Delta \in \text{S}$ के लिए $\Delta \cong \Delta \Rightarrow (\Delta, \Delta) \in \text{S}$ जहाँ S त्रिभुजों का समुच्चय है।

(ii) यह सममित है जैसे $\Rightarrow \Delta_1 \text{R} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 \cong \Delta_1$

$\Rightarrow \Delta_2 \text{R} \Delta_1$

(iii) यह संक्रमक है $\Delta_1 \cong \Delta_2$ तथा $\Delta_2 \cong \Delta_3 \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_3$

इसका मतलब है कि $(\Delta_1, \Delta_2) \in \text{R}$ तथा $(\Delta_2, \Delta_3) \in \text{R} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_3) \in \text{R}$

उदाहरण 23.2. दर्शाइए कि एक समतल में सभी त्रिभुजों के समुच्चय A पर परिभाषित सम्बन्ध $\text{R} = \{(\text{T}_1, \text{T}_2) : \text{T}_1, \text{T}_2$ के समरूप है$\}$ एक समतुल्य सम्बन्ध है।

हल : हम सम्बन्ध R के निम्नलिखित गुणों का निरीक्षण करते हैं

स्वतुल्यता: हम जानते हैं कि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के समरूप है अतः प्रत्येक $T \in A$ के लिए $(T, T) \in R \Rightarrow R$ के लिए परावर्त्य है।

सममितता माना $(T_1, T_2) \in R$, तब

$$(T_1, T_2) \in R \quad \Rightarrow T_1, T_2 \text{ के समरूप है।}$$
$$\Rightarrow T_2, T_1 \text{ के समरूप है।}$$
$$\Rightarrow (T_2, T_1) \in R, \text{ इसलिए } R \text{ सममित है।}$$

संक्रमकता: माना $T_1, T_2, T_3 \in A$ माना $(T_1, T_2) \in R$ तथा $(T_2, T_3) \in R$.

तब $(T_1, T_2) \in R$ तथा $(T_2, T_3) \in R$

$\Rightarrow T_1, T_2$ के समरूप है तथा T_2, T_3 के समरूप है।

$\Rightarrow T_1, T_3$ के समरूप है।

$\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$

अतः R एक समतुल्य सम्बन्ध है।

देखें आपने कितना सीखा 23.1

1. माना एक समतल में सभी रेखाओं के समुच्चय में सम्बन्ध R को $(l_1, l_2) \in R \Rightarrow$ रेखा l_1, l_2 के समान्तर है, द्वारा परिभाषित किया जाता है। दर्शाइए कि R एक समतुल्य सम्बन्ध है।
2. दर्शाइए कि एक समतल में स्थित सभी बिन्दुओं के समुच्चय A, में सम्बन्ध R = {(P, Q), बिन्दु P से मूलबिन्दु की दूरी तथा बिन्दु Q से मूलबिन्दु की दूरी समान है} द्वारा परिभाषित किया गया है, एक समतुल्य सम्बन्ध है।
3. दर्शाइए कि समुच्चय $A = \{x \in z;\ \leq x \leq 12\}$ में संबंध R जो निम्न प्रकार परिभाषित है।

   (i) $R = \{(a, b) : |a - b|, 4$ का गुणज है$\}$

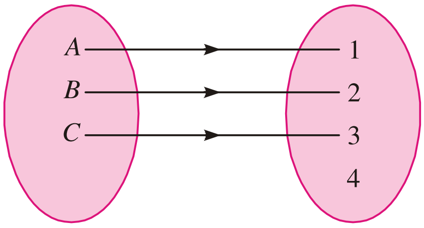
   (ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$ एक समतुल्य संबंध है।
4. सिद्ध कीजिए कि R से R में एक संबंध 'का गुणनखंड है' परावर्त्य तथा संक्रमक है परंतु सममित नहीं है।
5. यदि R तथा S दो समतुल्य संबंध हो तो सिद्ध कीजिए कि $R \cap S$ भी एक समतुल्य संबंध होगा।
6. सिद्ध कीजिए कि $N \times N$ समुच्चय पर एक संबंध R जो $(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$, $\forall\ (a, b), (c, d) \in N \times N$ द्वारा परिभाषित है, एक समतुल्य संबंध है।

23.2 फलनों का वर्गीकरण

मान लीजिए कि A से B पर f एक फलन है। यदि B समुच्चय का प्रत्येक अवयव समुच्चय A के कम से कम एक अवयव का प्रतिबिम्ब हो, अर्थात् यदि समुच्चय B में कोई भी अवयव अयुग्मित न हो तब फलन f समुच्च्य A का समुच्चय B पर आच्छादक कहलायेगा अन्यथा हम कहते हैं कि समुच्चय A समुच्चय B पर एकैकी प्रतिचित्रित फलन है

ऐसे फलन, जिसमें समुच्च्य A का प्रत्येक अवयव समुच्च्य B के अलग अवयव से प्रतिचित्रित होता है, को एकैकी फलन कहते हैं।

एकैकी फलन



चित्र 23.1

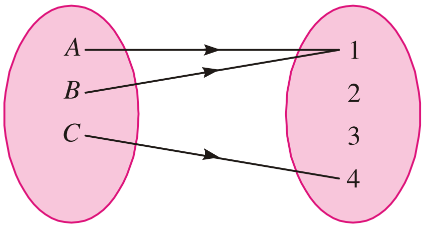
{A, B, C} प्रांत है।

{1, 2, 3, 4} सहप्रांत है।

{1, 2, 3} परिसर है।

किसी फलन में समुच्चय A के एक से अधिक अवयव समुच्चय B के एक ही अवयव पर प्रतिचित्रित हो सकते हैं। इस प्रकार के फलन को बहु एक फलन कहते हैं।

बहु–एक फलन



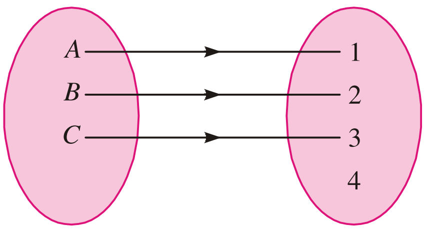
चित्र 23.2

प्रान्त {A, B, C} है।

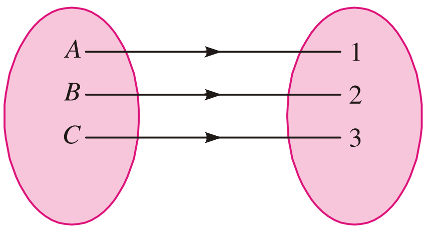
सहप्रान्त {1, 2, 3, 4} है।

परिसर {1, 4} है।

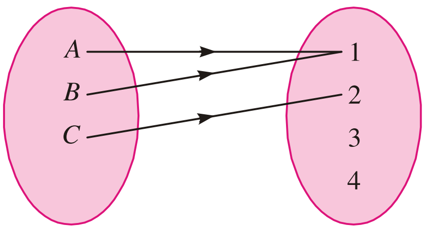
ऐसा फलन, जो एकैकी और आछादक दोनों हो, एकैकी आच्छादक फलन कहलाता है।



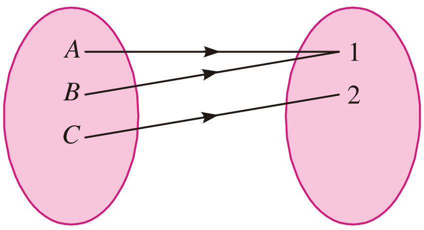
चित्र 23.3



चित्र 23.4



चित्र 23.5



चित्र 23.6

चित्र 23.3 एकैकी फलन दर्शाता है जिसमें प्रतिचित्रण $\{A, B, C\}$ से $\{1, 2, 3, 4\}$ पर अन्तर्क्षेपी है।

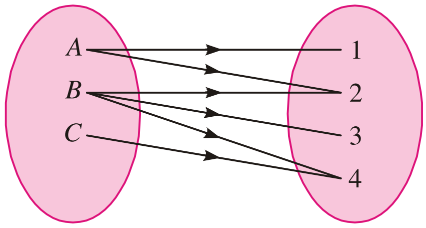
चित्र 23.4 एकैकी फलन दर्शाता है जिसमें प्रतिचित्रण $\{A, B, C\}$ से $\{1, 2, 3\}$ पर आच्छादक है।

चित्र 23.5 बहु–एक फलन दर्शाता है जिसमें प्रतिचित्रण $\{A, B, C\}$ से $\{1, 2, 3, 4\}$ पर अन्तर्क्षेपी है।

चित्र 23.6 बहु–एक फलन दर्शाता है और प्रतिचित्रण $\{A, B, C\}$ से $\{1, 2\}$ पर आच्छादक है।

चित्र 23.4 में दर्शाया गया फलन, एकैकी–आच्छादक भी है।

टिप्पणी: एक–बहु सम्बन्ध भी होते हैं। परन्तु हमारी फलन की परिभाषा से यह फलन नहीं है। नीचे दिया गया चित्र इसकी व्याख्या करता है।



चित्र 23.7

उदाहरण 23.3. बिना ग्राफ की सहायता से सिद्ध कीजिए कि फलन $F: R \to R$, जो $f(x) = 4 + 3x$ द्वारा परिभाषित है, एकैकी फलन है।

हल : एकैकी फलन होने के लिए

$$F(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall \quad x_1, x_2 \in \text{ प्रान्त}$$

$\therefore$ अब $f(x_1) = f(x_2)$ से हमें प्राप्त होता है

$$4 + 3x_1 = 4 + 3x_2 \text{ या } x_1 = x_2$$

$\therefore$ f एकैकी फलन है।

उदाहरण 23.4. सिद्ध कीजिए कि फलन

$F: R \to R$, जो $f(x) = 4x^3 - 5$ द्वारा परिभाषित है, एकैकी आच्छादक फलन है।

हल : $f(x_1) = f(x_2) \quad \forall \quad x_1, x_2 \in$ प्रान्त

$\therefore \quad 4x_1^3 - 5 = 4x_2^3 - 5$

$\Rightarrow \quad x_1^3 = x_2^3$

$\Rightarrow \quad x_1^3 - x_2^3 = 0 \Rightarrow \quad (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$

या $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$ यहाँ x_1 तथा x_2 के कोई वास्तविक मान नहीं है, अत: इसे छोड़ देते हैं,

$\therefore$ F एकैकी फलन है।

पुन: मान लीजिए कि $y = (x)$ जहाँ $y \in$ सहप्रान्त, $x \in$ प्रान्त

हमें प्राप्त होता है : $y = 4x^3 - 5$ या $x = \left(\frac{y+5}{4}\right)^{1/3}$

$\therefore$ प्रत्येक $y \in$ सहप्रान्त, प्रान्त में x ऐसा होगा कि $f(x) = y$

अतः F आच्छादक फलन है।

अतएव, F ऐकैकी-आच्छादक है।

उदाहरण 23.5. सिद्ध करो कि $F : R \to R$ जो $F(x) = x^2 + 3$ द्वारा परिभाषित है न तो एकैकी फलन और न ही आच्छादक फलन है।

हल : $F(x_1) = F(x_2)\ \forall\ x_1, x_2 \in$ प्रान्त से हमें प्राप्त होता है

$$x_1^2 + 3 = x_2^2 + 3 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

या $$x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ या } x_1 = -x_2$$

अर्थात् F एकैकी फलन नहीं है।

पुनः मान लीजिए कि $y = F(x)$ जहाँ $y \in$ सहप्रान्त, $x \in$ प्रान्त

$\Rightarrow \quad y = x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y-3}$

$\Rightarrow \quad \forall\ y < 3$ x का कोई भी वास्तविक मान प्रान्त में नहीं है।

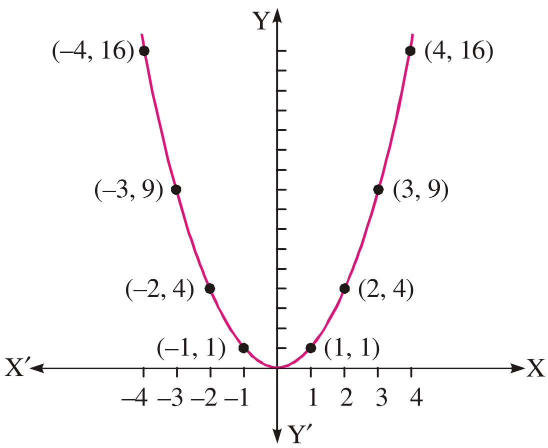
$\therefore \quad$ F एक आच्छादक फलन नहीं है।

23.3 फलन का ग्राफ के रूप में निरूपण

चूँकि फलन क्रमित युग्मों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।
अतः फलन का ग्राफीय प्रदर्शन सदैव सम्भव है। उदाहरणार्थ, आइए $y = x^2$ पर विचार करें–

$$y = x^2$$

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	0	1	1	4	4	9	9	16	16



चित्र 23.8

मॉड्यूल - VII

संबंध एवं फलन

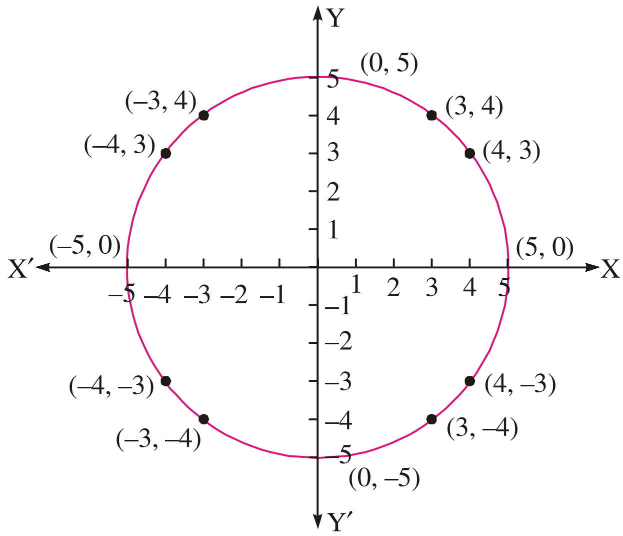
टिप्पणी

क्या यह एक फलन प्रदर्शित करता है?

हाँ, यह एक फलन प्रदर्शित करता है क्योंकि x के प्रत्येक मान के लिए y का एक अद्वितीय मान है। आइए अब समीकरण $x^2 + y^2 = 25$ पर विचार करें।

$$x^2 + y^2 = 25$$

x	0	0	3	3	4	4	5	–5	–3	–3	–4	–4
y	5	–5	4	–4	3	–3	0	0	4	–4	3	–3



चित्र 23.9

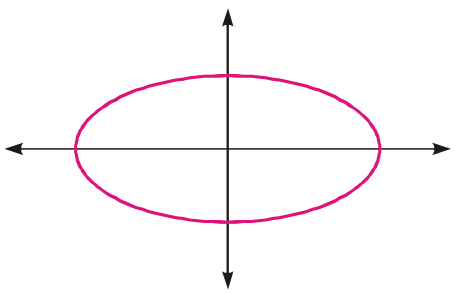
यह ग्राफ एक वृत्त प्रदर्शित करता है?

क्या यह एक फलन प्रदर्शित करता है?

नहीं, यह फलन प्रदर्शित नहीं करता है क्योंकि x के एक (समान) मान के लिए y का अद्वितीय मान नहीं है।

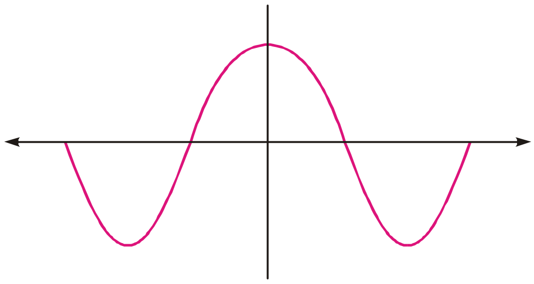
देखें आपने कितना सीखा 23.2

1. (i) क्या यह ग्राफ एक फलन प्रदर्शित करता है।



चित्र 23.10

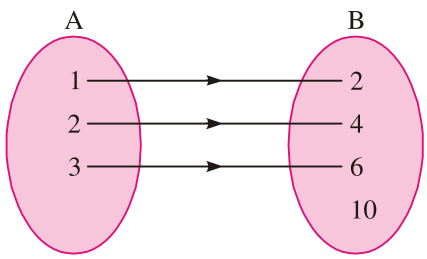
(ii) क्या यह ग्राफ एक फलन प्रदर्शित करता है।



चित्र 23.11

2. निम्नलिखित में से कौन से फलन अन्तर्क्षेपी फलन है?

(a)



चित्र 23.12

(b) $f(x)=x^2$ जहाँ $f:N \to N$, यहाँ N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है।

(c) $f(x)=x$ जहाँ $f:N \to N$

3. निम्नलिखित में से कौन से फलन आच्छादक है यदि $f:R \to R$?

(a) $f(x)=115x+49 \quad \forall\ x \in R$ (b) $f(x)=|x| \quad \forall\ x \in N$

4. निम्नलिखित में से कौन से फलन एकैकी फलन है ?

(a) $f:\{20,21,22\} \to \{40,42,44\}$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x)=2x$

(b) $f:\{7,8,9\} \to \{10\}$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x)=10$

(c) $f:I \to R$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x)=x^3$

(d) $f:R \to R$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x)=2+x^4$

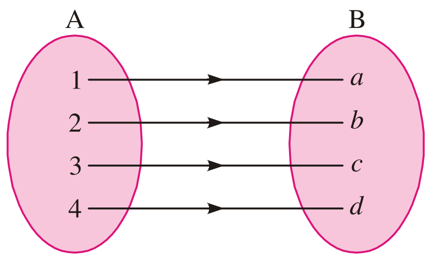
(e) $f:N \to N$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x)=x^2+2x$

5. निम्नलिखित में से कौन-कौन से फलन बहु-एक फलन है ?

(a) $f:\{-2,-1,1,2\} \to \{2,5\}$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x)=x^2+1$

(b) $f:\{0,1,2\} \to \{1\}$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x)=1$

(c)



चित्र 23.13

(d) $f : N \rightarrow N$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x) = 5x + 7$

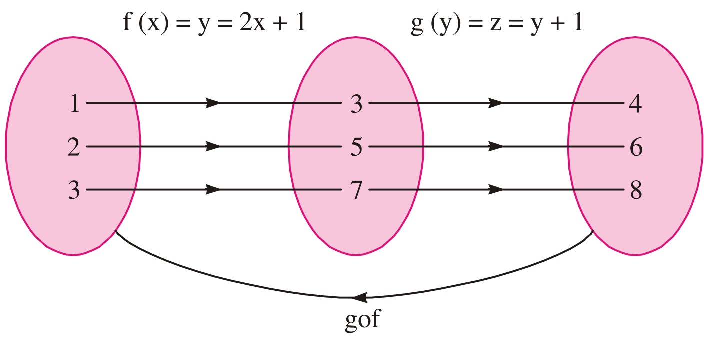
23.4 फलनों का संयोजन

नीचे दिए गए दो फलनों पर विचार कीजिए

$$y = 2x + 1, \qquad x \in \{1, 2, 3\}$$

$$z = y + 1, \qquad y \in \{3, 5, 7\}$$

तब z दो फलनों x तथा y का संयोजन है क्योंकि z, y के पदों में परिभाषित है तथा y, x के पदों में परिभाषित है। इसका ग्राफीय निरुपण हम निम्न प्रकार से दिखा सकते हैं।



चित्र 23.19

फलन g तथा f का संयोजन, मान लीजिए g0f, फलन f का फलन g के रूप में परिभाषित होता है।

यदि $f : A \rightarrow B$ तथा $g : B \rightarrow C$

तब gof : A से C

माना $f(x) = 3x + 1$ और $g(x) = x^2 + 2$

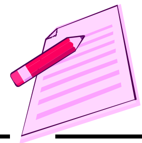
तब $$fog(x) = f(g(x))$$

$$= f(x^2 + 2)$$

$$= 3(x^2 + 2) + 1 = 3x^2 + 7 \qquad \text{(i)}$$

और $$gof(x) = g(f(x))$$

$$= g(3x + 1)$$



$$= (3x+1)^2 + 2 = 9x^2 + 6x + 3 \qquad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) से जाँच कीजिए कि क्या

$fog = gof$ है?

स्पष्टत: $fog \neq gof$

इसी प्रकार $fof(x) = f(f(x)) = f(3x+1)$ [fof को फलन f का फलन पढ़िए]

$$= 3(3x+1)+1$$

$$= 9x + 3 + 1 = 9x + 4$$

$gog(x) = g(g(x)) = g(x^2+2)$ [फलन g का फलन पढ़िए]

$$= (x^2+2)^2 + 2$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 + 2$$

$$= x^4 + 4x^2 + 6$$

उदाहरण 23.6. यदि $f(x) = \sqrt{x+1}$ और $g(x) = x^2 + 2$ तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

हल : $fog(x) = f(g(x))$

$$= f(x^2+2)$$

$$= \sqrt{x^2+2+1}$$

$$= \sqrt{x^2+3}$$

$gof(x) = g(f(x))$

$$= g(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 + 2$$

$$= x + 1 + 2 = x + 3.$$

यहाँ हम पुन: देखते हैं कि $(fog) \neq gof$

उदाहरण 23.7. यदि $f(x) = x^3,\ f: R \to R$

$g(x) = \dfrac{1}{x},\quad g: R - \{0\} \to R - \{0\}$ तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

हल : $fog(x) = f(g(x))$

$$= f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{1}{x^3}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \frac{1}{x^3}$$

यहाँ हम देखते हैं कि $fog = gof$

मॉड्यूल - VII

संबंध एवं फलन

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 23.3

1. निम्नलिखित फलनों के लिए fog, gof, fof तथा gog ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{1-x}, \; x \neq 1.$$

2. निम्नलिखित फलनों के लिए, fog, gof, fof तथा gog लिखिए :

(a) $f(x) = x^2 - 4, \; g(x) = 2x + 5$

(b) $f(x) = x^2, \; g(x) = 3$

(c) $f(x) = 3x - 7, \; g(x) = \frac{2}{x}, \; x \neq 0$

3. मान लीजिए कि $f(x) = |x|, \; g(x) = [x]$ तो सत्यापित कीजिए कि $fog \neq gof$

4. मान लीजिए कि $f(x) = x^2 + 3, g(x) = x - 2$

सिद्ध कीजिए कि $fog \neq gof$ और $f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = g\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

5. यदि $f(x) = x^2, \; g(x) = \sqrt{x}$ तो दर्शाइए कि $fog = gof$

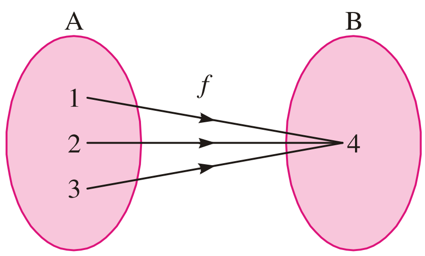
6. मान लीजिए कि $f(x) = |x|, \; g(x) = (x)^{1/3}, \; f(x) = \frac{1}{x}; \; x \neq 0$ तो ज्ञात कीजिए :

(a) fog (b) goh (c) foh (d) hog (e) fogoh.

{संकेत: $(fogoh)(x) = f(g(h(x)) = f(g\left(\frac{1}{x}\right)$}

23.5 एक फलन का प्रतिलोम

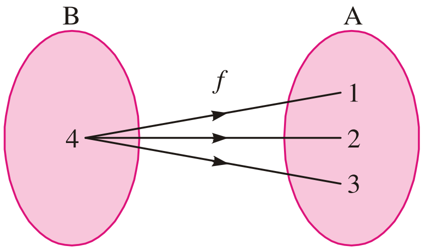
(A) नीचे दिए गए सम्बन्ध पर विचार कीजिए–



चित्र 23.20

यह बहु–एक फलन है। आइए अब हम इसका प्रतिलोम ज्ञात करें। चित्र में इसे निम्नलिखित रूप में दिखाया जा सकता है :

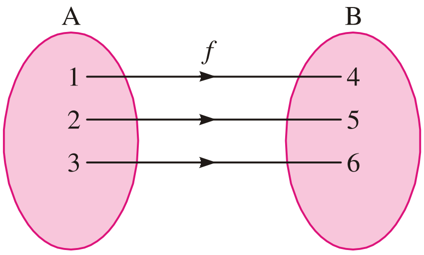
टिप्पणी



चित्र 23.21

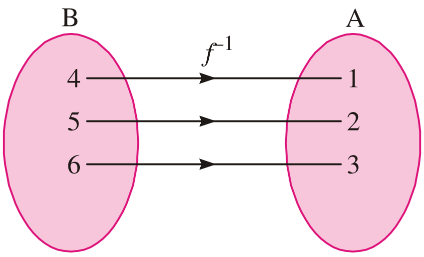
स्पष्टतः यह सम्बन्ध फलन प्रदर्शित नहीं करता। क्यों ?

(B) अब एक अन्य सम्बन्ध लीजिए :



चित्र 23.22

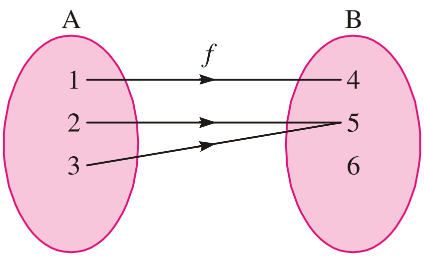
यह एक एकैकी आच्छादक फलन प्रदर्शित करता है। आइए अब हम इस सम्बन्ध का प्रतिलोम ज्ञात करें, जिसे चित्र द्वारा नीचे दिए गए रूप में दर्शाया जा सकता है।



चित्र 23.23

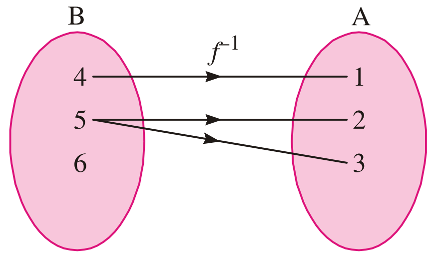
यह फलन प्रदर्शित करता है।

(C) नीचे दिए गए सम्बन्ध पर विचार कीजिए :



चित्र 23.24

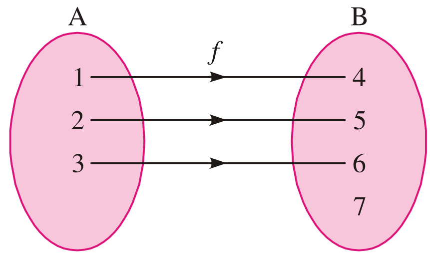
यह बहु-एक फलन निरूपित करता है। अब सम्बन्ध का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए, जिसे नीचे दिए गए रूप से दर्शाया जा सकता है।



चित्र 23.25

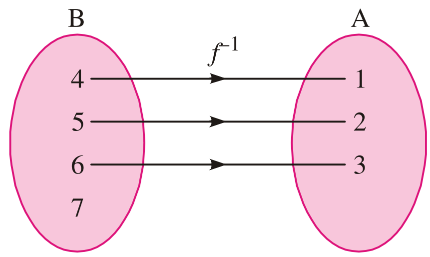
यह फलन प्रदर्शित नहीं करता क्योंकि B के अवयव 6 का सम्बन्ध 'A' के किसी अवयव से नहीं है।

(D) यहाँ दिए गए सम्बन्ध को लीजिए :



चित्र 23.26

यह A से B में एक एकैकी फलन है। इस सम्बन्ध का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।



चित्र 23.27

यह फलन प्रदर्शित नहीं करता है क्योंकि B के अवयव 7 का सम्बन्ध 'A' के किसी भी अवयव से नहीं है। उपर्युक्त सम्बन्धों से हम देखते हैं कि सम्बन्धों को उलटने पर प्राप्त सम्बन्ध फलन हो भी सकता है और नहीं भी।

हम देखते हैं कि फलन के प्रतिलोम का अस्तित्व तभी है जब फलन एकैकी आच्छादक हो।

देखें आपने कितना सीखा 23.4

1. (i) दर्शाइए कि फलन के प्रतिलोम का अस्तित्व है :

$$y = 4x - 7$$

(ii) मान लीजिए कि 'f' एक एकैकी आच्छादक फलन है जिसका प्रान्त A तथा परिसर B है। इसके प्रतिलोम फलन का प्रान्त तथा परिसर लिखिए।

2. यदि प्रतिलोम फलन का अस्तित्व है तो निम्नलिखित फलनों का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = x + 3 \quad \forall\, x \in R$

(b) $f(x) = 1 - 3x \quad \forall\, x \in R$

(c) $f(x) = x^2 \quad \forall\, x \in R$

(d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}, \quad x \neq 0 \quad x \in R$

23.6 द्विआधारी संक्रियाएँ

माना A तथा B अरिक्त समुच्चय हैं तब $A \times A$ से A में एक फलन A पर द्विआधारी संक्रिया कहलाता है।

यदि A पर एक बाइनरी संक्रिया * द्वारा दर्शायी जाती है, तब $A \times A$ के क्रमित युग्म (a, b) से A का एक अद्वितीय अवयव, $a * b$ से दर्शाया जाता है।

अवयवों को एक निश्चित क्रम में लेते हैं अर्थात् युग्म (a, b) तथा (b, a) से संबंधित अवयव भिन्न–भिन्न प्रकार से होते हैं। अर्थात् $a * b$, $b * a$ के असमान हो सकता है।

माना A एक अरिक्त समुच्चय है '*', A पर एक संक्रिया है, तब

1. * संक्रिया द्वारा A बंद कहलाता है यदि और केवल यदि प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए $a * b \in A$ है।
2. संक्रिया क्रमविनिमेय कहलाती है यदि और केवल यदि प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए $a * b = b * a$ ।
3. संक्रिया सहचारी कहलाती है यदि और केवल यदि प्रत्येक $a, b, c \in A$ के लिए $(a * b) * c = a * (b * c)$ ।
4. एक अवयव $e \in A$ तत्समक अवयव है यदि $e * a = a = a * e$
5. एक अवयव $a \in A$ व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि उसमें $b \in A$ इस प्रकार स्थित हो कि $a * b = e = b * a$. b, a का प्रतिलोम कहलाता है।

नोटः यदि एक अरिक्त समुच्चय A संक्रिया * के अन्तर्गत बंद है, तब संक्रिया *, A पर बाइनरी संक्रिया कहलाती है।

उदाहरण के लिए मानलीजिए A सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा *, A पर एक संक्रिया है, जो प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए $a * b = \dfrac{ab}{3}$ द्वारा परिभाषित है।

प्रत्येक $a, b, c \in A$, के लिए, हमें प्राप्त होता है।

(i) $a * b = \frac{ab}{3}$ एक धनात्मक वास्तविक संख्या है $\Rightarrow$ A दी गई संक्रिया के अन्तर्गत बन्द है।

$\therefore$ *, A पर एक द्विआधारी संक्रिया है।

(ii) $a * b = \frac{ab}{3} = \frac{ba}{3} = b * a \Rightarrow$ संक्रिया * क्रमविनिमेय है।

(iii) $(a*b)*c = \frac{ab}{3}*c = \frac{\frac{ab}{3}.c}{3} = \frac{abc}{9}$ तथा $a*(b*c) = a*\frac{bc}{3} = \frac{a}{3}.\frac{bc}{3} = \frac{abc}{9}$

$\Rightarrow$ $(a*b)*c = a*(b*c) \Rightarrow$ संक्रिया * सहचारी है।

(iv) $3 \in A$ इस प्रकार स्थित है कि $3 * a = 3.\frac{a}{3} = a = \frac{a}{3}.3 = a*3$

$\Rightarrow$ 3 एक तत्समक अवयव है।

(v) प्रत्येक $a \in A$ के लिए, $\frac{9}{a} \in A$ इस प्रकार स्थित है, कि $a*\frac{9}{a} = \frac{a.\frac{9}{a}}{3} = 3$ तथा

$\frac{9}{a}*a = \frac{\frac{9}{a}.a}{3} = 3 \Rightarrow a*\frac{9}{a} = 3 = \frac{9}{a}*a \Rightarrow$ A का प्रत्येक अवयव व्युत्क्रमणीय है, तथा

a का प्रतिलोम $\frac{9}{a}$ है।

देखें आपने कितना सीखा 23.5

1. ज्ञात कीजिए कि नीचे परिभाषित संक्रिया एक द्विआधारी संक्रिया है या नहीं

   (i) $a*b = \frac{a+b}{2} \ \forall\ a, b \in N$

   (ii) $a*b = a^b, \forall a.b \in Z$

   (iii) $a*b = a^2 + 3b^2, \forall a.b \in R$

2. यदि $A = \{1, 2\}$ है तो A पर परिभाषित द्विआधारी सक्रियाओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

3. माना Q (सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय) पर एक द्विआधारी संक्रिया इस प्रकार परिभाषित की जाती है सभी $a, b \in Q$ के लिए $a * b = a + 2b$ हो तो

सिद्ध कीजिए कि:

(i) दी गई संक्रिया क्रमविनिमेय नहीं है।

(ii) दी गयी संक्रिया सहचारी नहीं है।

4. माना *, Q^+ पर $a * b = \frac{ab}{3} \forall, a, b \in Q^+$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है तो 4 * 6 का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

5. माना $A = N \times N$ तथा * समुच्चय A पर $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है। सिद्ध कीजिए कि * क्रम विनिमेय तथा सहचारी है। यदि हो तो A का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

6. एक द्विआधारी संक्रिया * समुच्चय $Q - \{-1\}$ पर $a * b = a + b + ab; \forall\, a, b \in Q\{-1\}$ द्वारा परिभाषित है। Q का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए। $Q - \{-1\}$ में किसी अवयव का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।

आइये दोहराएँ

- सम्बन्ध $(a, a) \in R\ \forall\ a \in X$ का X में परावर्त्य सम्बन्ध R है।
- X में सममित सम्बन्ध R, सम्बन्ध $(a, b) \in R$ इसका तात्पर्य $(b, a) \in R$ को संतुष्ट करता है।
- X में ट्रांजीटिव सम्बन्ध R, सम्बन्ध $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$ इसका तात्पर्य है कि $(a, c) \in R$ को संतुष्ट करता है।
- X में समतुल्य सम्बन्ध R सम्बन्ध परावर्त्य, सममित, ट्रांजीटिव है।
- समुच्चय A पर द्विआधारी संक्रिया * फलन * $A \times A$ से A में है।
- यदि $a * b = b * a$ सभी $a, b \in A$ के लिए, तब संक्रिया क्रम विनिमेय कहलाती है।
- यदि $(a * b) * c = a * (b * c)$, सभी $a, b, \in A$ के लिए, तब संक्रिया सहचारी कहलाती है।
- यदि $e * a = a = a * e$ सभी $a \in A$ के लिए तब अवयव $e \in A$ तत्समक अवयव कहलाता है।
- यदि $a * b = e = b * a$ तब a तथा b एक दूसरे के प्रतिलोम होते हैं।
- अवयवों का एक युग्म जो एक विशेष क्रम में होता है उसे क्रमित युग्म कहलाता है।
- यदि $n(A) = p$, $n(B) = q$ तथा $n(A \times B) = pq$
- $R \times R = \{(x, y) : x, y \in R\}$ तथा $R \times R \times R = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$
- एक फलन में $f : A \to B$, B, f का सहप्रांत है।
- $f, g : X \to R$ तथा $X \subset R$, तब

  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

  $(f\,.\,g)x = f(x)\,.\,g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$
- एक वास्तविक फलन, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है या इनमें से इसके उपसमुच्चय इसके प्रांत तथा परिसर दोनों हैं।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/13pure/02functions/06composite/index.shtml*
- *http://mathworld.wolfram.com/Composition.html*
- *http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algebra/BinaryColorDevice.shtml*
- *http://mathworld.wolfram.com/BinaryOperation.html*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित फलनों के लिए fog, gof, fof तथा gog लिखिए :

(a) $f(x) = x^3$ $\qquad g(x) = 4x - 1$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$ $\qquad g(x) = x^2 - 2x + 3$

(c) $f(x) = \sqrt{x-4}, x \geq 4$ $\qquad g(x) = x - 4$

(d) $f(x) = x^2 - 1$ $\qquad g(x) = x^2 + 1$

2. (a) मान लीजिए कि $f(x) = |x|$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $h(x) = x^{1/3}$, fogoh ज्ञात कीजिए।

(b) $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 2x^2 + 1$

fog(3) तथा gof(3) ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित में कौन से समीकरण ऐसा फलन दर्शाते हैं जिसके प्रतिलोम का अस्तित्व है ?

(a) $f(x) = |x|$ $\qquad$ (b) $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

(c) $f(x) = x^2 - 1, x \geq 0$ $\qquad$ (d) $f(x) = \dfrac{3x-5}{4}$ $\qquad$ (e) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ $x \neq 1$

4. यदि $gof(x) = |\sin|$ तथा $gof(x) = (\sin\sqrt{x})^2$ तो f(x) तथा g(x) ज्ञात कीजिए।

5. यदि * समुच्चय Q पर $a * b = \dfrac{a+b}{3}, \forall, a, b \in Q$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया हो तो सिद्ध कीजिए की * Q पर क्रमविनिमेय है।

6. यदि * परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q पर $a * b = \dfrac{ab}{5}, \forall, a, b \in Q$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया हो तो सिद्ध कीजिए कि * समुच्चय Q पर सहचारी है।

7. दिखाइए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में एक संबंध R, जो कि $R = \{(a, b)\} : a \leq b^2\}$ द्वारा परिभाषित है, ना तो स्वतुल्य है, ना सममित है और ना ही संक्रमक है।

8. जांच कीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5, 6} में एक संबंध R, जो कि $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित है, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमण है।

9. दर्शाइए कि समुच्चय A में एक संबंध R, जो कि, $R = \{(a, b) \forall : a = b\}$ $a, b \in A$, एक तुल्यता संबंध है।

10. यदि संबंध $A = N \times N$ से परिभाषित है, जहां N एक प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है। यदि सभी $(a, b), (c, d) \in A$ के लिए $* : A \times A \to A$ इस प्रकार परिभाषित है कि $(a, b) * (c, d) = \{ad + bc, bd)$ तब दिखाइए कि

    (i) * क्रम विनिमेय है।

    (ii) * सहचारी है।

    (iii) संक्रिया * के संबंध में तत्समक अवयव अस्तित्व में नहीं है।

11. प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N पर * एक द्विआधारी सेक्रिया इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = ab$ जहां सभी $a, b \in N$

    (i) * क्रमविनिमेय है (ii) * सहचारी है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 23.2

1. (i) नहीं (ii) हाँ 2. (a), (b)

3. (a) 4. (a), (c), (e) 5. (a), (b)

देखें आपने कितना सीखा 23.3

1. (i) $fog = \dfrac{x^2}{(1-x)^2} + 2$ (ii) $gof = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

   (iii) $fof = x^4 + 4x^2 + 6$ (iv) $gog = x$

2. (a) $fog = 4x^2 + 20x + 21$

   $gof = 2x^2 - 3$

   $fof = x^4 - 8x^2 + 12$

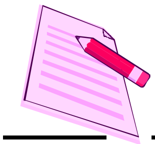
   $gog = 4x + 15$

   (b) $fog = 9,\ gof = 3,\ fof = x^4,\ gog = 3$

   (c) $fog = \dfrac{6-7x}{x},\ gof = \dfrac{2}{3x-7},\ fof = 9x - 28,\quad gog = x$

6. (a) $fog = \left| x^{\frac{1}{3}} \right|$ (b) $goh = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (c) $foh = \left| \dfrac{1}{x} \right|$

   (d) $hog = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (e) $fogoh(1) = 1$



टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 23.4

1. (ii) प्रांत B है. परिसर A है

2. (a) $f^{-1}(x) = x - 3$ (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{3}$

(c)प्रतिलोम का अस्तित्व नहीं है। (d) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$

देखें आपने कितना सीखा 23.5

1. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ

2. 16 4. $\dfrac{9}{8}$ 5. $(0, 0)$ 6. तत्समक $= 0$ $a^{-1} = \dfrac{a}{a+1}$

आइए अभ्यास करें

1. (a) $fog = (4x-1)^3$, $gof = 4x^3 - 1$, $fof = x^9$, $gog = 16x - 5$

(b) $fog = \dfrac{1}{(x^2 - 2x + 3)^2}$, $gof = \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 1}{x^4}$,

$fog = x^4$, $gog = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

(c) $fog = \sqrt{x-8}$, $gof = \sqrt{x-4} - 4$,

$fof = \sqrt{\sqrt{x-4} - 4}$, $gog = x - 8$

(d) $fog = x^4 + 2x^2$, $gof = x^4 - 2x^2 + 2$,

$fof = x^4 - 2x^2$, $gog = x^4 + 2x^2 + 2$

2. (a) $\left|\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right|$ (b) $(fog)(3) = 364, (gof)(3) = 289$

3. (c), (d), (e)

4. $f(x) = \sin 2x, g(g) = \sqrt{x}$

8. स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं, संक्रमक नहीं

9. हां, R एक तुल्यता संबंध है।

11. (i) क्रमविनिमेय नहीं