311hi27

27

त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलज

त्रिकोणमिति गणित की वह शाखा है, जो उच्चत्तर गणित की अन्य शाखाओं जैसे कैलकुलस (कलन) सदिश, त्रिविम ज्यामिति, फलन- प्रसंवादी (Harmonic) अथवा सरल फलनों के अध्ययन के लिए अनिवार्य है। त्रिकोणमितीय फलन के उपयोग के बिना उन पर क्रियाएँ करना असंभव प्रतीत होता है। कुछ विशेष सीमाओं तक त्रिकोणमितीय फलन हमें प्रतिलोम भी देते हैं।

अब प्रश्न यह है कि क्या अवकलज ज्ञात करने के वे सभी नियम जो हमने अभी तक पढ़े हैं त्रिकोणमितीय फलनों के लिए भी लागू हैं?

इस पाठ में हम इसी प्रश्न का हल ढूढ़ेंगे तथा इस क्रिया में हम त्रिकोणमितीय फलनों तथा उनके प्रतिलोमों के अवकलजों को ज्ञात करने के सूत्र या परिणाम ज्ञात करेंगे। जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम त्रिकोणमितिय फलनों और उनके प्रतिलोमों की सम्पूर्ण चर्चा में, रेडियन माप का प्रयोग करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करना।
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करना।
- त्रिकोणमितीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज गुणन नियम (Product rule), भाग नियम (quotient rule) तथा श्रृंखला नियम (chain rule) का प्रयोग करके ज्ञात करना।
- एक फलन के द्वितीय कोटि (second order) का अवकलज ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- कोणों के फलनों के रूप में त्रिकोणमितीय अनुपातों का ज्ञान।
- त्रिकोणमितीय फलनों की कुछ मानक सीमाओं का ज्ञान,
- अवकलज की परिभाषा तथा फलनों के अवकलज ज्ञात करने के विभिन्न नियमों का ज्ञान।

27.1 प्रथम सिद्धान्त द्वारा कुछ त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलज

(i) माना $y = \sin x$ है।

माना कि x के मान में नगण्य (सूक्ष्म) वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore \qquad y + \delta y = \sin(x + \delta x)$

तथा $\qquad \delta y = \sin(x + \delta x) - \sin x$

$$= 2\cos\left[x + \frac{\delta x}{2}\right]\sin\frac{\delta x}{2} \qquad \left[\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\therefore \qquad \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = \cos x.1 \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0}\frac{\frac{\sin \delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = 1\right]$$

अतः, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \cos x$

अर्थात्, $\qquad \dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(ii) माना $y = \cos x$ है।

माना कि x के मान में नगण्य वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore \qquad y + \delta y = \cos(x + \delta x)$

तथा $\qquad \delta y = \cos(x + \delta x) - \cos x$

$$= -2\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-2\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\therefore \qquad \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= -\sin x \cdot 1 \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0}\sin\frac{\delta x/2}{\delta x/2} = 1\right]$$

अतः, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\sin x$

अर्थात्, $\qquad \dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(iii) माना $y = \tan x$ है।

माना कि x के मान में नगण्य वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore$ $$y + \delta y = \tan(x + \delta x)$$

तथा $$\delta y = \tan(x + \delta x) - \tan x$$

$$= \frac{\sin(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+\delta x)\cdot\cos x - \sin x.\cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= \frac{\sin[(x+\delta x) - x]}{\cos(x+\delta x)\cos x} = \frac{\sin\delta x}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}$$

$\therefore$ $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin\delta x}{\delta x}\cdot\frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$\therefore$ $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad \left[\because \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x} = 1\right]$$

अतः, $$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

अर्थात्, $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

(iv) माना $y = \sec x$ है।

माना कि x के मान में नगण्य वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore$ $$y + \delta y = \sec(x + \delta x)$$

तथा $$\delta y = \sec(x+\delta x) - \sec x = \frac{1}{\cos(x+\delta x)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x} = \frac{2\sin\left[x + \frac{\delta x}{2}\right]\sin\frac{\delta x}{2}}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$\therefore$ $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)}{\cos(x+\delta x)\cos x}\,\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$\therefore$ $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)}{\cos(x+\delta x)\cos x}\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot 1 = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \tan x.\sec x$$

अतः, $$\frac{dy}{dx} = \sec x.\tan x$$

अर्थात्, $$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$$

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

उदाहरण 27.1. प्रथम सिद्धान्त द्वारा $\cot x^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \cot x^2$

माना x के मान में नगण्य वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore$ $$y + \delta y = \cot(x + \delta x)^2$$

तथा $$\delta y = \cot(x+\delta x)^2 - \cot x^2 = \frac{\cos(x+\delta x)^2}{\sin(x+\delta x)^2} - \frac{\cos x^2}{\sin x^2}$$

$$= \frac{\cos(x+\delta x)^2 \sin x^2 - \cos x^2 \sin(x+\delta x)^2}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$$= \frac{\sin[x^2 - (x+\delta x)^2]}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2} = \frac{\sin[-2x\delta x - (\delta x)^2]}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$$= \frac{-\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$\therefore$ $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\delta x \sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$\therefore$ $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\delta x(2x+\delta x)} \lim_{\delta x \to 0} \frac{2x+\delta x}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

अर्थात्, $$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot \frac{2x}{\sin x^2 . \sin x^2} \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\delta x(2x+\delta x)} = 1\right]$$

$$= \frac{-2x}{(\sin x^2)^2} = \frac{-2x}{\sin^2 x^2} = -2x.\operatorname{cosec}^2 x^2$$

अतः, $$\frac{d}{dx}(\cot x^2) = -2x \cdot \operatorname{cosec}^2 x^2$$

उदाहरण 27.2. प्रथम सिद्धान्त द्वारा $\sqrt{\operatorname{cosec} x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = \sqrt{\operatorname{cosec} x}$ है।

तब, $$y + \delta y = \sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}$$

$$\therefore \qquad \delta y=\frac{\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}-\sqrt{\operatorname{cosec} x}\right]\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}+\sqrt{\operatorname{cosec} x}\right]}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}+\sqrt{\operatorname{cosec} x}}$$

$$=\frac{\operatorname{cosec}(x+\delta x)-\operatorname{cosec} x}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}+\sqrt{\operatorname{cosec} x}}=\frac{\frac{1}{\sin(x+\delta x)}-\frac{1}{\sin x}}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}+\sqrt{\operatorname{cosec} x}}$$

$$=\frac{\sin x-\sin(x+\delta x)}{\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}+\sqrt{\operatorname{cosec} x}\right]\left[\sin(x+\delta x)\sin x\right]}$$

$$=-\frac{2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}}{\left(\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}+\sqrt{\operatorname{cosec} x}\right)\left[\sin(x+\delta x)\sin x\right]}$$

$$\therefore \qquad \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=-\lim_{\delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}+\sqrt{\operatorname{cosec} x}]}\times\frac{\frac{\sin\delta x/2}{\delta x/2}}{[\sin(x+\delta x).\sin x]}$$

अर्थात्, $$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cos x}{(2\sqrt{(\operatorname{cosec} x)}(\sin x)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}(\operatorname{cosec} x)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{cosec} x\cot x)$$

अतः, $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\operatorname{cosec} x}\right)=-\frac{1}{2}(\operatorname{cosec} x)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{cosec} x\cot x)$$

उदाहरण 27.3. प्रथम सिद्धान्त द्वारा $\sec^2 x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y=\sec^2 x$ है।

तथा $$y+\delta y=\sec^2(x+\delta x) \text{ है।}$$

तब, $$\delta y=\sec^2(x+\delta x)-\sec^2 x$$

$$=\frac{\cos^2 x-\cos^2(x+\delta x)}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin[(x+\delta x+x]\sin[(x+\delta x-x)]}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x.\delta x}$$

अब, $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x.\delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x \cos^2 x} = 2\tan x.\sec^2 x$$

$$= 2\sec x(\sec x.\tan x)$$

$$= 2\sec x \ (\sec x \tan x)$$

देखें आपने कितना सीखा 27.1

1. निम्नलिखित फलनों के प्रथम सिद्धान्त द्वारा x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) cosec x (b) cot x (c) cos 2 x

   (d) cot 2 x (e) $\operatorname{cosec} x^2$ (f) $\sqrt{\sin x}$

2. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $2\sin^2 x$ (b) $\operatorname{cosec}^2 x$ (c) $\tan^2 x$

27.2 त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज

अभी आपने प्रथम सिद्धान्त द्वारा त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करना सीखा है और फलन के फलन का अवकलज ज्ञात करना भी सीखा। अब, हम इन अवकलजों के कुछ और उदाहरणों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 27.4. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin 2x$ (ii) $\tan\sqrt{x}$ (iii) $\operatorname{cosec}(5x^3)$

हल : (i) माना $y = \sin 2x$,

$$= \sin t, \quad \text{जहाँ } t = 2x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \cos t \quad \text{और} \quad \frac{dt}{dx} = 2$$

श्रृंखला नियम से $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = \cos t\,(2) = 2.\cos t = 2\cos 2x$$

अतः, $\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$

(ii) माना $y = \tan\sqrt{x}$

$$= \tan t, \quad \text{जहाँ } t = \sqrt{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \sec^2 t \quad \text{और} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

श्रृंखला नियम से $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ से, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 t\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

अतः, $\frac{d}{dx}(\tan\sqrt{x})=\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

वैकल्पिक विधि : माना $y=\tan\sqrt{x}$ है।

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\sec^2\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

(iii) माना $y=\operatorname{cosec}(5x^3)$ है।

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}(5x^3)\cot(5x^3)\cdot\frac{d}{dx}[5x^3]$$

$$=-15x^2\operatorname{cosec}(5x^3)\cot(5x^3)$$

अथवा $t=5x^3$ प्रतिस्थापित करके, आप इस प्रश्न को हल कर सकते हैं।

उदाहरण 27.5. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y=x^4\sin 2x$ (ii) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

हल : (i) $y=x^4\sin 2x$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=x^4\frac{d}{dx}(\sin 2x)+\sin 2x\frac{d}{dx}(x^4)$$ (गुणन नियम का प्रयोग करके)

$$=x^4(2\cos 2x)+\sin 2x(4x^3)$$

$$=2x^4\cos 2x+4x^3\sin 2x$$

$$=2x^3[x\cos 2x+2\sin 2x]$$

(ii) माना $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ है।

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(1+\cos x)(\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2}$$

उदाहरण 27.6. निम्न में से प्रत्येक फलन का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\cos^2 x$ (ii) $\sqrt{\sin^3 x}$

हल : (i) माना $y = \cos^2 x$

$= t^2$, जहाँ $t = \cos x$

$\therefore$ $\frac{dy}{dt} = 2t$ और $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

श्रंखला नियम $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ का प्रयोग करके, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x.(-\sin x)$$

$$= -2\cos x \sin x = -\sin 2x$$

(ii) माना $y = \sqrt{\sin^3 x}$ है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\sin^3 x)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(\sin^3 x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3 x}} \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\sin x}\,\cos x$$

अतः, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sin^3 x}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\sin x}\,\cos x$

उदाहरण 27.7. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि :

(i) $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

हल : (i) $y=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\frac{(-\cos x)(1+\sin x)-(1-\sin x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\left(\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)=-\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{1+\sin x}\sqrt{1+\sin x}}{(1+\sin x)^2}=\frac{-1}{1+\sin x}$$

अतः, $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+\sin x}$

उदाहरण 27.8. निम्नलिखित फलनों के अंकित बिन्दुओं पर अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y=\sin 2x+(2x-5)^2,\ x=\frac{\pi}{2}$ पर

(ii) $y=\cot x+\sec^2 x+5,\ x=\pi/6$ पर

हल : (i) $y=\sin 2x+(2x-5)^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\cos 2x\frac{d}{dx}(2x)+2(2x-5)\frac{d}{dx}(2x-5)$$

$$=2\cos 2x+4(2x-5)$$

$x=\frac{\pi}{2}$ पर $\frac{dy}{dx}=2\cos\pi+4(\pi-5)$

$$=-2+4\pi-20$$

$$=4\pi-22$$

(ii) $y=\cot x+\sec^2 x+5$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x+2\sec x(\sec x\tan x)$$

$$=-\operatorname{cosec}^2 x+2\sec^2 x\tan x$$

$x=\frac{\pi}{6}$ पर $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}+2\sec^2\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{6}$

$$=-4+2\cdot\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}=-4+\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

उदाहरण 27.9. यदि $\sin y = x \sin (a+y)$ है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

हल : यह दिया है कि $\sin y = x \sin (a+y)$

अर्थात्, $$x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)} \qquad .....(1)$$

(1) के दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$1 = \left[\frac{\sin(a+y)\cos y - \sin y \cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}\right]\frac{dy}{dx}$$

अथवा $$1 = \left[\frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)}\right]\frac{dy}{dx}$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

उदाहरण 27.10 यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + ...\text{अनंत तक}}}$ है,

तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$ होगा।

हल : हमें दिया है $$y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + ...\text{अनंत तक}}}$$

अथवा $y = \sqrt{\sin x + y}$ अथवा $y^2 = \sin x + y$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx} \qquad \text{अथवा} \qquad (2y-1)\frac{dy}{dx} = \cos x$$

अतः, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$$

देखें आपने कितना सीखा 27.2

1. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $y = 3\sin 4x$ (b) $y = \cos 5x$ (c) $y = \tan\sqrt{x}$

   (d) $y = \sin\sqrt{x}$ (e) $y = \sin x^2$ (f) $y = \sqrt{2}\tan 2x$

   (g) $y = \pi\cot 3x$ (h) $y = \sec 10x$ (i) $y = \operatorname{cosec} 2x$

2. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x) = \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$ (b) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (c) $f(x) = x \sin x$

(d) $f(x)=\left(1+x^2\right)\cos x$ (e) $f(x)=x\ \text{cosec}\ x$ (f) $f(x)=\sin 2x\cos 3x$

(g) $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$

3. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $y=\sin^3 x$ (b) $y=\cos^2 x$ (c) $y=\tan^4 x$

(d) $y=\cot^4 x$ (e) $y=\sec^5 x$ (f) $y=\text{cosec}^3 x$

(g) $y=\sec\sqrt{x}$ (h) $y=\sqrt{\dfrac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}}$

4. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अंकित बिन्दु पर अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $y=\cos(2x+\pi/2),\ x=\dfrac{\pi}{3}$ (b) $y=\dfrac{1+\sin x}{\cos x},\ x=\dfrac{\pi}{4}$

5. यदि $y=\sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x+\ldots,\text{अनंत तक}}}}$ हो, तो

दर्शाइये कि $(2y-1)\dfrac{dy}{dx}=\sec^2 x$ है।

6. यदि $\cos y=x\cos(a+y)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$ है।

27.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का प्रथम सिद्धान्त से अवकलन

अब हम मानक प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों $\sin^{-1}x,\ \cos^{-1}x,\ \tan^{-1}x$ के प्रथम सिद्धान्त द्वारा अवकलज ज्ञात करेंगे।

(i) प्रथम सिद्धान्त द्वारा, हम $\sin^{-1}x$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करेंगे, जो निम्न द्वारा प्रदर्शित किया जाता है :

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}}$$

माना $y=\sin^{-1}x$ है, तो $x=\sin y$ होगा। इसलिए $x+\delta x=\sin(y+\delta y)$

जब $\delta x\to 0$, तो $\delta y\to 0$

अब, $\delta x=\sin(y+\delta y)-\sin y$

$\therefore$ $1=\dfrac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta x}$ (दोनों पक्षों को δx से भाग देने पर)

अथवा $1=\dfrac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta y}\cdot\dfrac{\delta y}{\delta x}$

$\therefore \quad 1 = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sin(y+\delta y) - \sin y}{\delta y} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} \qquad [\because \delta y \to 0 \text{ जब } \delta x \to 0]$

$$= \left[\lim_{\delta y \to 0} \frac{2\cos\left(y + \frac{1}{2}\delta y\right) \sin\left(\frac{1}{2}\delta y\right)}{\delta y} \right] \cdot \frac{dy}{dx} = (\cos y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

या $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 y)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$

(ii) $\quad \mathbf{\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}}$.

इसकी उपपत्ति के लिए, उसी तरह आगे बढ़िए जैसे $\sin^{-1} x$ के लिए किया था।

(iii) अब हम दिखाते हैं कि

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

माना $y = \tan^{-1} x$ है। तब, $x = \tan y$ है। अतः, $x + \delta x = \tan(y + \delta y)$

जब $\quad \delta x \to 0$, तो $\delta y \to 0$

अब, $\quad \delta x = \tan(y + \delta y) - \tan y$

$\therefore \quad 1 = \frac{\tan(y+\delta y) - \tan y}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$.

$\therefore \quad 1 = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\tan(y+\delta y) - \tan y}{\delta y} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} \qquad [\because \delta y \to 0, \text{ जब } \delta x \to 0]$

$$= \left[\lim_{\delta y \to 0} \left\{ \frac{\sin(y+\delta y)}{\cos(y+\delta y)} - \frac{\sin y}{\cos y} \right\} \Big/ \delta y \right] \cdot \frac{dy}{dx}$$

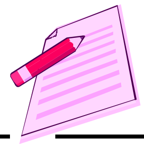
$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sin(y+\delta y)\cos y - \cos(y+\delta y)\sin y}{\delta y \cdot \cos(y+\delta y)\cos y}$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \left[\frac{\sin(y+\delta y - y)}{\delta y . \cos(y+\delta y) \cdot \cos y} \right]$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \left[\frac{\sin \delta y}{\delta y} \cdot \frac{1}{\cos(y+\delta y)\cos y} \right] = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{dy}{dx} \cdot \sec^2 y$$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$



(iv) $$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

इसकी उपपत्ति के लिए, उसी प्रकार आगे बढ़िए जैसे $\tan^{-1} x$ के लिए किया था।

(v) अब हम प्रथम सिद्धान्त से सिद्ध करेंगे कि $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$ है।

माना $y = \sec^{-1} x$ है तब, $x = \sec y$ है तथा $x + \delta x = \sec(y + \delta y)$ है।

जब $\delta x \to 0$, तो $\delta y \to 0$

अब, $$\delta x = \sec(y+\delta y) - \sec y$$

$\therefore$ $$1 = \frac{\sec(y+\delta y) - \sec y}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$$

$\therefore$ $$1 = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sec(y+\delta y) - \sec y}{\delta y} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$ [$\because \delta y \to 0$, जब $\delta x \to 0$]

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \frac{2\sin\left(y + \frac{1}{2}\delta y\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\delta y . \cos y \cos(y+\delta y)}$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0}\left[\frac{\sin\left(y + \frac{1}{2}\delta y\right)}{\cos y \cos(y+\delta y)} \cdot \frac{\sin\frac{\delta y}{2}}{\frac{\delta y}{2}}\right] = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\sin y}{\cos^2 y} = \frac{dy}{dx} \cdot \sec y \tan y$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\sec y\sqrt{(\sec^2 y - 1)}} = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

अत:, $$\frac{d}{dx} = (\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(vi) $$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{cosec}^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

इसकी उपपत्ति के लिए, आप उसी तरह आगे बढ़िए जैसे कि $\sec^{-1} x$ के लिए किया था।

उदाहरण 27.11. $\sin^{-1}(x^2)$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = \sin^{-1} x^2$ है।

$\therefore$ $$x^2 = \sin y$$

अब, $$(x+\delta x)^2 = \sin(y+\delta y)$$

$\therefore$ $$\frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x} = \frac{\sin(y+\delta y) - \sin y}{\delta x}$$

जब $\delta x \to 0$, तो $\delta y \to 0$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{(x+\delta x) - x} = \lim_{\delta y \to 0} \frac{2\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\delta y}{2}}{\frac{\delta y}{2}} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\therefore \quad 2x = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\cos y} = \frac{2x}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

उदाहरण 27.12. x के सापेक्ष $\sin^{-1}\sqrt{x}$ का डैल्टा विधि (प्रथम सिद्धान्त) से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\quad y = \sin^{-1}\sqrt{x}$ है।

$$\Rightarrow \quad \sin y = \sqrt{x} \qquad ..(1)$$

साथ ही, $\quad \sin(y+\delta y) = \sqrt{x+\delta x} \qquad ..(2)$

(1) तथा (2) से, हमें मिलता है :

$$\sin(y+\delta y) - \sin y = \sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}$$

अथवा
$$2\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{\delta x}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{2\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}}$$

अथवा
$$\frac{\delta y}{\delta x} \cdot \cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\frac{\delta y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right) \cdot \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\frac{\delta y}{2}}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}} \qquad (\because \ \delta y \to 0, \text{ जब } \ \delta x \to 0)$$

अथवा
$$\frac{dy}{dx}\cos y = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{या} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos y} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\ \sqrt{1-x}}$$

देखें आपने कितना सीखा 27.3

1. प्रथम सिद्धान्त से निम्न में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\cos^{-1} x^2$ (ii) $\dfrac{\cos^{-1} x}{x}$ (iii) $\cos^{-1}\sqrt{x}$

(iv) $\tan^{-1} x^2$ (v) $\dfrac{\tan^{-1} x}{x}$ (vi) $\tan^{-1}\sqrt{x}$

27.4 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज

पिछले अनुच्छेद में, हमने प्रथम सिद्धान्त द्वारा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करना सीखा था। अब हम उन्हीं प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज का प्रयोग कर फलनों के अवकलज ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 27.13. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin^{-1}\sqrt{x}$ (ii) $\cos^{-1} x^2$ (iii) $(\operatorname{cosec}^{-1} x)^2$

हल : (i) माना $y = \sin^{-1}\sqrt{x}$ है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) \qquad \text{(श्रृंखला नियम द्वारा)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

(ii) माना $y = \cos^{-1} x^2$ है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot(2x)$$

अतः $$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x^2\right) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

(iii) माना $y = (\operatorname{cosec}^{-1} x)^2$ है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2(\operatorname{cosec}^{-1} x)\cdot\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right)$$

$$= 2(\operatorname{cosec}^{-1} x)\cdot\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \frac{-2\operatorname{cosec}^{-1} x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right)^2 = \frac{-2\operatorname{cosec}^{-1} x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

उदाहरण 27.14. निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\tan^{-1}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ (ii) $\sin(2\sin^{-1} x)$

हल : (i) $$y=\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\tan^{-1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$=\tan^{-1}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=-1/2$$

(ii) माना $y=\sin(2\sin^{-1}x)$ है।

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\cos(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{d}{dx}(2\sin^{-1}x)=\cos(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\cos(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\cos(2\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

उदाहरण 27.15. दर्शाइए कि $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ का $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ के सापेक्ष अवकलज 1 है।

हल : माना $y=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ तथा $z=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ है।

$x=\tan\theta$ लेने पर,

$\therefore$ $y=\tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ तथा $z=\sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\tan^{-1}(\tan 2\theta)$ तथा $z=\sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$=2\theta$ तथा $z=2\theta$

$\therefore$ $\frac{dy}{d\theta}=2$ तथा $\frac{dz}{d\theta}=2$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dz}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$ (श्रंखला नियम द्वारा)

देखें आपने कितना सीखा 27.4

निम्न में से प्रत्येक फलन का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए तथा परिणाम $(1-3)$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए :

1. (a) $\sin^{-1}x^2$ (b) $\cos^{-1}\frac{x}{2}$ (c) $\cos^{-1}\frac{1}{x}$

2. (a) $\tan^{-1}(\operatorname{cosec}x-\cot x)$ (b) $\cot^{-1}(\sec x+\tan x)$ (c) $\tan^{-1}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

3. (a) $\sin(\cos^{-1}x)$ (b) $\sec(\tan^{-1}x)$ (c) $\sin^{-1}(1-2x^2)$

(d) $\cos^{-1}(4x^3-3x)$ (e) $\cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

4. $\dfrac{\tan^{-1}x}{1+\tan^{-1}x}$ का $\tan^{-1}x$ के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

27.5 द्वितीय कोटि (Second order) के अवकलज

हम जानते हैं कि किसी फलन का द्वितीय कोटि का अवकलज उसके प्रथम अवकलज का अवकलज होता है। इस अनुच्छेद में, हम त्रिकोणमितीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात करेंगे। इसके अन्तर्गत हम गुणन, भाग तथा श्रृंखला नियम का प्रयोग करेंगे।

आइए कुछ उदाहरण लें :

उदाहरण 27.16. निम्न में से प्रत्येक का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin x$ (ii) $x\cos x$ (iii) $\cos^{-1}x$

हल: (i) माना $y=\sin x$ है।

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें मिलता है: $\dfrac{dy}{dx}=\cos x$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष फिर अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$$

(ii) माना $y=x\cos x$ है।

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx}=x(-\sin x)+\cos x.1$$

$$\frac{dy}{dx}=-x\sin x+\cos x$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष फिर अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-x\sin x+\cos x)=-(x.\cos x+\sin x)-\sin x$$

$$=-x.\cos x-2\sin x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-(x.\cos x+2\sin x)$$

(iii) माना $y=\cos^{-1}x$ है।

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}=-\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष फिर अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-3/2}\cdot(-2x)\right] = -\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$$

अतः, $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$$

उदाहरण 27.17. यदि $y = \sin^{-1}x$ हो, तो दर्शाइए कि $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 = 0$ है, जहाँ y_2 तथा y_1 क्रमशः x के सापेक्ष द्वितीय कोटि तथा प्रथम कोटि, अवकलज हैं।

हल : हमें दिया है : $y = \sin^{-1}x$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

अथवा $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{1-x^2}$$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

अथवा $$\left(1-x^2\right)y_1^2 = 1$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष फिर अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\left(1-x^2\right)\cdot 2y_1\frac{d}{dx}(y_1) + (-2x)\cdot y_1^2 = 0$$

अथवा $$\left(1-x^2\right)\cdot 2y_1y_2 - 2x\,y_1^2 = 0$$

अथवा $$\left(1-x^2\right)y_2 - x\,y_1 = 0$$

देखें आपने कितना सीखा 27.5

1. निम्न में से प्रत्येक का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $\sin(\cos x)$ (b) $x^2\tan^{-1}x$

2. यदि $y = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x\right)^2$ हो, तो दर्शाइए कि $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 = 1$ होगा।

3. यदि $y = \sin(\sin x)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$ होगा।

4. यदि $y = x + \tan x$, हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2} - 2y + 2x = 0$ होगा।

आइये दोहराएँ

- (i) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

- यदि u, x का एक अवकलनीय फलन है, तब :

  (i) $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

- (i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

- यदि u, x का एक अवकलनीय फलन है, तब :

  (i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

- एक त्रिकोणमितीय फलन का द्वितीय कोटि का अवकलज उसके पहली कोटि के अवकलज का अवकलज होता है।

सहायक वेबसाइट

- *http://people.hofstra.edu/stefan_waner/trig/trig3.html*
- *http://www.math.com/tables/derivatives/more/trig.htm*
- *https://www.freemathhelp.com/trig-derivatives.html*

आइए अभ्यास करें

1. यदि $y = x^3 \tan^2 \frac{x}{2}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

2. मान ज्ञात कीजिए : $\frac{d}{dx}\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}$, $x = \frac{\pi}{2}$ तथा 0 पर।

3. यदि $y = \frac{5x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \cos^2(2x+1)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

4. यदि $y = \sec^{-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

5. यदि $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ है, तो $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...}}}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

7. $\sin^{-1} x$ का $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

8. यदि $y = \cos(\cos x)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x \cdot \frac{dy}{dx} + y.\sin^2 x = 0$ है।

9. यदि $y = \tan^{-1} x$ है, तो दर्शाइए कि $(1+x)^2 y_2 + 2xy_1 = 0$ है।

10. यदि $y = (\cos^{-1} x)^2$ है, तो दर्शाइए कि $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 27.1

1. (a) $-\operatorname{cosec} x \cot x$ (b) $-\operatorname{cosec}^2 x$ (c) $-2\sin 2x$

   (d) $-2\operatorname{cosec}^2 2x$ (e) $-2x \operatorname{cosec} x^2 \cot x^2$ (f) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

2. (a) $2\sin 2x$ (b) $-2\operatorname{cosec}^2 x \cot x$ (c) $2\tan x \sec^2 x$

देखें आपने कितना सीखा 27.2

1. (a) $12\cos 4x$ (b) $-5\sin 5x$ (c) $\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (d) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

   (e) $2x \cos x^2$ (f) $2\sqrt{2}\sec^2 2x$ (g) $-3\pi \operatorname{cosec}^2 3x$

   (h) $10\sec 10x \tan 10x$ (i) $-2\operatorname{cosec} 2x \cot 2x$

2. (a) $\dfrac{2\sec x \tan x}{(\sec x+1)^2}$ (b) $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ (c) $x\cos x+\sin x$

(d) $2x\cos x-(1+x^2)\sin x$

(e) $\operatorname{cosec} x\,(1-x\cot x)$ (f) $2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$ (g) $\dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$

3. (a) $3\sin^2 x\cos x$ (b) $-\sin 2x$ (c) $4\tan^3 x\sec^2 x$ (d) $-4\cot^3 x\operatorname{cosec}^2 x$

(e) $5\sec^5 x\tan x$ (f) $-3\operatorname{cosec}^3 x\cot x$ (g) $\dfrac{\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(h) $\sec x(\sec x+\tan x)$

4. (a) 1 (b) $\sqrt{2}+2$

देखें आपने कितना सीखा 27.3

1. (i) $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (ii) $\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{-\cos^{-1}x}{x^2}$ (iii) $\dfrac{-1}{2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1-x)}}$

(iv) $\dfrac{2x}{1+x^4}$ (v) $\dfrac{1}{x(1+x^2)}-\dfrac{\tan^{-1}x}{x^2}$ (vi) $\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}(1+x)}$

देखें आपने कितना सीखा 27.4

1. (a) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\dfrac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$ (c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

2. (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) -1

3. (a) $-\dfrac{\cos\left(\cos^{-1}x\right)}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{x}{1+x^2}\cdot\sec\left(\tan^{-1}x\right)$

(c) $\dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\dfrac{-1}{2(1+x^2)}$

4. $\dfrac{1}{\left(1+\tan^{-1}x\right)^2}$

देखें आपने कितना सीखा 27.5

1. (a) $-\cos x\cos(\cos x)-\sin^2 x\sin(\cos x)$ (b) $\dfrac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)^2}+2\tan^{-1}x$

आइए अभ्यास करें

1. $x^3 \tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}+3x^2\tan^2\frac{x}{2}$

2. 0, 0

3. $\frac{5(3-x)}{3(1-x)^{\frac{5}{3}}}-2\sin(4x+2)$

5. $|\sec\theta|$

6. $\frac{1}{2y-1}$

7. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$