28

चर घातांकी तथा लघुगणकीय फलनों का अवकलज

311hi28

हम जानते हैं कि जनसंख्या बराबर बढ़ती जाती है परन्तु कुछ स्थितियों में घटती भी है। प्रकृति में कई और ऐसे क्षेत्र हैं जिनमें वृद्धि तथा ह्रास बराबर होता रहता है। अर्थ शास्त्र, कृषि तथा व्यापार में बहुत से उदाहरण दिये जा सकते हैं जिनमें वृद्धि तथा कमी बराबर होती रहती है। आइए जीवाणुओं की वृद्धि के उदाहरण पर विचार करें। माना जीवाणुओं की वर्तमान सख्या 1000000 है तथा 10 घंटे के बाद यह दुगुनी हो जाती है। हम यह जानना चाहते हैं कि कितने समय पश्चात इनकी संख्या 3000000 हो जायेगी।

इस वृद्धि का उत्तर क्रमवार योग से अथवा किसी निश्चित संख्या से गुणा करने पर प्राप्त नहीं हो सकता। वास्तव में गणित में एक और विधि है जिसे चर घातांकी फलन कहते हैं तथा यह हमें ऐसी स्थितियों में वृद्धि अथवा कमी का आकलन करने में सहायता करता है। चर घांताकी फलन, लघुगणकीय फलन का विलोम है। इस पाठ में हम इन्हीं फलनों पर विचार-विमर्श करेंगे तथा उनके अवकलज ज्ञात करने के नियमों का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- चर घातांकी व लघुगणकीय फलनों को परिभाषित करना तथा उनका अवकलज ज्ञात करना।
- बीजीय, त्रिकोणमितीय, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय, चर घांताकी व लघुगणकीय फलनों के संयोजन से बने फलनों के अवकलज ज्ञात करना।
- किन्हीं फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

नीचे दी गयी मानक सीमाओं (limits) के अनुप्रयोग :

(i) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$$

(iii) $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

(iv) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{x} = \log_e a$$

(v) $$\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h} = 1$$

अवकलन की परिभाषा तथा फलनों के अवकलज निकालने के नियम।

28.1 चर घांताकी फलन का अवकलज

मान लीजिए कि $y = e^x$ एक चर घातांकी फलन है .....(i)

$\therefore$ $$y + \delta y = e^{(x+\delta x)}$$ (संगत छोटी बढ़त) .....(ii)

(i) तथा (ii) से हमें मिलता है :

$\therefore$ $$\delta y = e^{x+\delta x} - e^x$$

दोनों पक्षों को δx से भाग देने के साथ सीमांत लेने पर जब $\delta x \to 0$

$\therefore$ $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} e^x \frac{[e^{\delta x} - 1]}{\delta x}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = e^x . 1 = e^x$$

अत: हमें मिलता है $\mathbf{\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x}$.

कार्यकारी नियम: $$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \cdot \frac{d}{dx}(x) = e^x$$

अब मान लीजिए कि $y = e^{ax+b}$.

$\therefore$ $$y + \delta y = e^{a(x+\delta x)+b}$$ [δx तथा δy संगत बढ़ते हैं]

$\therefore$ $$\delta y = e^{a(x+\delta x)+b} - e^{ax+b} = e^{ax+b}\left[e^{a\delta x} - 1\right]$$

$\therefore$ $$\frac{\delta y}{\delta x} = e^{ax+b} \frac{\left[e^{a\delta x} - 1\right]}{\delta x}$$

$$= a \cdot e^{ax+b} \frac{e^{a\delta x} - 1}{a\delta x}$$ (a से गुणा व भाग देने पर)

सीमा, जब $\delta x \to 0$, लेने पर

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = a \cdot e^{ax+b} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{e^{a\delta x} - 1}{a\ \delta x}$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = a \cdot e^{ax+b} \cdot 1 = ae^{ax+b}$$ $$\left[\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right]$$

कार्यकारी नियम: $$\frac{d}{dx}\left(e^{ax+b}\right) = e^{ax+b} \cdot \frac{d}{dx}(ax+b) = e^{ax+b} \cdot a$$

$\therefore$ $$\frac{d}{dx}\left(e^{ax+b}\right) = ae^{ax+b}$$

उदाहरण 28.1. निम्नलिखित में प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) e^{5x} (ii) e^{ax} (iii) $e^{-\frac{3x}{2}}$

हल : (i) मान लीजिए कि $y = e^{5x}$.

तो $y = e^t$ जहाँ $5x = t$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dt} = e^t$ तथा $5 = \dfrac{dt}{dx}$

हम जानते हैं कि $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = e^t \cdot 5 = 5e^{5x}$

अन्य विधि से, $\dfrac{d}{dx}\left(e^{5x}\right) = e^{5x} \cdot \dfrac{d}{dx}(5x) = e^{5x} \cdot 5 = 5e^{5x}$

(ii) मान लीजिए कि $y = e^{ax}$.

तो $y = e^t$ जहाँ $t = ax$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dt} = e^t$ तथा $\dfrac{dt}{dx} = a$

हम जानते हैं कि, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \times \dfrac{dt}{dx} = e^t \cdot a$

अत: $\dfrac{dy}{dx} = a \cdot e^{ax}$

(iii) मान लीजिए कि $y = e^{\frac{-3x}{2}}$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dt} = e^{\frac{-3}{2}x} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-3}{2}x\right)$

अत: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-3}{2} e^{\frac{-3x}{2}}$

उदाहरण 28.2. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y = e^x + 2\cos x$ (ii) $y = e^{x^2} + 2\sin x - \dfrac{5}{3}e^x + 2e$

हल : (i) $y = e^x + 2\cos x$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) + 2\dfrac{d}{dx}(\cos x) = e^x - 2\sin x$

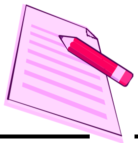
(ii) $y = e^{x^2} + 2\sin x - \dfrac{5}{3}e^x + 2e$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx} = e^{x^2}\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right) + 2\cos x - \dfrac{5}{3}e^x + 0$ ....($\because$ e अचर है।)

$= 2xe^{x^2} + 2\cos x - \dfrac{5}{3}e^x$

उदाहरण 28.3. $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

(i) $y = e^{x\cos x}$ (ii) $y = \dfrac{1}{x}e^x$ (iii) $y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$



हल: (i) $y = e^{x\cos x}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{x\cos x}\frac{d}{dx}(x\cos x)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{x\cos x}\left[x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}(x)\right] = e^{x\cos x}[-x\sin x + \cos x]$$

(ii) $$y = \frac{1}{x}e^x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(e^x\right) \qquad \text{(गुणन नियम के उपयोग से)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x = \frac{e^x}{x^2}[-1+x] = \frac{e^x}{x^2}[x-1]$$

(iii) $$y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1-x}{1+x}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$= e^{\frac{1-x}{1+x}}\left[\frac{-1.(1+x)-(1-x).1}{(1+x)^2}\right] = e^{\frac{1-x}{1+x}}\left[\frac{-2}{(1+x)^2}\right] = \frac{-2}{(1+x)^2}e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

उदाहरण 28.4. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $e^{\sin x}\cdot \sin e^x$ (ii) $e^{ax}\cdot\cos(bx+c)$

हल : $y = e^{\sin x}\cdot\sin e^x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sin e^x\right) + \sin e^x\frac{d}{dx}e^{\sin x}$$

$$= e^{\sin x}\cdot\cos e^x\cdot\frac{d}{dx}\left(e^x\right) + \sin e^x\cdot e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= e^{\sin x}\cdot\cos e^x\cdot e^x + \sin e^x\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x$$

$$= e^{\sin x}[e^x\cdot\cos e^x + \sin e^x\cdot\cos x]$$

(ii) $$y = e^{ax}\cos(bx+c)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{ax}\cdot\frac{d}{dx}\cos(bx+c) + \cos(bx+c)\frac{d}{dx}e^{ax}$$

$$= e^{ax}\cdot[-\sin(bx+c)]\frac{d}{dx}(bx+c) + \cos(bx+c)e^{ax}\frac{d}{dx}(ax)$$

$$= -e^{ax}\sin(bx+c)\cdot b + \cos(bx+c)e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[-b\sin(bx+c) + a\cos(bx+c)]$$

उदाहरण 28.5. यदि $y = \dfrac{e^{ax}}{\sin(bx+c)}$ हो, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

हल :
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(bx+c)\frac{d}{dx}e^{ax}-e^{ax}\frac{d}{dx}[\sin(bx+c)]}{\sin^2(bx+c)}$$

$$=\frac{\sin(bx+c).e^{ax}.a-e^{ax}\cos(bx+c).b}{\sin^2(bx+c)}$$

$$=\frac{e^{ax}[a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)]}{\sin^2(bx+c)}$$

देखें आपने क्या सीखा 28.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) e^{5x} (b) e^{7x+4} (c) $e^{\sqrt{2}x}$ (d) $e^{\frac{-7}{2}x}$ (e) e^{x^2+2x}

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y=\frac{1}{3}e^x-5e$ (b) $y=\tan x+2\sin x+3\cos x-\frac{1}{2}e^x$

   (c) $y=5\sin x-2e^x$ (d) $y=e^x+e^{-x}$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x)=e^{\sqrt{x+1}}$ (b) $f(x)=e^{\sqrt{\cot x}}$

   (c) $f(x)=e^{x\sin^2 x}$ (d) $f(x)=e^{x\sec^2 x}$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x)=(x-1)e^x$ (b) $f(x)=e^{2x}\sin^2 x$

5. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y=\frac{e^{2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $y=\frac{e^{2x}\cdot\cos x}{x\sin x}$

28.2 लघुगुणकीय फलनों का अवकलज

हम पहले लघुगणकीय फलन लेते हैं

मान लीजिए कि $y=\log x$ .....(i)

$\therefore \quad y+\delta y=\log(x+\delta x)$ .....(ii)

(x तथा y में संगत बढ़ोत्तरियां क्रमश: δx तथा δy हैं)

(i) तथा (ii) से हमें मिलता है :

$$\delta y=\log(x+\delta x)-\log x=\log\frac{x+\delta x}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\delta x}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right] \qquad \text{(x से गुणा तथा भाग करने पर)}$$

$$= \frac{1}{x}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]^{\frac{x}{\delta x}}$$

दोनों पक्षों की सीमा लेने पर, जब $\delta x \to 0$, हमें मिलता है

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x}\lim_{\delta x\to 0}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]^{\frac{x}{\delta x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\log\left\{\lim_{\delta x\to 0}\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}}\right\} = \frac{1}{x}\log e \qquad \left[\because \lim_{\delta x\to 0}\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}} = e\right]$$

$$= \frac{1}{x}$$

अत: $\quad \mathbf{\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}}$

अब हम लघुगणकीय फलन $y = \log(ax+b)$ लेते हैं। ...(i)

$\therefore \qquad y+\delta y = \log[a(x+\delta x)+b]$ ...(ii)

(i) तथा (ii) से हमें मिलता है

$$\delta y = \log[a(x+\delta x)+b] - \log(ax+b)$$

$$= \log\frac{a(x+\delta x)+b}{ax+b} = \log\frac{(ax+b)+a\delta x}{ax+b} = \log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$

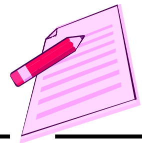
$$= \frac{a}{ax+b}\cdot\frac{ax+b}{a\delta x}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right] \qquad \left[\frac{a}{ax+b} \text{ से गुणा तथा भाग करने पर}\right]$$

$$= \frac{a}{ax+b}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]^{\frac{ax+b}{a\delta x}}$$

दोनों पक्षों की सीमा लेने पर, जब $\delta x \to 0$,

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a}{ax+b}\lim_{\delta x\to 0}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]^{\frac{ax+b}{a\delta x}}$$

अर्थात $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{ax+b}\log e \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\right]$



अथवा $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{ax+b}$

कार्यकारी नियम:

$$\frac{d}{dx}\log(ax+b) = \frac{1}{ax+b}\frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$= \frac{1}{ax+b} \times a = \frac{a}{ax+b}$$

उदाहरण 28.6. नीचे दिये गये फलनों में प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y = \log x^5$ $\qquad$ (ii) $y = \log\sqrt{x}$ $\qquad$ (iii) $y = (\log x)^3$

हल : (i) $\quad y = \log x^5 = 5\log x$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = 5 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{x}$

(ii) $\quad y = \log\sqrt{x} \; = \log x^{\frac{1}{2}}$ अथवा $\quad y = \dfrac{1}{2}\log x$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x}$

(iii) $\quad y = (\log x)^3$

$\therefore \quad y = t^3,$ $\qquad$ जहाँ $\quad t = \log x$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dt} = 3t^2$ तथा $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

हमें पता है कि, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = 3t^2 \cdot \dfrac{1}{x}$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = 3(\log x)^2 \cdot \dfrac{1}{x}$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{x}(\log x)^2$

उदाहरण 28.7. $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $\quad y = x^3 \log x$ $\qquad$ (ii) $\quad y = e^x \log x$

हल : (i) $\quad y = x^3 \log x$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \log x \dfrac{d}{dx}(x^3) + x^3 \dfrac{d}{dx}(\log x)$ $\qquad$ (गुणन नियम के उपयोग से)

$$= 3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3\log x + 1)$$

(ii) $\quad y = e^x \log x$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = e^x \dfrac{d}{dx}(\log x) + \log x \cdot \dfrac{d}{dx} e^x$

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \log x = e^x \left[\frac{1}{x} + \log x \right]$$

उदाहरण 28.8. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\log \tan x$ (ii) $\log [\cos (\log x)]$

हलः (i) मान लीजिए कि $y = \log \tan x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{cosec} x.\sec x$$

(ii) मान लीजिए कि $y = \log [\cos (\log x)]$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(\log x)} \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\log x)] = \frac{1}{\cos(\log x)} \cdot \left[-\sin \log x \frac{d}{dx}(\log x) \right]$$

$$= \frac{-\sin(\log x)}{\cos(\log x)} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}\tan(\log x)$$

उदाहरण 28.9. यदि $y = \log(\sec x + \tan x)$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \log (\sec x + \text{tax } x)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \left[\sec x \tan x + \sec^2 x \right]$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \sec x [\sec x + \tan x]$$

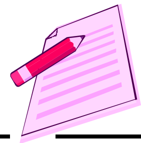
$$= \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

उदाहरण 28.10. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि $y = \dfrac{(4x^2 - 1)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^3 (x-7)^{\frac{3}{4}}}$ हो।

हल : यद्यपि आप भाग नियम (गुणन नियम) का सीधा उपयोग करके भी अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। परन्तु यदि आप दोनों पक्षों का लघुगणक लेगें तो गुणा, योग में बदल जायेगी तथा भाग, घटा में। इससे विधि आसान हो जाती है।

$$y = \frac{(4x^2 - 1)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^3 (x-7)^{\frac{3}{4}}}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है



$$\therefore \quad \log y = \log\left[\frac{(4x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^3(x-7)^{\frac{3}{4}}}\right]$$

अथवा $$\log y = \log(4x^2-1) + \frac{1}{2}\log(1+x^2) - 3\log x - \frac{3}{4}\log(x-7)$$

(log के गुणधर्मो का उपयोग करने पर)

अब दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{1}{4x^2-1}\cdot 8x + \frac{1}{2(1+x^2)}\cdot 2x - \frac{3}{x} - \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{x-7}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{4x^2-1} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{x} - \frac{3}{4(x-7)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{8x}{4x^2-1} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{x} - \frac{3}{4(x-7)}\right]$$

$$= \frac{(4x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^3(x-7)^{\frac{3}{4}}}\left[\frac{8x}{4x^2-1} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{x} - \frac{3}{4(x-7)}\right]$$

देखें आपने कितना सीखा 28.2

1. नीचे दिये गये प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x) = 5\sin x - 2\log x$ (b) $f(x) = \log\cos x$

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y = e^{x^2}\log x$ (b) $y = \frac{e^{x^2}}{\log x}$

3. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $y = \log(\sin\log x)$ (b) $y = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

   (c) $y = \log\left[\frac{a + b\tan x}{a - b\tan x}\right]$ (d) $y = \log(\log x)$

4. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y = (1+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{2}{3}}(x^2+5)^{\frac{1}{7}}(x+9)^{-\frac{3}{2}}$ (b) $y = \frac{\sqrt{x}(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{(3+4x)^{\frac{5}{4}}(3-7x^2)^{\frac{1}{4}}}$

28.3 कुछ और लघुगणकीय फलनों के अवकलज

हम जानते हैं कि x के सापेक्ष x^n का अवकलज nx^{n-1} होता है जहाँ n एक स्थिरांक है। यदि घातांक भी चरांक हो, तो यह नियम लागू नहीं होता। ऐसी स्थिति में हम फलन का लघुगणक लेते हैं और तब उसका अवकलज ज्ञात करते हैं।

इसलिए यह क्रिया तभी लाभप्रद है जबकि दिया गया फलन $[f(x)]^{g(x)}$ के प्रकार का होता है। उदाहरणतया a^x, x^x इत्यादि।

टिप्पणी: यहाँ f(x) एक अचर हो सकता है।

a^x का x के सापेक्ष अवकलज

माना $\quad y = a^x, \qquad a > 0$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, हमें मिलता है

$$\log y = \log a^x = x \log a \qquad [\log m^n = n \log m]$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x \log a) \quad \text{अथवा} \quad \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \log a \times \frac{d}{dx}(x)$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = y \log a = a^x \log a$$

अत: $$\mathbf{\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a}, \qquad a > 0$$

उदाहरण 28.11. निम्नलिखित फलनों में प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y = x^x$ $\qquad$ (ii) $y = x^{\sin x}$

हल : (i) $\quad y = x^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है

$$\log y = x \log x$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \log x \frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(\log x) \qquad \text{[गुणन नियम के प्रयोग से]}$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y[\log x + 1] = x^x(\log x + 1)$$

(ii) $\quad y = x^{\sin x}$

दोनों पक्षों का लघु लेने पर हमें मिलता है

$$\log y = \sin x \log x$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log x)$$

अथवा $$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\cos x.\log x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=y\left[\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right]$$

अतः $$\frac{dy}{dx}=x^{\sin x}\left[\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right]$$

उदाहरण 28.12. यदि $y=(\log x)^{x}+\left(\sin^{-1}x\right)^{\sin x}$ हो, तो इसका अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : दोनों पक्षों का लघुगणक लेना लाभदायक नहीं क्योंकि हम योग को गुणन में नहीं बदल सकते तथा दिये गये योग का लघुगणक नहीं लिया जा सकता।

अतः हम $u=(\log x)^{x}$ तथा $v=(\sin^{-1}x)^{\sin x}$ लेते हैं

तब $$y=u+v$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx} \qquad \text{......(i)}$$

अब $$u=(\log x)^{x}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, हमें मिलता है

$$\log u=\log(\log x)^{x}$$

$\therefore$ $$\log u=x\log(\log x) \qquad \left[\because \log m^{n}=n\log m\right]$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}=1\cdot\log(\log x)+x\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}$$

अतः $$\frac{du}{dx}=u\left[\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right]$$

$$\frac{du}{dx}=(\log x)^{x}\left[\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right] \qquad \text{.....(ii)}$$

और $$v=(\sin^{-1}x)^{\sin x}$$

$\therefore$ $$\log v=\sin x\log(\sin^{-1}x)$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(\log v)=\frac{d}{dx}[\sin x\log(\sin^{-1}x)]$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\sin x\cdot\frac{1}{\sin^{-1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}+\cos x\cdot\log\left(\sin^{-1}x\right)$$

अथवा $$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sin x}{\sin^{-1} x} + \cos x \cdot \log \sin^{-1} x\right]$$

$$= \left(\sin^{-1} x\right)^{\sin x}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sin x}{\sin^{-1} x} + \cos x \log\left(\sin^{-1} x\right)\right] \qquad ....(iii)$$

(i), (ii) तथा (iii) से हमें मिलता है,

$$\frac{dy}{dx} = (\log x)^x\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right] + \left(\sin^{-1} x\right)^{\sin x}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sin x}{\sin^{-1} x} + \cos x \log \sin^{-1} x\right]$$

उदाहरण 28.13. यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

हल : दिया है कि $x^y = e^{x-y}$ .....(i)

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है :

$$y \log x = (x-y)\log e = (x-y)$$

अथवा $$y(1+\log x) = x \qquad [\because \ \log e = 1]$$

अथवा $$y = \frac{x}{1+\log x} \qquad .....(ii)$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)\cdot 1 - x\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2} = \frac{1+\log x - 1}{(1+\log x)^2} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

उदाहरण 28.14. यदि $e^x \log y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया गया है कि $e^x \log y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$e^x\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right) + e^x \log y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}$$

अथवा $$\left[\frac{e^x}{y} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right]\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - e^x \log y$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{1-y^2}\left[1 - e^x\sqrt{1-x^2}\log y\right]}{\left[e^x\sqrt{1-y^2} - y\right]\sqrt{1-x^2}}$$

उदाहरण 28.15. यदि $y = (\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)......\infty}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया गया है कि $y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)\ldots\ldots\infty}}=(\cos x)^y$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है

$$\log y = y \log \cos x \qquad \ldots..(i)$$

(i) का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x)+\log(\cos x)\cdot\frac{dy}{dx}$$

अथवा $$\left[\frac{1}{y}-\log(\cos x)\right]\frac{dy}{dx}=-y\tan x$$

अथवा $$\left[1-y\log(\cos x)\right]\frac{dy}{dx}=-y^2\tan x$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2\tan x}{1-y\log(\cos x)}$$

देखें आपने क्या सीखा 28.3

1. नीचे दिये गये फलनों में प्रत्येक का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $y=5^x$ (b) $y=3^x+4^x$ (c) $y=\sin(5^x)$

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y=x^{2x}$ (b) $y=(\cos x)^{\log x}$ (c) $y=(\log x)^{\sin x}$

   (d) $y=(\tan x)^x$ (e) $y=(1+x^2)^{x^2}$ (f) $y=x^{(x^2+\sin x)}$

3. नीचे दिये गये फलनों में प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $y=(\tan x)^{\cot x}+(\cot x)^x$ (b) $y=x^{\log x}+(\sin x)^{\sin^{-1}x}$

   (c) $y=x^{\tan x}+(\sin x)^{\cos x}$ (d) $y=(x)^{x^2}+(\log x)^{\log x}$

4. यदि $y=(\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\ldots\ldots\infty}}$ हो, तो दर्शाइए कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\cot x}{1-y\log(\sin x)}$$

5. यदि $y=\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\ldots\ldots\infty}}}$ हो, तो दर्शाइए कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x(2x-1)}$$

28.4 द्वितीय कोटि (Second order) के अवकलज

पिछले पाठ में हमने त्रिकोणमितीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज (Second order derivatives), त्रिकोणमितीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के सूत्रों का उपयोग करके ज्ञात किये थे। इनमें हमने अवकलजों के विभिन्न नियमों (laws) जिसमें श्रृखंला नियम (chain rule) तथा घात नियम का उपयोग किया गया था। इसी प्रकार हम चरघांताकी तथा लघुगणकीय फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 28.16. नीचे दिये फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) e^x (ii) $\cos(\log x)$ (iii) x^x

हलः (i) मान लीजिए कि $y = e^x$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad .....(i)$$

(i) का फिर x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

(ii) मान लीजिए कि $y = \cos(\log x)$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{-\sin(\log x)}{x}$$

एक बार फिर x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{\sin(\log x)}{x}\right]$$

अथवा
$$= -\frac{x\cdot\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x} - \sin(\log x)}{x^2}$$

$\therefore$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2}$$

(iii) मान लीजिए कि $y = x^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है

$$\log y = x\log x \qquad ....(i)$$

(i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x$$

अथवा
$$\frac{dy}{dx} = y(1+\log x) \qquad ....(ii)$$

(ii) का x के सापेक्ष फिर अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[y(1+\log x)\right] = y \cdot \frac{1}{x} + (1+\log x)\frac{dy}{dx} \qquad \text{...(iii)}$$

$$= \frac{y}{x} + (1+\log x)y(1+\log x)$$

$$= \frac{y}{x} + (1+\log x)^2 y = y\left[\frac{1}{x} + (1+\log x)^2\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = x^x\left[\frac{1}{x} + (1+\log x)^2\right]$$

उदाहरण 28.17. यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}$ है, तो दर्शाईये कि $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$

हल : हमें दिया है $y = e^{a\cos^{-1}x}$ .....(i)

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = e^{a\cos^{-1}x} \cdot \frac{-a}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{ay}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(i) का प्रयोग करके}$$

अथवा
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2y^2}{1-x^2}$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(1-x^2\right) - a^2y^2 = 0 \qquad \text{.....(ii)}$$

(ii) के दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(-2x) + 2\left(1-x^2\right)\times\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - a^2\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा
$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0 \qquad \left(\text{सब पदों को } 2\cdot\frac{dy}{dx} \text{ से भाग देने पर}\right)$$

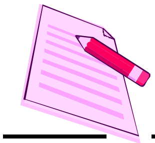
देखें आपने कितना सीखा 28.4

1. निम्नलिखित में प्रत्येक का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) x^4e^{5x} (b) $\tan\left(e^{5x}\right)$ (c) $\frac{\log x}{x}$

2. यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ हो, तो दर्शाइए कि

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$



3. यदि $y = e^{\tan^{-1} x}$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+(2x-1)\frac{dy}{dx}=0$$

28.5 प्राचलिक फलनों का अवकलन

कभी–कभी x तथा y दो चर इस प्रकार होते हैं जिन्हें किसी तीसरे चर, जिसे t कह सकते हैं, में स्पष्ट रूप से व्यक्त करते हैं। अर्थात् यदि $x = f(t)$ तथा $y = g(t)$ हों, तो इस प्रकार के फलन प्राचलिक–फलन कहलाते हैं तथा तीसरा चर प्राचल कहलाता है।

प्राचलिक रूप में फलनों का अवकलन प्राप्त करने के लिए, हम शृंखला नियम का प्रयोग करते हैं।

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}, \text{ जहाँ } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

जब $x = a \sin t$, $y = a \cos t$ है तो, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = a \cos t \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = -a\sin t$$

परन्तु
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-a\sin t}{a\cos t} = -\tan t$$

उदाहरण 28.19. यदि $x = 2at^2$ तथा $y = 2at$ है तो, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $x = 2at^2$ तथा $y = 2at$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = 4at \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = 2a$$

परन्तु
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{4at} = \frac{1}{2t}$$

उदाहरण 28.20. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि $x = a(\theta - \sin\theta)$ तथा $y = a(1+\cos\theta)$ है।

हल : दिया है
$$x = a(\theta - \sin\theta) \text{ तथा}$$
$$y = a(1+\cos\theta)$$

दोनों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta} = a(-\sin\theta)$$

परन्तु $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = -\cot \theta/2$$

उदाहरण 28.21. यदि $x = a\cos^3 t$ तथा $y = a\sin^3 t$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $x = a\cos^3 t$ तथा $y = a\sin^3 t$

दोनों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = 3a\cos^2 t\frac{d}{dt}(\cos t) = -3a\cos^2 t\sin t$$

तथा $$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\frac{d}{dt}(\sin t) = 3a\sin^2 t\cos t$$

परन्तु $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$$

उदाहरण 28.22. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$ तथा $y = \frac{2bt}{1+t^2}$ है।

हल : दिया है $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$ तथा $y = \frac{2bt}{1+t^2}$

दोनों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = a\left\{\frac{(1+t^2).(0-2t)-(1-t^2)(0+2t)}{(1+t^2)^2}\right\} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}$$

तथा $$\frac{dy}{dt} = 2b\left\{\frac{(1+t^2).(1)-t.(0+2t)}{(1+t^2)^2}\right\} = \frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

परन्तु $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\times\frac{(1+t^2)^2}{-4at} = \frac{-b(1-t^2)}{2at}$$

देखें आपने कितना सीखा 28.5

$\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जब :

1. $x = 2at^3$ तथा $y = at^4$
2. $x = a\cos\theta$ तथा $y = a\sin\theta$
3. $x = 4t$ तथा $y = \frac{4}{t}$
4. $x = b\sin^2\theta$ तथा $y = a\cos^2\theta$
5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta$ तथा $y = \sin\theta - \sin 2\theta$
6. $x = a\sec\theta$ तथा $y = b\tan\theta$

7. $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$ तथा $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$

8. $x = \sin 2t$ तथा $y = \cos 2t$

28.6 प्राचलिक फलनों का दूसरी कोटि का अवकलज

यदि दो प्राचलिक फलन $x = f(t)$ तथा $y = g(t)$ दिए हैं, तब

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = h(t) \quad \text{(मान लीजिए यहाँ } \frac{dx}{dt} \neq 0\text{)}$$

अतः
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\big((h(t)\big) \times \frac{dt}{dx}$$

उदाहरण 28.23. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए, यदि $x = at^2$ तथा $y = 2at$

हल : दोनों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = 2at \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

दोनों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) \times \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t^2} \times \frac{1}{2at} = -\frac{1}{2at^3}$$

उदाहरण 28.24. यदि $x = a \sin^3 \theta$ तथा $y = b \cos^3 \theta$ है तो $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $x = a \sin^3 \theta$ तथा $y = b \cos^3 \theta$

दोनों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a \sin^2\theta \cos\theta \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta} = 3b\cos^2\theta(-\sin\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-3b\cos^2\theta\sin\theta}{3a\sin^2\theta\cos\theta} = -\frac{b}{a}\cot\theta$$

दोनों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a}\frac{d}{dx}(\cot\theta) = \frac{-b}{a}\frac{d}{d\theta}(\cot\theta) \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a}(-\text{cosec}^2\theta) \times \frac{1}{3a\sin^2\theta\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{3a^2}\operatorname{cosec}^4\theta \sec\theta$$

उदाहरण 28.25. यदि $x = a\sin t$ तथा $y = b\cos t$ है तब $t = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $x = a\sin t$ तथा $y = b\cos t$

दोनों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = a\cos t \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = -b\sin t$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-b\sin t}{a\cos t} = \frac{-b}{a}\tan t$$

दोनों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a}\frac{d}{dt}(\tan t)\times\frac{dt}{dx} = \frac{-b}{a}\sec^2 t\times\frac{1}{a\cos t}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a^2}\sec^3 t$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) at\ t = \frac{\pi}{4} = \frac{-b}{a^2}\sec^3\frac{\pi}{4} = \frac{-b}{a^2}(\sqrt{2})^3 = \frac{-2\sqrt{2}b}{a^2}$$

देखें आपने कितना सीखा 28.6

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए, जब

1. $x = 2at$ तथा $y = at^2$
2. $x = a(t + \sin t)$ तथा $y = a(1 - \cos t)$
3. $x = 10(\theta - \sin\theta)$ तथा $y = 12(1 - \cos\theta)$
4. $x = a\sin t$ तथा $y = b\cos 2t$
5. $x = a - \cos 2t$ तथा $y = b - \sin 2t$

आइये दोहराएँ

- (i) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ (ii) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a \;\; ; \; a > 0$
- यदि µ x का एक अवकलनीय फलन है, तो

(i) $\frac{d}{dx}(e^{\mu}) = e^{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}(a^{\mu}) = a^{\mu} \cdot \log a \cdot \frac{d\mu}{dx}$;$a > 0$

(iii) $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = e^{ax+b} \cdot a = ae^{ax+b}$

- (i) $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

  (ii) यदि μ x का एक अवकलनीय फलन है, तो $\frac{d}{dx}(\log \mu) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx}$

  (iii) $\frac{d}{dx}\log(ax+b) = \frac{1}{ax+b} \cdot a = \frac{a}{ax+b}$

- यदि $x = f(t)$ and $u = g(t)$ तो $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{du/dt}$, जहां $\frac{dx}{dt} \neq 0$
- यदि $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = h(t)$ हो तो $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}[h(t)] \times \frac{dt}{dx}$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.themathpage.com/acalc/exponential.htm*
- *http://www.math.brown.edu/utra/explog.html*
- *http://www.freemathhelp.com/derivative-log-exponent.html*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $(x^x)^x$ (b) $x^{\left(x^x\right)}$

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y = a^{x \log \sin x}$ (b) $y = (\sin x)^{\cos^{-1} x}$

   (c) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ (d) $y = \log\left[e^x \left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{\frac{3}{4}}\right]$

3. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x) = \cos x \log(x) e^{x^2} x^x$ (b) $f(x) = (\sin^{-1} x)^2 \cdot x^{\sin x} \cdot e^{2x}$

4. निम्नलिखित में प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $y = (\tan x)^{\log x} + (\cos x)^{\sin x}$ (b) $y = x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}$

5. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि

(a) $y=\frac{x^4\sqrt{x+6}}{(3x+5)^2}$ (b) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{(e^x-e^{-x})}$

6. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि

(a) $y=a^x\cdot x^a$ (b) $y=7^{x^2+2x}$

7. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $y=x^2e^{2x}\cos 3x$ (b) $y=\frac{2^x\cot x}{\sqrt{x}}$

8. यदि $y=x^{x^{x^{x.......\infty}}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $x\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-y\log x}$

निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए

9. $(\sin)^{\cos x}$ 10. $(\log x)^{\log x}$ 11. $\frac{(x-1)\,(x-2)}{(x-3)\,(x-4)}$ 12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x+x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

$\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जब :

13. $x=a\left(\cos t+\log\frac{t}{2}\right)$ तथा $y=a\sin t$

14. $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$ तथा $y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$

15. $x=e^t(\sin t+\cos t)$ तथा $y=e^t(\sin t-\cos t)$

16. $x=e^{\cos 2t}$ तथा $y=e^{\sin 2t}$

17. $x=a\left(t+\frac{1}{t}\right)$ तथा $y=a\left(t-\frac{1}{t}\right)$

18. यदि $x=a(\theta-\sin\theta)$ तथा $y=a(1+\cos\theta)$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

19. यदि $x=\frac{2bt}{1+t^2}$ तथा $y=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ है, तो t = 2 पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

20. यदि $x=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ तथा $y=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=-\cot 3t$

21. यदि $x=2\cos\theta-\cos 2\theta$ तथा $y=2\sin\theta-\sin 2\theta$ है, तो सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx}=\tan\left(\frac{3\theta}{2}\right)$

22. यदि $x=\cos t$ तथा $y=\sin t$ है, तो $t=\frac{2\pi}{3}$ पर सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

23. यदि $x = a(\cos t + t\sin t)$ तथा $y = a(\sin t - t\cos t)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

24. यदि $x = a(\theta - \sin\theta)$ तथा $y = a(1+\cos\theta)$ है, तो $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

25. यदि $x = a\sin pt$ तथा $y = b\cos pt$ है, तो $t = 0$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

26. यदि $x = \log t$ तथा $y = \frac{1}{t}$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

27. यदि $x = a(1+\cos t)$ तथा $y = a(t+\sin t)$ है, तो $t = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

28. यदि $x = at^2$ तथा $y = 2at$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 28.1

1. (a) $5e^{5x}$ (b) $7e^{7x+4}$ (c) $\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$ (d) $-\frac{7}{2}e^{-\frac{7}{2}x}$ (e) $2(x+1)e^{x^2+2x}$

2. (a) $\frac{1}{3}e^x$ (b) $\sec^2 x + 2\cos x - 3\sin x - \frac{1}{2}e^x$
   (c) $5\cos x - 2e^x$ (d) $e^x - e^{-x}$

3. (a) $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$ (b) $e^{\sqrt{\cot x}}\left[\frac{-\cos ec^2 x}{2\sqrt{\cot x}}\right]$
   (c) $e^{x\sin^2 x}[\sin x + 2x\cos x]\sin x$
   (d) $e^{x\sec^2 x}\left[\sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x\right]$

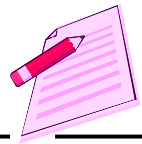
4. (a) xe^x (b) $2e^{2x}\sin x(\sin x + \cos x)$

5. (a) $\frac{2x^2 - x + 2}{(x^2+1)^{3/2}}e^{2x}$ (b) $\frac{e^{2x}[(2x-1)\cot x - x\cos ec^2 x]}{x^2}$

देखें आपने कितना सीखा 28.2

1. (a) $5\cos x - \frac{2}{x}$ (b) $-\tan x$

2. (a) $e^{x^2}\left[2x\log x + \frac{1}{x}\right]$ (b) $\frac{2x^2\log x - 1}{x(\log x)^2}.e^{x^2}$



3. (a) $\dfrac{\cot(\log x)}{x}$ (b) $\sec x$

(c) $\dfrac{2ab\sec^2 x}{a^2 - b^2\tan^2 x}$ (d) $\dfrac{1}{x\log x}$

4. (a) $(1+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{2}{3}}(x^2+5)^{\frac{1}{7}}(x+9)^{-\frac{3}{2}} \times \left[\dfrac{1}{2(1+x)} - \dfrac{2}{3(2-x)} + \dfrac{2x}{7(x^2-5)} - \dfrac{3}{2(x+9)}\right]$

(b) $\dfrac{\sqrt{x}(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{(3+4x)^{\frac{5}{4}}(3-7x^2)^{\frac{1}{4}}}\left[\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{1-2x} - \dfrac{5}{3+4x} + \dfrac{7x}{2(3-7x^2)}\right]$

देखें आपने कितना सीखा 28.3

1. (a) $5^x \log 5$ (b) $3^x \log 3 + 4^x \log 4$ (c) $\cos 5^x 5^x \log 5$

2. (a) $2x^{2x}(1+\log x)$ (b) $(\cos x)^{\log x}\left[\dfrac{\log\cos x}{x} - \tan x \log x\right]$

(c) $(\log x)^{\sin x}\left[\cos x \log(\log x) + \dfrac{\sin x}{x\log x}\right]$

(d) $(\tan x)^x\left[\log\tan x + \dfrac{x}{\sin x\cos x}\right]$

(e) $(1+x)^{x^2}\left[2x\log(1+x^2) + 2\dfrac{x^3}{1+x^2}\right]$

(f) $x^{(x^2+\sin x)}\left[\dfrac{x^2+\sin x}{x} + (2x+\cos x)\log x\right]$

3. (a) $\operatorname{cosec}^2 x(1-\log\tan x)(\tan x)^{\cot x} + \left(\log\cot x - x\operatorname{cosec}^2 x\tan x\right)(\cot x)^x$

(b) $2x^{(\log x - 1)}\log x + (\sin x)^{\sin^{-1}x}\left[\cot x\sin^{-1}x + \dfrac{\log\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(c) $x^{\tan x}\left(\dfrac{\tan x}{x} + \sec^2 x\log x\right) + (\sin x)^{\cos x}\left[\cos x\cot x - \sin x\log\sin x\right]$

(d) $(x)^{x^2}\cdot x(1+2\log x) + (\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1+\log(\log x)}{x}\right]$

देखें आपने कितना सीखा 28.4

1. (a) $e^{5x}\left(25x^4+40x^3+12x^2\right)$ (b) $25e^{5x}\sec^2\left(e^{5x}\right)\left\{1+2e^{5x}\tan e^{5x}\right\}$

(c) $\dfrac{2\log x - 3}{x^3}$

देखें आपने कितना सीखा 28.5

1. $\dfrac{2t}{3}$ 2. $-\cot\theta$ 3. $-\dfrac{1}{t^2}$

4. $-\dfrac{a}{b}$ 5. $\dfrac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta-\sin\theta}$ 6. $\dfrac{b}{a}\text{cosec}\,\theta$

7. $\dfrac{2t}{1-t^2}$ 8. $-\tan 2t$

देखें आपने कितना सीखा 28.6

1. $\dfrac{1}{2a}$ 2. $\dfrac{\sec^4 t/2}{4a}$ 3. $\dfrac{-3}{100}\text{cosec}^4\,\theta/2$

4. $\dfrac{-4b}{a^2}$ 5. $\text{cosec}^3 2t$

आइए अभ्यास करें

1. (a) $(x^x)^x[x+2x\log x]$ (b) $x^{(x)^x}[x^{x-1}+\log x(\log x+1)x^x]$

2. (a) $a^{x\log\sin x}[\log\sin x+x\cot x]\log a$

(b) $(\sin x)^{\cos^{-1}x}\left[\cos^{-1}x\cot x-\dfrac{\log\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(c) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\left[2x\log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right]$ (d) $1+\dfrac{3}{4(x-4)}-\dfrac{3}{4(x+4)}$

3. (a) $\cos x\log(x)e^{x^2}\cdot x^x\left[-\tan x+\dfrac{1}{x\log x}+2x+1+\log x\right]$

(b) $(\sin^{-1}x)^2.x^{\sin x}e^{2x}\left[\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}+\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}+2\right]$

4. (a) $(\tan x)^{\log x}\left[2\,\text{cosec}\,2x\log x+\dfrac{1}{x}\log\tan x\right]$

$+(\cos x)^{\sin x}[-\sin x\tan x+\cos x\log(\cos x)]$

(b) $x^{\tan x}\left[\dfrac{\tan x}{x}+\sec^2 x\log x\right]+(\sin x)^{\cos x}[\cot x\cos x-\sin x\log\sin x)]$

5. (a) $\dfrac{x^4\sqrt{x+6}}{(3x+5)^2}\left[\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{2(x+6)}-\dfrac{6}{(3x+5)}\right]$ (b) $\dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

6. (a) $a^x . x^{a-1}[a + x\log_e a]$ (b) $7^{x^2+2x}(2x+2)\log_e 7$

7. (a) $x^2 e^{2x}\cos 3x\left\{\frac{2}{x}+2-3\tan 3x\right\}$

(b) $\frac{2^x \cot x}{\sqrt{x}}\left[\log 2 - 2\operatorname{cosec} 2x - \frac{1}{2x}\right]$

9. $(\sin x)^{\cos x}[-\sin x \log\cos x + \cos x\cot x]$ 10. $(\log x)^{\log x}\left[\frac{\log(\log x)+1}{x}\right]$

11. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}\right]$

12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\log\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]+x^{x+\frac{1}{x}}\left[\frac{x^2-1}{x^2}\log x+\frac{x^2+1}{x^2}\right]$

13. $\tan t$ 14. $\tan\theta$ 15. $\tan t$ 16. $\frac{-y\log x}{x\log y}$

17. $\frac{x}{y}$ 18. $-\sqrt{3}$ 19. $\frac{4a}{3b}$ 20. $\frac{\sec^3\theta}{a\theta}$

21. $\frac{1}{a}$ 22. $\frac{-b}{a^2}$ 23. $\frac{1}{t}$ 24. $\frac{-1}{a}$

25. $\frac{-1}{2at^3}$ 26. $\frac{-1}{t}$ 27. -2 28. $\frac{1}{t}$