29

अवकलज के अनुप्रयोग

311hi29

पिछले पाठ में हमने विभिन्न प्रकार के फलनों का अवकलज ज्ञात करना सीख था। अब हम अवकलज के प्रयोग से राशियों के परिवर्तन की दर फलनों का सन्निकट मान, वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान तथा विभिन्न अंतरालों में फलनों के वर्धमान या ह्रासमान होने का अध्ययन करेंगे। हम रोले के प्रमेय तथा माध्यमान प्रमेय तथा उनके अनुप्रयोगों के बारे में भी सीखेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- राशियों के परिवर्तन की दर ज्ञात करना
- फलनों का सन्निकट मान ज्ञात करना
- किसी वक्र (फलन के आलेख) कि किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब को परिभाषित करना।
- दिये गये प्रतिबंध (conditions) के अन्तर्गत एक वक्र पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात करना।
- एकदिष्ट (वर्धमान/ह्रासमान) फलनों को परिभाषित करना
- एक अन्तराल में वर्धमान फलनों के लिए $\frac{dy}{dx} > 0$ तथा ह्रासमान फलनों के लिए $\frac{dy}{dx} < 0$ स्थापित करना
- आलेख से एक दिये गये अन्तराल में एक फलन के अधिकतम तथा न्यूनतम मानों वाले (स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ सहित) बिन्दुओं को परिभाषित करना
- फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ उनके प्रथम अवकलज तथा द्वितीय अवकलज का उपयोग करके ज्ञात करने के लिए एक कार्यकारी नियम (working rule) स्थापित करना
- उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ पर सरल प्रश्न हल करना
- रोले के प्रमेय तथा माध्यमान प्रमेय का वर्णन करना, तथा
- उपरोक्त प्रमेयों की वैधता (validity) की जाँच करना, तथा उन्हें विभिन्न प्रश्नों को हल करने में प्रयोग करना।

पूर्व ज्ञान

- निर्देशांक ज्यामिति का ज्ञान
- किसी वक्र पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब की संकल्पना
- विभिन्न फलनों के अवकल गुणांकों की संकल्पना
- किसी फलन के किसी बिन्दु पर अवकलज का ज्यामितीय अर्थ

29.1 राशियों के परिवर्तन की दर

मान लीजिए $y = f(x)$, x का एक फलन है तथा मान लीजिए कि x में एक छोटा–सा परिवर्तन Δx है, एवं y में संगत परिवर्तन Δy है।

$\therefore$ x के सापेक्ष, y का प्रति इकाई औसत परिवर्तन $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

इस प्रकार $\Delta x \to 0$, x के सापेक्ष, y के औसत परिवर्तन की दर का सीमांत मान है

इसलिए x के सापेक्ष, y में प्रति इकाई परिवर्तन की दर $= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

अतः $\dfrac{dy}{dx}$, x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर प्रदर्शित करता है।

इस प्रकार $x = x_0$ पर $\dfrac{dy}{dx}$ का मान, अर्थात् $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0)$

$f'(x_0)$, $x = x_0$ पर x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है।

इसके अतिरिक्त यदि दो राशियाँ x तथा y, t के सापेक्ष परिवर्तित हो रही हों अर्थात् $y = f(t)$ और $x = g(t)$ है तब श्रृंखला नियम से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \frac{dx}{dt} \neq 0$$

अतः x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर का परिकलन t के सापेक्ष y और x के परिवर्तन की दर का प्रयोग करके किया जा सकता है।

उदाहरण 29.1. वृत के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी चर त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए, जब $r = 3$ सेमी.

हल : मान लीजिए r त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल A है

तब $$A = \pi r^2$$

$\therefore$ r के सापेक्ष A के परिवर्तन की दर

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$$

जब $r = 3$ सेमी., $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi \times 3 = 6\pi$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल 6π सेमी.^{2}/सेमी. की दर से बदल रहा है।

उदाहरण 29.2. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\dfrac{3}{2}(2x+3)$ है। x के सापेक्ष इसके आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हल : गोलाकार (वृत्त की त्रिज्या (r) $= \dfrac{1}{2}$ (व्यास) $= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2}(2x+3) = \dfrac{3}{4}(2x+3)$

मान लीजिए गुब्बारे का आयतन V हैं, तब

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}(2x+3)\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{9}{16}\pi(2x+3)^3$$

$\therefore$ x के सापेक्ष आयतन में परिवर्तन की दर

$$\frac{dV}{dx} = \frac{9}{16}\pi \times 3(2x+3)^2 \times 2 = \frac{27}{8}\pi(2x+3)^2$$

अतः आयतन $\frac{27}{8}\pi(2x+3)^2$ इकाई^3/इकाई की दर से परिवर्तित हो रहा है।

उदाहरण 29.3. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पम्प द्वारा 900 सेमी^{3} गैस प्रति सेकण्ड भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब इसकी त्रिज्या 15 सेमी. है।

हल : मान लीजिए गोलीय गुब्बारे की त्रिज्या r तथा किसी भी समय t में इसका आयतन V है, तब

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right).\frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{4}{3}\pi.3r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

परन्तु $\frac{dV}{dt} = 900$ सेमी^{3}/सेकन्ड (दिया है)

इसलिए $4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 900$

$\Rightarrow$ $\frac{dr}{dt} = \frac{900}{4\pi r^2} = \frac{225}{\pi r^2}$

जब $r = 15$ सेमी.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{225}{\pi \times 15^2} = \frac{1}{\pi}$$

अतः गोले की त्रिज्या $\frac{1}{\pi}$ सेमी./से., की दर से बढ़ रही है, जब इसकी त्रिज्या 15 सेमी. है।

उदाहरण 29.4. एक 5 मी. लम्बी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2सेमी/सेकन्ड की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 मी. दूर है?

हल : मान लीजिए सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से x मी. की दूरी पर है तथा किसी समय t पर सीढ़ी की लम्बाई y मीटर है, तब

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{...(i)}$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

परन्तु $\qquad \dfrac{dx}{dt} = 2$ मी/सेकन्ड (दिया है)

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\times 2 = -\frac{2x}{y} \qquad \ldots(ii)$$

जब $x = 4$मी, (i) से $y^2 = 25 - 16 \Rightarrow y = 3$मी

समीकरण (ii) में $x = 4$मी तथा $y = 3$मी रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\times 4}{3} = \frac{-8}{3}$$

अतः दीवार पर सीढ़ी की ऊँचाई $\frac{8}{3}$ मी/सेकन्ड की दर से घट रही है।

उदाहरण 29.5. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x) = 10x^2 + 13x + 24$ से प्रदत्त है/दी गई है। जब $x = 5$ हो तो सीमांत आय ज्ञात कीजिए जहाँ सीमान्त आय से हमारा तात्पर्य किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष सम्पूर्ण आय के परिवर्तन की दर से है।

हल : दिया है $R(x) = 10x^2 + 13x + 24$

क्योंकि सीमांत आय किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष आय परिवर्तन की दर से होती है। हम जानते हैं कि

सीमांत आय (MR) $= \dfrac{dR}{dx} = 20x + 13$

जब $x = 5$, $MR = 20 \times 5 + 13 = 113$

अतः अभीष्ट सीमांत आय $=$ ₹ 113

उदाहरण 29.6. किसी वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में कुल लागत

$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$ से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जब 17 इकाई उत्पादित की जाती है, जहाँ सीमांत लागत से हमारा तात्पर्य किसी स्तर पर उत्पादन के सम्पूर्ण लागत में तात्कालिक परिवर्तन की दर से है।

हल : दिया है $C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$

क्योंकि सीमांत लागत उत्पादन के किसी स्तर पर सम्पूर्ण लागत के परिवर्तन की दर है, हम प्राप्त करते हैं कि

सीमांत लागत (MC) $= \dfrac{dC}{dx} = 0.007 \times 3x^2 - 0.003 \times 2x + 15 = 0.021x^2 - 0.006x + 15$

जब x = 17, $\qquad MC = 0.021 \times 17^2 - 0.006 \times 17 + 15$

$\qquad = 6.069 - 0.102 + 15 = 20.967$

अतः सीमांत आय $\qquad =$ ₹ 20.967

देखें आपने कितना सीखा 29.1

1. किसी वर्ग की भुजा 4 सेमी/मिनट की दर से घट रही है। यदि वर्ग की भुजा 8 सेमी हो तो, उसका क्षेत्रफल किस दर से घटेगा?
2. एक परिवर्तशील घन का किनारा 3 सेमी/सेकन्ड की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 सेमी लम्बा है।

3. वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या 6 सेमी है।
4. साबुन के एक गोलीय बुलबुले की त्रिज्या 0.2 सेमी/सेकन्ड की दर से बढ़ रही है। इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या 7 सेमी है।
5. एक घन के आयतन के परिवर्तन की दर उसकी भुजा के सापेक्ष ज्ञात कीजिए, जबकि भुजा 5 सेमी है।

29.2 सन्निकटन

इस भाग में, हम चिह्न dx तथा dy को एक अर्थ देंगे जिससे चिह्न $\frac{dy}{dx}$ का वास्तविक अर्थ, dy को dx से भाग देना जैसा हो जाए।

मान लीजिए $y = f(x)$, x का एक फलन है तथा Δx, x में एक छोटा सा परिवर्तन है एवं Δy, y में एक संगत बदलाव/परिवर्तन है। तब

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon, \text{ जहाँ } \varepsilon \to 0 \text{ जब } \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

$\because$ $\varepsilon \Delta x$ बहुत ही सूक्ष्म राशि है जिसे नगण्य मान सकते हैं, इसलिए हमें प्राप्त होता है $\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$, सन्निकटतः

यह सूत्र परतंत्र चर के सूक्ष्म परिवर्तन (या त्रुटि) का स्वतंत्र चर के सूक्ष्म परिवर्तन (या त्रुटि) के संगत गणना करने में बहुत ही उपयोगी है।

कुछ महत्वपूर्ण पद

स्वतंत्र/निरपेक्ष त्रुटि : x में त्रुटि Δx, x में निरपेक्ष त्रुटि कहलाती है।

अपेक्षाकृत त्रुटि : यदि x में त्रुटि Δx है तब $\frac{\Delta x}{x}$, x में अपेक्षाकृत त्रुटि कहलाती है।

प्रतिशतता त्रुटि : यदि x में एक त्रुटि Δx है तब $\frac{\Delta x}{x} \times 100$, x में प्रतिशतता त्रुटि कहलाती है।

नोटः हमें ज्ञात है $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \varepsilon.\Delta x$

$\because$ $\varepsilon.\Delta x$ बहुत छोटा/नगण्य है इसलिए Δy का मुख्य मान $= \frac{dy}{dx}\Delta x$ जो कि y का अवकलज कहलाता है।

अर्थात् $$\Delta y = \frac{dy}{dx}.\Delta x$$

$\therefore$ x का अवकलज

$$dx = \frac{dx}{dx}.\Delta x = \Delta x \text{ द्वारा दिया जाता है}$$

अतः $$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

dx, Δx, dy तथा Δy का ज्यामितीय व्याख्या/अर्थ जानने के लिए हम वक्र $y = f(x)$ के निकट बिन्दु $P(x, y)$ के क्षेत्र पर अपना ध्यान केन्द्रित करते हैं जहाँ वक्र पर एक स्पर्श रेखा खींच सकते हैं। यदि वक्र पर एक अन्य बिन्दु $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $(\Delta x \neq 0)$ है, तब रेखा PQ का ढाल $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ होगा जो कि $\frac{dy}{dx}$ के सीमा मान के सन्निकट है (P पर स्पर्श रेखा का ढाल/झुकाव)

इसलिए, जब $\Delta x \to 0$, Δy, dy के लगभग बराबर/सन्निकट है।

उदाहरण 29.7. अवकलन का प्रयोग करके $\sqrt{25.3}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $y = \sqrt{x}$

'x' के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$x = 25$ एवं $x + \Delta x = 25.3$ लीजिए, तब $dx = \Delta x = 0.3$ जब $x = 25$, $y = \sqrt{25} = 5$

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{25}} \times 0.3 = \frac{1}{10} \times 0.3 = 0.03$$

$\Rightarrow \Delta y = 0.03$ ($\because$ dy सन्निकटतः Δy के बराबर है)

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{25.3}$$

$\Rightarrow$ $$\sqrt{25.3} = 5 + 0.03 = 5.03 \text{ सन्निकटतः}$$

उदाहरण 29.8. अवकलन का प्रयोग करके $(127)^{\frac{1}{3}}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल : $y = x^{\frac{1}{3}}$ लीजिए

मान लीजिए $x = 125$ तथा $x + \Delta x = 127$, तब $dx = \Delta x = 2$

जब $x = 125$, $y = (125)^{\frac{1}{3}} = 5$

अब $$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{3x^{2/3}}dx = \frac{1}{3(125)^{2/3}} \times 2 = \frac{2}{75}$$

$\Rightarrow$ $$\Delta y = \frac{2}{75} \qquad (\because \Delta y = dy)$$

अतः $(127)^{\frac{1}{3}} = y + \Delta y = 5 + \frac{2}{75} = 5.026$ (सन्निकट)

उदाहरण 29.9. $f(3.02)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$.

हल : मान लीजिए $x = 3$ तथा $x + \Delta x = 3.02$, तब $dx = \Delta x = 0.02$

हमें ज्ञात है $\quad f(x) = 3x^2 + 5x + 3$

जब $x = 3$

$\Rightarrow \quad f(3) = 3(3)^2 + 5(3) + 3 = 45$

अब $y = f(x)$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x = (6x+5)\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = (6 \times 3 + 5) \times 0.02 = 0.46$$

$\therefore \quad f(3.02) = f(x + \Delta x) = y + \Delta y = 45 + 0.46 = 45.46$

अतः $f(3.02)$ का सन्निकट मान 45.46.

उदाहरण 29.10. एक गोले की त्रिज्या 9 सेमी मापी जाती है जिसमें 0.03 की त्रुटि है। इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए गोले की त्रिज्या r है इसके मापन में त्रुटि Δr है।

तब $r = 9$ सेमी तथा $\Delta r = 0.03$ सेमी

मान लीजिए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल S है। तब

$S = 4\pi r^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{dS}{dr} = 4\pi \times 2r = 8\pi r$$

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)_{r=9 \text{ पर}} = 8\pi \times (9) = 72\pi$$

मान लीजिए S में ΔS त्रुटि है, तब

$$\Delta S = \frac{dS}{dr}\Delta r = 72\pi \times 0.03 = 2.16\pi \text{ सेमी}^2$$

अतः पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिकलन में सन्निकट त्रुटि 2.16π सेमी^{2} है।

उदाहरण 29.11. x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 2% की वृद्धि के कारण से घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए x में परिवर्तन Δx तथा V में संगत परिवर्तन ΔV है।

दिया है कि $\dfrac{\Delta x}{x} \times 100 = 2 \Rightarrow \Delta x = \dfrac{2x}{100}$

हमें ज्ञात है $\quad V = x^3$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = 3x^2$$

$$\text{अब} \quad \Delta V = \frac{dV}{dx}\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = 3x^2 \times \frac{2x}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \frac{6}{100}.V$$

अतः आयतन में सन्निकट परिवर्तन 6% है।

देखें आपने कितना सीखा 29.2

1. अवकलन का प्रयोग करके, $\sqrt{36.6}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।
2. अवकलन का प्रयोग करके, $(25)^{\frac{1}{3}}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।
3. अवकलन का प्रयोग करके, $(15)^{\frac{1}{4}}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।
4. अवकलन का प्रयोग करके, $\sqrt{26}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।
5. एक गोले की त्रिज्या 7 मी मापी जाती है जिसमें 0.02 मी की त्रुटि है। इसके आयतन के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।
6. एक घन के आकार के सन्दूक के आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कीजिए यदि सन्दूक की भुजा की माप में 1% की त्रुटि हुई है।

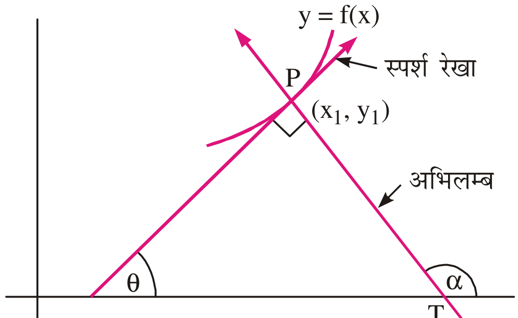
29.3 स्पर्श रेखा तथा अभिलंब की ढाल

माना $y = f(x)$ एक सतत वक्र है तथा माना $P(x_1, y_1)$ उस पर एक बिन्दु है, तो $P(x_1, y_1)$ पर प्रवणता PT' निम्न द्वारा परिभाषित है

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_1, y_1) \quad \text{पर} \qquad ....(i)$$

तथा (i) का मान $\tan\theta$ के बराबर है।

हम जानते हैं कि किसी वक्र पर अभिलंब एक ऐसी रेखा है जो स्पर्श बिन्दु पर स्पर्श रेखा पर लम्बवत् है



चित्र. 29.1

हम जानते हैं कि $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$

$$\Rightarrow \qquad \tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta = -\frac{1}{\tan\theta}$$

$\therefore$ अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{1}{m} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ बिंदु (x_1, y_1) पर अथवा $-\left(\frac{dx}{dy}\right)$ बिंदु (x_1, y_1) पर।

टिप्पणी

1. किसी वक्र के एक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है यदि $\theta = 0$ है अर्थात उस बिन्दु पर अवकलज का मान शून्य है।

अर्थात्, बिन्दु (x_1, y_1) पर $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

2. किसी वक्र $y = f(x)$ के एक बिन्दु पर स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है यदि उस बिन्दु पर $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 29.12. वक्र $x^2 + x^3 + 3xy + y^2 = 6$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र का समीकरण है :

$$x^2 + x^3 + 3xy + y^2 = 6 \qquad .....(i)$$

(i) का अवकलन x के सापेक्ष करने पर हमें मिलता है :

$$2x + 3x^2 + 3\left[x\frac{dy}{dx} + y.1\right] + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

(ii) में $x = 1, y = 1$ रखने पर हमें मिलता है :

$$2\times1 + 3\times1 + 3\left[\frac{dy}{dx} + 1\right] + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $$5\frac{dy}{dx} = -8 \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{8}{5}$$

स्पर्श रेखा की (1, 1) पर प्रवणता $-\frac{8}{5}$ है।

अभिलंब की प्रवणता $\frac{5}{8}$ है।

उदाहरण 29.13. दर्शाइए कि वक्र $y = \frac{1}{6}\left[3x^5 + 2x^3 - 3x\right]$ पर स्थित बिन्दुओं $x = \pm 3$ पर स्पर्श रेखाएँ समान्तर हैं।

हल : वक्र का समीकरण है, $y = \frac{3x^5 + 2x^3 - 3x}{6}$ .....(i)

(i) का अवकलन x के सापेक्ष करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(15x^4 + 6x^2 - 3\right)}{6}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3 \text{ पर}} = \frac{\left[15(3)^4 + 6(3)^2 - 3\right]}{6}$$

$$= \frac{1}{6}[15\times9\times9 + 54 - 3] = \frac{3}{6}[405 + 17] = 211$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right), x = -3 \text{ पर} = \frac{1}{6}\left[15(-3)^4 + 6(-3)^2 - 3\right] = 211$$

अतः वक्र पर स्थित $x = \pm 3$ पर स्पर्श रेखाएँ समान्तर हैं क्योंकि $x = \pm 3$ पर उनकी प्रवणताएँ समान हैं।

उदाहरण 29.14. वक्र $6y^3 = px^2 + q$ के बिन्दु $(2, -2)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{1}{6}$ है। p तथा q के मान ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र का समीकरण है : $6y^3 = px^2 + q$ ...(i)

(i) का अवकलन x के सापेक्ष करने पर हमें मिलता है :

$$18y^2 \frac{dy}{dx} = 2px \qquad .....(ii)$$

$x = 2, y = -2$, (ii) में रखने पर

$$18(-2)^2 \frac{dy}{dx} = 2p \cdot 2 = 4p$$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{18}$ यह $\frac{1}{6}$ के बराबर है

$\therefore$ $\frac{1}{6} = \frac{p}{18} \Rightarrow p = 3$

अतः वक्र का समीकरण बन जाता है : $6y^3 = 3x^2 + q$

बिन्दु (2, –2) वक्र पर स्थित है।

$\therefore$ $6(-2)^3 = 3(2)^2 + q$

$\Rightarrow$ $-48 - 12 = q$ अथवा $q = -60$

$\therefore$ $p = 3$, तथा $q = -60$ है

देखें आपने कितना सीखा 29.3

1. निम्नलिखित वक्रों में से प्रत्येक के लिए दिए गए बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं तथा अभिलंबों की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

   (i) $y = x^3 - 2x$, $x = 2$ पर (ii) $x^2 + 3y + y^2 = 5$, (1, 1) पर

   (iii) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर

2. यदि वक्र $xy + px + qy = 2$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 2 है, तो p तथा q के मान ज्ञात कीजिए।

3. वक्र $x^2 + y^2 = 18$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा $x + y = 3$ के समान्तर है।

4. वक्र $y = x^2 - 4x + 5$ के किन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा, रेखा $2y + x - 7 = 0$ के लंबवत है?

29.4 किसी वक्र पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण

हम जानते हैं किसी एक बिन्दु (x_1, y_1) से होकर जाने वाली तथा प्रवणता m वाली रेखा का समीकरण है :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

पिछले परिच्छेद में जैसा हमने पढ़ा था वक्र $y = f(x)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, बिन्दु (x_1, y_1) पर, $\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_1, y_1)$ पर द्वारा दिया जाता है तथा अभिलंब की प्रवणता (x_1, y_1) पर $\left(-\frac{dx}{dy}\right)$ है।

$\therefore$ $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है :

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} [x - x_1]$$

तथा $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलंब का समीकरण है :

$$y - y_1 = \left(\frac{-1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(x_1, y_1)} [x - x_1]$$

टिप्पणी

(i) एक वक्र पर एक स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$ पर $= 0$ है तथा स्पर्श रेखा का समीकरण $y = y_1$ है।

(ii) यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$ पर $\to \infty$ तो (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है तथा उसका समीकरण $x = x_1$ है।

आइए कुछ उदाहरण लेकर इसे स्पष्ट करें।

उदाहरण 29.15. वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ पर स्थित बिन्दु $(4, 3)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त का समीकरण है $x^2 + y^2 = 25$ ...(i)

(i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है :

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$\therefore \qquad \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(4,3)\text{ पर}} = -\dfrac{4}{3}$

वृत्त के बिन्दु $(4, 3)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है :

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-4)$$

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-4)$$

अथवा $\qquad 4(x-4)+3(y-3)=0 \qquad$ अथवा $\qquad 4x+3y=25$

तथा अभिलंब की प्रवणता $\qquad = \dfrac{-1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(4,3)}} = \dfrac{3}{4}$

$\therefore$ वृत्त के बिन्दु $(4, 3)$ पर अभिलंब का समीकरण है

$$y-3=\frac{3}{4}(x-4)$$

अथवा $\qquad 4y-12=3x-12$

$\Rightarrow \qquad 3x=4y$

$\therefore$ वृत्त पर स्थित बिन्दु $(4,3)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $4x+3y=25$ है तथा वृत्त पर स्थित बिन्दु $(4,3)$ पर अभिलंब का समीकरण $3x=4y$ है।

उदाहरण 29.16. वक्र $16x^2+9y^2=144$ पर स्थित बिन्दु (x_1, y_1) पर, जहाँ $y_1>0$ तथा $x_1=2$ है, स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र का समीकरण है : $16x^2+9y^2=144$ ...(i)

(i) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$32x+18y\frac{dy}{dx}=0$$

अथवा $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{16x}{9y}$

क्योंकि $x_1=2$ है तथा बिंदु (x_1, y_1) वक्र पर स्थित है

$\therefore \qquad 16(2)^2+9\left(y^2\right)=144$

$\Rightarrow \qquad y^2=\dfrac{80}{9} \Rightarrow y=\pm\dfrac{4}{3}\sqrt{5}$

चूँकि $\qquad y_1>0 \Rightarrow y_1=\dfrac{4}{3}\sqrt{5}$

अतः, वक्र के बिन्दु $\left(2, \dfrac{4}{3}\sqrt{5}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है :

$$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\left(-\frac{16x}{9y}\right)_{\left(2,\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)\text{पर}}[x-2]$$

अथवा $$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=-\frac{16}{9}\cdot\frac{2\times 3}{4\sqrt{5}}(x-2)$$ अथवा $$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}+\frac{8}{3\sqrt{5}}(x-2)=0$$

अथवा $$3\sqrt{5}\ \ y-\frac{4}{3}\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}+8(x-2)=0$$

$$3\sqrt{5}y-20+8x-16=0$$ अथवा $$3\sqrt{5}y+8x=36$$

तथा, वक्र के बिन्दु $\left(2,\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$ पर अभिलंब का समीकरण है :

$$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\left(\frac{9y}{16x}\right)_{\left(2,\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)\text{पर}}[x-2]$$

अथवा $$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\frac{9}{16}\times\frac{2\sqrt{5}}{3}(x-2)$$

अथवा $$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{5}}{8}(x-2)$$

अथवा $$3\times 8(y)-32\sqrt{5}=9\sqrt{5}(x-2)$$

$$24y-32\sqrt{5}=9\sqrt{5}\ x-18\sqrt{5}$$

अथवा $$9\sqrt{5}\ x-24y+14\sqrt{5}=0$$

उदाहरण 29.17. वक्र $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है।

हल : वक्र का समीकरण है : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ...(i)

(i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{2x}{9}-\frac{2y}{16}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

or $$\frac{dy}{dx}=\frac{16x}{9y}$$

स्पर्श रेखा का x-अक्ष के समान्तर होने पर $\frac{dy}{dx}=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{16x}{9y}=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

(i) में $x = 0$ रखने पर, हमें मिलता है : $y^2 = -16$ अर्थात् $y = \pm 4i$

अत: वक्र पर ऐसे कोई वास्तविक बिन्दु नहीं हैं जहाँ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है।

उदाहरण 29.18. उन सभी रेखाओं, जिनकी प्रवणता -4 है, के समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-1}$ पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

हल :
$$y = \frac{1}{x-1} \qquad \text{.....(i)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

यह -4 के बराबर दिया है।

$$\therefore \quad \frac{-1}{(x-1)^2} = -4$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

(i) में $x = \frac{1}{2}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \quad \text{जब} \quad x = \frac{3}{2}, \quad y = 2$$

$$\therefore \quad \text{बिन्दु हैं : } \left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$\therefore$ स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं :

(a) $$y - 2 = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = -4x + 6 \quad \text{अथवा} \quad 4x + y = 8$$

(b) $$y + 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y + 2 = -4x + 2 \quad \text{अथवा} \quad 4x + y = 0$$

उदाहरण 29.19. वक्र $y = x^3$ के बिन्दु $(2, 8)$ पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : $$y = x^3 \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2 \text{ पर}} = 12$$

$\therefore$ अभिलंब की प्रवणता है $= -\frac{1}{12}$

$\therefore$ अभिलंब का समीकरण है :

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x-2)$$

अथवा $12(y-8)+(x-2)=0$ अथवा $x+12y=98$

देखें आपने कितना सीखा 29.4

1. अंकित बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए :

(i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, $(0, 5)$ पर (ii) $y = x^2, (1, 1)$ पर

(iii) $y = x^3 - 3x + 2$ उन बिन्दुओं पर जहाँ x-निर्देशांक 3 है।

2. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

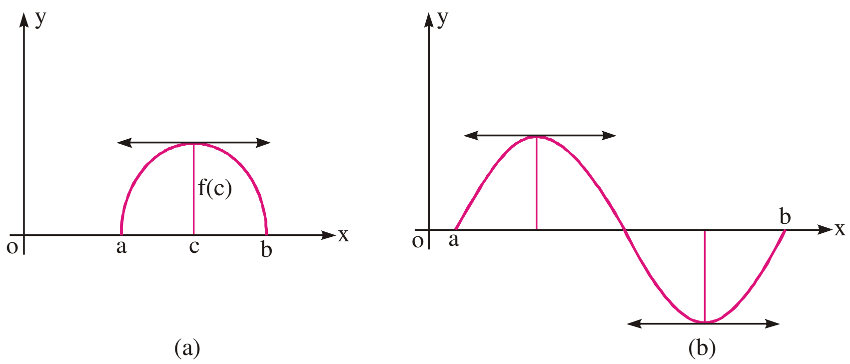
3. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

4. वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समान्तर है।

5. सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = y^2$ तथा $xy = k$ लंबवत प्रतिच्छेद करते हैं यदि $8k^2 = 1$

29.5 रोले का प्रमेय

आइए, अब हम एक ऐसे महत्वपूर्ण प्रमेय के विषय में पढ़ें जिससे यह पता लगता है कि $y = f(x)$ के आलेख पर दो बिन्दुओं a तथा b, जिसके y-निर्देशांक $f(a)$ तथा $f(b)$ बराबर है, के बीच कम से कम एक बिन्दु c ऐसा अवश्य होगा कि बिन्दु $[c, f(c)]$ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो (देखें चित्र 29.2)



चित्र. 29.2

29.5.1 रोले के प्रमेय का गणितीय सूत्रण

माना f एक वास्तविक फलन है जो बंद अन्तराल [a, b] में इस प्रकार परिभाषित है कि

(i) बंद अन्तराल [a, b] में फलन f सतत है

(ii) खुले अन्तराल]a, b[में फलन f अवकलनीय है

(iii) $f(a) = f(b)$,

तो खुले अन्तराल]a, b[में कम से कम एक बिन्दु c ऐसा अवश्य स्थित होगा जहाँ $f'(c) = 0$ हो।

टिप्पणी

(i) कथन कम से कम एक बिन्दु का अर्थ है कि $c \in]a, b[$ में c के एक से अधिक मान भी हो सकते हैं ताकि $f'(c) = 0$ है।

(ii) प्रतिबंध कि f, [a, b] पर सतत है अनिवार्य है तथा इसमें कोई ढील नहीं दी जा सकती।

(iii) प्रतिबंध कि f,]a, b[पर अवकलनीय है भी अनिवार्य है तथा इसमें ढिलाई नहीं दी जा सकती।

उदाहरणार्थ $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ अन्तराल $[-1, 1]$ पर सतत है तथा]–1, 1[पर अवकलनीय है तथा रोले का प्रमेय इसके लिए वैध है।

आइए कुछ उदाहरण लें

उदाहरण 29.20. फलन $f(x) = x(x-1)(x-2), x \in [0, 2]$ के लिए रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

हल : $$f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

(i) f (x) एक बहुपद फलन है। अत: [0, 2] में सतत है

(ii) f (x) अन्तराल]0, 2[पर अवकलनीय है

(iii) $f(0) = 0$ तथा $f(2) = 0$

$$\therefore \quad f(0) = f(2)$$

रोले के प्रमेय की सभी शर्तें सन्तुष्ट हो जाती हैं

साथ ही, $$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$\therefore f'(c) = 0$ से, $3c^2 - 6c + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6}$

$$\Rightarrow \quad c = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

हम देखते हैं कि c के दोनों मान अंतराल]0, 2[में हैं।

उदाहरण 29.21. फलन $f(x) = \sin x - \sin 2x$, $x \in [0, \pi]$ के लिए रोले के प्रमेय की अनुप्रयोज्यता (applicability) की जांच कीजिए।

हल : $$f(x) = \sin x - \sin 2x \qquad \text{...(i)}$$

(i) साइन फलन है जो अन्तराल $[0, \pi]$ में सतत है तथा $[0, \pi]$ में अवकलनीय है ।

साथ ही $f(0)=0$ तथा $f(\pi)=0$

$\Rightarrow$ $$f(\pi)=f(0)=0$$

$\therefore$ रोले के प्रमेय के सभी प्रतिबंध सन्तुष्ट होते हैं।

अब $$f'(c)=2\left[2\cos^2 c-1\right]-\cos c=0$$

या $$4\cos^2 c-\cos c-2=0$$

$\therefore$ $$\cos c=\frac{1\pm\sqrt{1+32}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}.$$

चूँकि $\sqrt{33}<6$ है,

$\therefore$ $$\cos c<\frac{7}{8}=0.875$$

जो यह दर्शाती है कि c, 0 से π के बीच में है।

देखें आपने कितना सीखा 29.5

निम्न फलनों के लिए रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

(i) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{3}+2x,\ x\in[0,3]$ (ii) $f(x)=x^2-1$ $[-1, 1]$ पर

(iii) $f(x)=\sin x+\cos x-1,\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ पर (iv) $f(x)=\left(x^2-1\right)\left(x-2\right),\ [-1,2]$ पर

29.6 लागराज का माध्यमान प्रमेय

यह प्रमेय रोले के प्रमेय का सुधरा हुआ रूप है जिसमें यह आवश्यक नहीं कि स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो। इस प्रमेय का कथन है कि स्पर्श रेखा वक्र के अन्त बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है। दूसरे शब्दों में यह प्रमेय कहता है कि वक्र के आलेख पर सदा एक बिन्दु का अस्तित्व है जहाँ स्पर्श रेखा वक्र के अन्त बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

29.6.1 लागरांज प्रमेय का गणितीय सूत्रण

माना f एक वास्तविक मूल्य फलन है जो एक बन्द अन्तराल [a, b] पर इस प्रकार परिभाषित है कि

(a) f अन्तराल [a, b] पर सतत है

(b) f,]a, b[पर अवकलनीय है

(c) $f(b)\neq f(a)$

तो खुले अन्तराल]a, b[में एक बिन्दु इस प्रकार है कि

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

टिप्पणी

जब $f(b)=f(a)$ हो, तो $f'(c)=0$ है। तब यह प्रमेय रोले का प्रमेय बन जाता है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 29.22. फलन $f(x)=(x-3)(x-6)(x-9)$ को अन्तराल [3, 5] के लिए लागरांज के माध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

हल : $$f(x)=(x-3)(x-6)(x-9)=(x-3)(x^2-15x+54)$$

अथवा $$f(x)=x^3-18x^2+99x-162 \qquad \text{...(i)}$$

(i) एक बहुपद फलन है इसलिए दिए गए अन्तराल में सतत तथा अवकलनीय है

यहाँ $f(3)=0,\ f(5)=(2)(-1)(-4)=8$

$\therefore$ $$f(3)\neq f(5)$$

इसलिए माध्यमान प्रमेय के सभी प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं।

$\therefore$ $$f'(c)=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{8-0}{2}=4$$

अब $$f'(x)=3x^2-36x+99$$

$\therefore$ $$3c^2-36c+99=4 \quad \text{अथवा} \quad 3c^2-36c+95=0$$

$\therefore$ $$c=\frac{36\pm\sqrt{1296-1140}}{6}\approx\frac{36\pm12.5}{6}=8.08 \text{ या } 3.9$$

$\therefore$ $$c=3.9\in(3,5)$$

$\therefore$ लागरांज का माध्यमान प्रमेय सत्यापित हुआ।

उदाहरण 29.23. परवलय $y=(x-4)^2$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा बिन्दुओं $(4,0)$ तथा $(5,1)$ को मिलाने वाली जीवा के समान्तर है।

हल : वक्र के किसी बिन्दु पर उसकी स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिन्दु पर $(f'(x))$ के मान के बराबर होता है

$$f'(x)=2(x-4)$$

$(4,0)$ तथा $(5,1)$ को जोड़ने वाली जीवा की प्रवणता है

$$\frac{1-0}{5-4}=1 \qquad \left[\because m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]$$

$\therefore$ माध्यमान प्रमेय के अनुसार

$$2(x-4)=1 \quad \text{अथवा} \quad (x-4)=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $$x=\frac{9}{2}$$

जो 4 तथा 5 के बीच स्थित है

अब $\qquad y=(x-4)^2$

जब $\qquad x=\frac{9}{2},\ y=\left(\frac{9}{2}-4\right)^2=\frac{1}{4}$

$\therefore$ वांछित बिन्दु $\left(\frac{9}{2},\frac{1}{4}\right)$ है।

देखें आपने कितना सीखा 29.6

1. निम्न फलनों में से प्रत्येक के लिए माध्यमान प्रमेय की जाँच कीजिए :

(i) $f(x)=3x^2-4$, $[2,3]$ पर $\qquad$ (ii) $f(x)=\log x$, $[1,2]$ पर

(iii) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $[1,3]$ पर $\qquad$ (iv) $f(x)=x^3-2x^2-x+3$ $[0,1]$ पर

2. परवलय, $y=(x+3)^2$ पर वह एक बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा, बिन्दुओं $(3,0)$ तथा $(-4,1)$ को मिलाने वाली जीवा के समान्तर है।

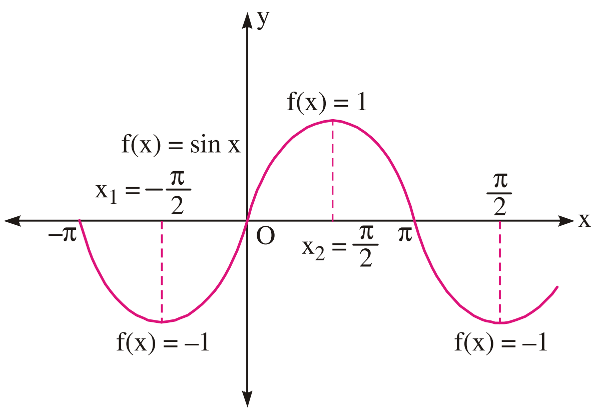
29.7 वर्धमान तथा ह्रासमान फलन

आप एक वर्धमान अथवा ह्रासमान फलन की सामान्य प्रवृतियों (trends) को पहले ही देख चुके हैं। यहाँ हम फलनों के वर्धमान अथवा ह्रासमान होने के प्रतिबधों को ज्ञात करने का प्रयास करेंगे।

मान लीजिए कि एक फलन $f(x)$ एक बन्द अन्तराल $[a,b]$ पर परिभाषित है।

मान लीजिए कि $x_1, x_2 \in [a,b]$ है। तब फलन $f(x)$ दिये गये अन्तराल में वर्धमान फलन कहलाता है, यदि $f(x_2)\geq f(x_1)$ जब भी $x_2 > x_1$ हो। इसे निरन्तर वर्धमान कहा जाता है, जब सभी $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in [a,b]$ के लिए $f(x_2) > f(x_1)$ हो।

चित्र 29.3 में, जब $x, -\frac{\pi}{2}$ से $\frac{\pi}{2}$ तक बढ़ता है, तो $\sin x, -1$ से $+1$ तक बढ़ता है।

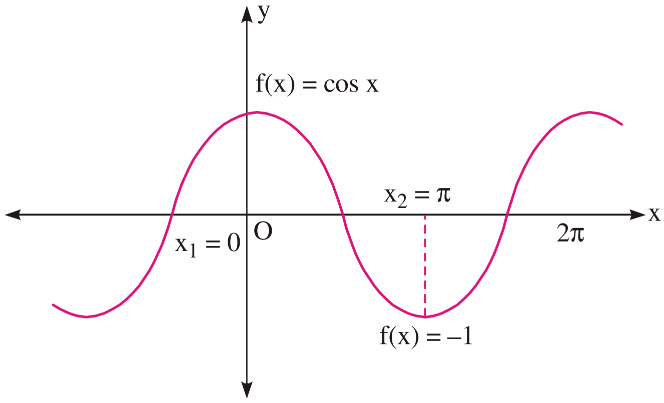


चित्र 29.3

टिप्पणी: एक अन्तराल में एक फलन वर्धमान होगा, यदि f (x + h)> f (x) हो, जब प्रत्येक x अन्तराल में है तथा h धनात्मक है।

एक फलन, जो एक बन्द अन्तराल [a,b] में परिभाषित है, उस अन्तराल में ह्रासमान होगा, यदि $f(x_2) \le f(x_1)$ हो, जब $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in [a,b]$ हो, उसे निरन्तर ह्रासमान कहा जाता है, यदि सभी $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in [a,b]$ के लिए $f(x_1) > f(x_2)$ हो।

चित्र 29.4 में, जब $x, 0$ से π तक बढ़ता है, तो $\cos x, 1$ से -1 तक कम होता है।



चित्र 29.4

टिप्पणी: एक फलन दिये हुए अन्तराल में ह्रासमान होता है, यदि दिये गये अन्तराल में प्रत्येक x के लिए और $h > 0$ के लिए $f(x+h) < f(x)$ हो।

29.8 एकदिष्ट फलन

मान लीजिए कि x_1, x_2 दो बिन्दु ऐसे हैं कि फलन $f(x)$ के परिभाषित अन्तराल में $x_1 < x_2$ है। तब फलन एकदिष्ट कहलाता है, यदि वह या तो वर्धमान हो और या ह्रासमान हो।

फलन $f(x)$ निरन्तर वर्धमान कहलाता है, जब सभी $x_2 > x_1$ के लिए (जो दिये गये अन्तराल में है), $f(x_2) \ge f(x_1)$ हो तथा निरन्तर ह्रासमान कहलाता है, यदि $f(x_1) \ge f(x_2)$

उदाहरण 29.24. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $f(x) = 4x + 7$ एक एकदिष्ट फलन है।

हल : R में x के दो मानों x_1 और x_2 पर विचार कीजिए ताकि $x_2 > x_1$ हो। (1)

(1) के दोनों पक्षों को 4 से गुणा करने पर हमें मिलता है : $4x_2 > 4x_1$ (2)

(2) के दोनों पक्षों में 7 जोड़ने पर, हमें मिलता है :

$$4x_2 + 7 > 4x_1 + 7$$

अर्थात् $$f(x_2) > f(x_1)$$

अतः, हम देखते हैं कि $f(x_2) > f(x_1)$ है, जब भी $x_2 > x_1$ है।

अतः, दिया गया फलन $f(x) = 4x + 7$ एक एकदिष्ट फलन (निरन्तर वर्धमान) है।

उदाहरण 29.25. दर्शाइये कि $f(x) = x^2$ सभी $x < 0$ के लिए एक निरन्तर ह्रासमान फलन है।

हल : x के कोई दो मान x_1, x_2 ऐसे लीजिए कि

$$x_2 > x_1 \text{ हो} \qquad x_1, x_2 < 0 \qquad \text{.......(i),}$$

ध्यान दीजिए कि किसी असमिका को एक ऋणात्मक संख्या से गुणा करने पर असमिका उल्ट जाती है।

(i) को x_2 से गुणा करने पर, हमें मिलता है :

$$x_2 \cdot x_2 < x_1 \cdot x_2$$

अथवा $$x_2^2 < x_1 x_2 \qquad \text{......(ii),}$$

(i) को x_1 से गुणा करने पर हमें मिलता है :

$$x_1 \cdot x_2 < x_1 \cdot x_1$$

अथवा $$x_1 x_2 < x_1^2 \qquad \text{.....(iii),}$$

(ii) तथा (iii) से, हमें मिलता है :

$$x_2^2 < x_1 x_2 < x_1^2$$

अथवा $$x_2^2 < x_1^2$$

अथवा $$f(x_2) < f(x_1) \qquad \text{.....(iv)}$$

अतः (i) तथा (iv) से हमें प्राप्त हुआ कि

$x_2 > x_1$ के लिए, $f(x_2) < f(x_1)$ है।

अतः, दिया गया फलन सभी $x < 0$ के लिए, निरन्तर ह्रासमान है।

देखें आपने कितना सीखा 29.7

1. (a) सिद्ध कीजिए कि $x \in R$ के प्रत्येक मान के लिए, फलन $f(x) = 3x + 4$ एक एकदिष्ट वर्धमान फलन है।

   (b) सिद्ध कीजिए कि $x \in R$ के प्रत्येक मान के लिए फलन $f(x) = 7 - 2x$ एक एकदिष्ट ह्रासमान फलन है।

   (c) सिद्ध कीजिए कि x के सभी वास्तविक मानों के लिए, फलन $f(x) = ax + b$ निरन्तर वर्धमान फलन है, जबकि a, b अचर है तथा $a > b$ है।

2. (a) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$ सभी वास्तविक $x > 0$ के लिए एक दिष्ट वर्धमान फलन है।

   (b) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2 - 4$, $x > 2$ के लिए एकदिष्ट वर्धमान है तथा $-2 < x < 2$ के लिए एकदिष्ट ह्रासमान फलन है जब $x \in R$ है।

प्रमेय 1: यदि मुक्त अन्तराल]a,b[में, फलन $f(x)$ वर्धमान हो, तब प्रत्येक $x \in [a, b]$ के लिए उस बिन्दु पर फलन का अवकलज $f'(x)$ धनात्मक होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि (x, y) या [x, f (x)] वक्र $y = f(x)$ पर एक बिन्दु है।

एक धनात्मक δx के लिए हम लिख सकते हैं : $x + \delta x > x$

अब फलन $f(x)$ एक वर्धमान फलन है।

$$\therefore \qquad f(x+\delta x) > f(x)$$

या $$f(x+\delta x) - f(x) > 0$$

या $$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} > 0 \quad [\because \delta x > 0]$$

माना δx एक अति छोटी संख्या है। सीमा लेने पर, जब $\delta x \to 0$ है, हमें मिलता है :

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} > 0$$

या $$f'(x) > 0$$

अतः, यदि $y = f(x)$ एक बिन्दु पर एक वर्धमान फलन है, तो $f'(x)$ उस बिन्दु पर धनात्मक होगा।

प्रमेय 2: एक मुक्त अन्तराल]a, b[में, यदि फलन $f(x)$ ह्रासमान है, तो प्रत्येक $x \in [a, b]$ के लिए उस बिन्दु पर फलन का अवकलज $f'(x)$ ऋणात्मक होगा।

उपपति : मान लीजिए कि वक्र $y = f(x)$ पर (x, y) या $[x, f(x)]$ कोई बिन्दु है।

एक धनात्मक δx के लिए, हमें मिलता है : $x + \delta x > x$

चूँकि फलन ह्रासमान है, इसलिए $f(x+\delta x) < f(x)$ $\qquad (\delta x > 0)$

या $$f(x+\delta x) - f(x) < 0$$

δx से भाग देने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} < 0, \ \delta x > 0$$

$$\therefore \qquad \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} < 0$$

अर्थात् $f'(x) < 0$

इस प्रकार, यदि $y = f(x)$ एक बिन्दु पर ह्रासमान फलन है, तो उस बिन्दु पर $f'(x)$ ऋणात्मक होगा।

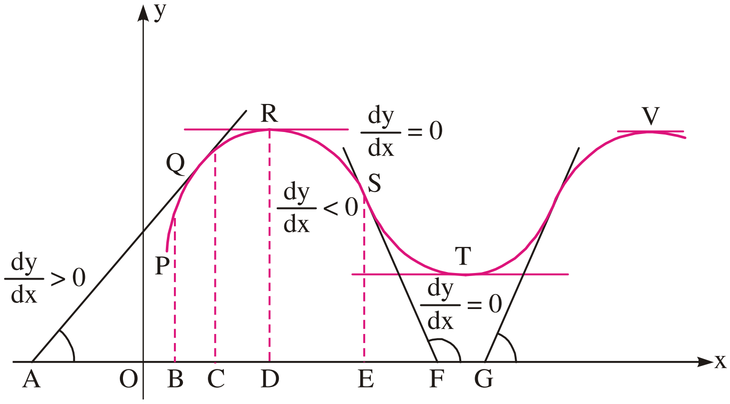
टिप्पणी: यदि एक बंद अन्तराल $[a, b]$ में, $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है, तो $f(x)$

(1) [a,b] पर वर्धमान है, यदि खुले (मुक्त) अन्तराल]a,b[में $f'(x) > 0$ है।

(ii) [a,b] पर ह्रासमान है, यदि खुले (मुक्त) अन्तराल]a,b[में $f'(x) < 0$ है।

29.9 किसी फलन की एकदिष्टता तथा अवकलज के चिन्ह में सम्बन्ध

चित्र 29.5 में दिखाए गये वक्र के फलन पर विचार कीजिए।



चित्र 29.5

किसी फलन की वर्धमान या ह्रासमान प्रकृति (एकदिष्टता) तथा अवकलज के चिन्ह में सम्बन्ध के अध्ययन को हम वक्र के चित्र 29.5 की भांति विभिन्न भागों (i) P से R तक, (ii) R से T तक, (iii) T से V तक विभाजित कर लेते हैं।

(i) हम देखते हैं कि P से R तक वक्र के प्रत्येक अनुवर्ती बिन्दु के लिए, कोटि (y-निर्देशांक) बढ़ती जाती है और उसका x-निर्देशांक भी बढ़ता है।

यदि (x_1, y_1) का अनुवर्ती बिन्दु (x_2, y_2) है, तब $x_2 > x_1$ से $y_2 > y_1$ या $f(x_2) > f(x_1)$ मिलता है। साथ ही P से R तक प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा धनात्मक x-अक्ष के साथ न्यून कोण बनाती है, और इसी लिए वक्र के ऐसे सभी बिन्दुओं (R के अतिरिक्त) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता धनात्मक होगी। बिन्दु R पर, जहाँ कोटि (y-निर्देशांक) का मान अधिकतम है, स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है, और उसके परिणामस्वरूप R पर स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य है। वक्र के इस भाग के लिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

(a) फलन P से R तक निरन्तर वर्धमान है।

(b) (R के अतिरिक्त) प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ न्यून कोण बनाती है।

(c) वक्र के प्रत्येक बिन्दु, जिस पर y वर्धमान है, पर स्पर्श रेखा की प्रवणता धनात्मक है, अर्थात $\frac{dy}{dx} > 0$ है।

(d) जब y का मान अधिकतम है, अर्थात् बिन्दु R पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx} = 0$ ।

(ii) वक्र के भाग R से T तक के बीच प्रत्येक बिन्दु पर कोटि (y-निर्देशांक) कम होती जाती है, यद्यपि इसका x निर्देशांक बढता जाता है। इस प्रकार $x_2 > x_1$ से हमें $y_2 < y_1$ या $f(x_2) < f(x_1)$ मिलता है।

साथ ही वक्र पर R के अनुवर्ती प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ अधिक कोण बनाती है। इसके परिणामस्वरूप प्रत्येक उन बिन्दुओं के लिए जिनका y-निर्देशांक कम हो रहा है, स्पर्श रेखा की प्रवणता ऋणात्मक है। बिन्दु T पर कोटि का मान न्यूनतम है और

स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है। इसके परिणामस्वरूप T पर स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य है। उपरोक्त से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि,

(a) R से T तक फलन निरंतर ह्रासमान है।

(b) T के अतिरिक्त प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ अधिक कोण बनाती है।

(c) वक्र के प्रत्येक बिन्दु, जिन पर y-ह्रासमान है, स्पर्श रेखा की प्रवणता ऋणात्मक है, अर्थात् $\frac{dy}{dx} < 0$ है।

(d) बिन्दु T पर जहाँ कोटि का मान न्यूनतम है, स्पर्श रेखा की प्रवणता अर्थात $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

(iii) पुनः वक्र पर T से V तक के प्रत्येक बिन्दु पर y-निर्देशांक निरंतर बढ़ता है। T से V तक वक्र के प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ न्यून कोण बनाती है, जिसके फलनस्वरूप वक्र के इस प्रकार के प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता धनात्मक होती है। निष्कर्ष यह है कि T और V के अतिरिक्त प्रत्येक बिन्दु पर $\frac{dy}{dx} > 0$ है।

साथ ही, T और V पर $\frac{dy}{dx} = 0$ तथा बिन्दु R,T और V के एक ओर $\frac{dy}{dx} < 0$ है और दूसरी ओर $\frac{dy}{dx} > 0$ है तथा R,T और V पर $\frac{dy}{dx} = 0$ ।

उदाहरण 29.26. x के किन मानों के लिए, फलन $f(x) = x^2 - 6x + 8$ वर्धमान है तथा किनके लिए ह्रासमान है।

हल : $$f(x) = x^2 - 6x + 8$$
$$f'(x) = 2x - 6$$

$f(x)$ के वर्धमान फलन होने के लिए, $f'(x) > 0$ होगा।

अर्थात् $\quad 2x - 6 > 0 \quad$ अथवा $\quad 2(x-3) > 0$

अथवा $\quad x - 3 > 0 \quad$ अथवा $\quad x > 3$

अतः x>3 के लिए फलन वर्धमान है।

$f(x)$ के ह्रासमान होने के लिए

$$f'(x) < 0$$

अर्थात् $\quad 2x - 6 < 0 \quad$ अथवा $\quad x - 3 < 0$

अथवा $\quad x < 3$

अतः, $x < 3$ के लिए फलन ह्रासमान है।

उदाहरण 29.27. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ वर्धमान है अथवा ह्रासमान है।

हल : $$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$= 6\left(x^2 - x - 2\right) = 6(x-2)(x+1)$$

$f(x)$ के वर्धमान होने के लिए,

$$f'(x) > 0$$

अर्थात् $\quad 6(x-2)(x+1) > 0 \quad$ अथवा $\quad (x-2)(x+1) > 0$

क्योंकि दो गुणनखंडों का गुणनफल धनात्मक है, इसलिए या तो दोनों धनात्मक है अथवा दोनों ऋणात्मक हैं।

या तो $\quad x-2>0$ तथा $x+1>0 \quad$ अथवा $\quad x-2<0$ तथा $x+1<0$

अर्थात् $\quad x>2$ तथा $x>-1 \quad$ अथवा $\quad x<2$ तथा $x<-1$

$\Rightarrow \quad x>2$ तथा $x>-1 \quad$ अथवा $\quad x<-1$ तथा $x<2$

$\quad x>2 \quad$ अथवा $\quad x<-1$

अत:, वर्धमान फलन के लिए $x>2$ अथवा $x<-1$.

अब, $f(x)$ के ह्रासमान होने के लिए, $f'(x)<0$ होगा।

$\Rightarrow \quad 6(x-2)(x+1)<0 \quad$ अथवा $\quad (x-2)(x+1)<0$

दो गुणनखंड़ों का गुणनफल ऋणात्मक है। इसलिए एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक होगा।

या तो $\quad x-2>0$ तथा $x+1<0 \quad$ अथवा $\quad x-2<0$ तथा $x+1>0$

$\Rightarrow \quad x>2$ तथा $x<-1 \quad \Rightarrow \quad x<2$ तथा $x>-1$

ऐसा कोई x सम्भव नहीं है $\quad$ इससे मिलता है $-1<x<2$

$\therefore \quad$ फलन $-1<x<2$ में ह्रासमान है।

उदाहरण 29.28. फलन $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ के लिए वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन वर्धमान अथवा ह्रासमान है ।

हल :

$$f'(x) = \frac{\left(x^2+1\right)\dfrac{dx}{dx} - x\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right) - x\cdot(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\therefore \quad f'x = \frac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

क्योंकि $\left(x^2+1\right)^2$ सभी x के लिए धनात्मक है। इसलिए यदि $-1<x<0$ है तो $(1-x)$ तथा $(1+x)$ दोनों धनात्मक हैं जिससे $f'(x)>0$ है।

यदि $0<x<1$ है तो, $(1-x)$ तथा $(1+x)$ दोनों धनात्मक होंगे जिससे $f'(x)>0$ होगा।

यदि $x<-1$ है तो, $(1-x)$ धनात्मक तथा $(1+x)$ ऋणात्मक होगा जिससे $f'(x)<0$ होगा।

यदि $x>1$ है तो, $(1-x)$ ऋणात्मक तथा $(1+x)$ धनात्मक होगा जिससे $f'(x)<0$ होगा।

अतः, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$-1<x<0$ तथा $0<x<1$ के लिए

अथवा $-1<x<1$ के लिए फलन वर्धमान है

तथा $x<-1$ अथवा $x>1$ के लिए फलन ह्रासमान है।

टिप्पणी: वे बिन्दु जहाँ $f'(x)=0$ है क्रांतिक बिन्दु (critical points) कहलाते हैं। यहाँ क्रांतिक बिन्दु $x=-1, x=1$ हैं।

उदाहरण 29.29. दर्शाइए कि :

(a) $f(x)=\cos x$ अन्तराल $0\le x\le \pi$ में ह्रासमान फलन है।

(b) $f(x)=x-\cos x$ सभी x के लिए वर्धमान फलन है।

हल : (a) $f(x)=\cos x$

$f'(x)=-\sin x$

$f(x)$ ह्रासमान है, यदि $f'(x)<0$ है।

अथवा $-\sin x<0$

अर्थात $\sin x>0$

$\sin x$ प्रथम तथा द्वितीय चर्तुर्थांशों में धनात्मक होता है।

$\therefore$ $\sin x;\ 0\le x\le \pi$ में धनात्मक है।

$\therefore$ $f(x);\ 0\le x\le \pi$ में ह्रासमान है।

(b) $f(x)=x-\cos x$

$f'(x)=1+\sin x$

$\sin x$ का न्यूनतम मान -1 है तथा अधिकतम मान 1 है।

$\Rightarrow$ $-1\le \sin x\le 1$ अथवा $1-1\le 1+\sin x\le 1+1$

अथवा $0\le 1+\sin x\le 2$

अथवा $0\le f'(x)\le 2$

$\Rightarrow$ $f'(x)\ge 0$

$\Rightarrow$ $f(x)=x-\cos x$, x के सभी मानों के लिए वर्धमान है।

देखें आपने कितना सीखा 29.8

वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें निम्नलिखित फलन वर्धमान अथवा ह्रासमान हैं :

1. (a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$ (b) $f(x) = 3x^2 - 15x + 10$
2. (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ (b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 12$
3. (a) $y = -3x^2 - 12x + 8$ (b) $f(x) = 1 - 12x - 9x^2 - 2x^3$
4. (a) $y = \dfrac{x-2}{x+1}, x \neq -1$ (b) $y = \dfrac{x^2}{x-1}, x \neq 1$ (c) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}, x \neq 0$
5. (a) सिद्ध कीजिए कि फलन $\log \sin x$ अन्तराल $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ में ह्रासमान है

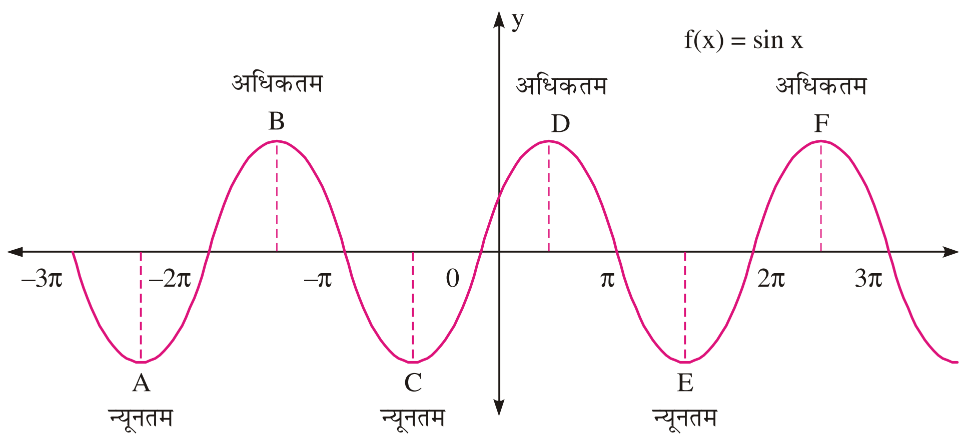
   (b) सिद्ध कीजिए कि फलन $\cos x$ अन्तराल $[\pi, 2\pi]$ में वर्धमान है।

   (c) वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right), 0 \leq x \leq \pi$ ह्रासमान अथवा वर्धमान है।

फलन के आलेख से वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समान्तर हैं।

29.10 एक फलन के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान

हमने एक सतत फलन का आलेख देखा है। यह एकान्तरतः बढ़ता तथा घटता है। यदि किसी सतत फलन का मान एक विशेष बिन्दु तक बढ़े और फिर कम होना आरम्भ हो जाए, तो वह फलन का उच्चिष्ठ बिन्दु कहलाता है तथा उस बिन्दु पर उसका संगत मान उस फलन का अधिकतम (उच्चिष्ठ) मान कहलाता है। साथ ही, ऐसी अवस्था आती है जब वह फिर घटने से बढ़ना आरम्भ करता है। यदि किसी सतत फलन का मान किसी विशेष बिन्दु तक कम होता जाये और फिर बढ़ना आरम्भ हो जाए, तो वह बिन्दु फलन का निम्निष्ठ बिन्दु कहलाता है तथा उस बिन्दु पर संगत मान फलन का न्यूनतम (निम्निष्ठ) मान कहलाता है।



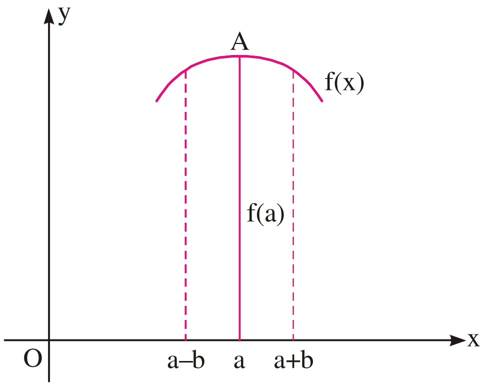
चित्र 29.6

चित्र 29.6 दर्शाता है कि एक फलन के एक से अधिक उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान हो सकते हैं। अतः सतत फलन के लिए, हमें उच्चिष्ठ (निम्निष्ठ) मान एक अन्तराल में मिलते हैं तथा ये मान उस फलन

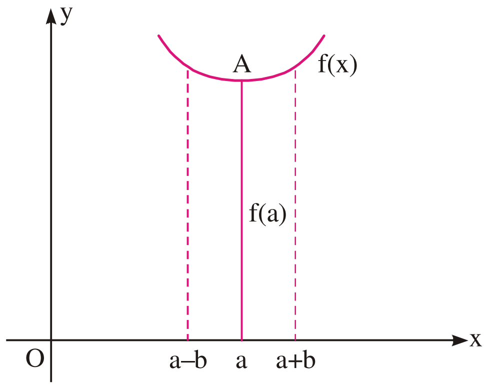
के निरपेक्ष उच्चिष्ठ (निम्निष्ठ)मान नहीं होते। इसी कारण से हम कभी-कभी उन्हें स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा स्थानीय निम्निष्ठ मान कहते हैं।

एक फलन $f(x)$ का बिन्दु $x = a$ पर उच्चिष्ठ (अथवा स्थानीय उच्चिष्ठ) मान तब होता है जब b के पर्याप्त काफी छोटे धनात्मक मानों के लिए, $f(a) \geq f(a \pm b)$ हो, जहाँ $a - b < a < a + b$ है। (देखिए चित्र 29.7)।

एक फलन का उच्चिष्ठ (अथवा स्थानीय उच्चिष्ठ) मान वह है जो निर्दिष्ट बिन्दु के दोनों ओर तुरन्त आसन्न प्रतिवेशी बिन्दुओं पर फलन के सभी मानों में सबसे अधिक हो।



चित्र 29.7



चित्र 29.8

एक फलन $f(x)$ का एक बिन्दु $x = a$ पर निम्निष्ठ (अथवा स्थानीय निम्निष्ठ) मान तब होता है जब b के सभी पर्याप्त काफी छोटे धनात्मक मानों के लिए $f(a) \geq f(a \pm b)$ हों, जहाँ $a - b < a < a + b$ है।

चित्र 29.8 में, फलन $f(x)$ का $x = a$ पर स्थानीय निम्निष्ठ मान है।

एक फलन का निम्निष्ठ (अथवा स्थानीय निम्निष्ठ) मान वह है जो निर्दिष्ट बिन्दु के दोनों ओर, तुरन्त आसन्न प्रतिवेशी बिन्दुओं, पर फलन के सभी मानों में सबसे कम हो।

टिप्पणी: बिन्दु $x \in R$ का प्रतिवेश खुले अन्तराल $]x - \in[$ से परिभाषित होता है, जहाँ $\in > 0$ है।

29.11 उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ के लिए प्रतिबंध

हम जानते हैं कि जब फलन वर्धमान है, तो उसका अवकलज धनात्मक होता है तथा जब फलन ह्रासमान है, तो अवकलज ऋणात्मक होता है। हम इस परिणाम का प्रयोग कर किसी फलन का उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ होने के लिए प्रतिबंध ज्ञात करेंगे। चित्र 29.6 को देखिए। बिन्दु B,D तथा F उच्चिष्ठ के बिन्दु है तथा बिन्दु A,C,E निम्निष्ठ के बिन्दु हैं।

B के बाईं ओर, फलन वर्धमान है। अतः $f'(x) > 0$ है। लेकिन B की दायीं ओर फलन ह्रासमान है। अतः $f'(x) < 0$ यह तभी संभव है, जब $f'(x)$ बीच में कहीं शून्य हो जाए। हम इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

एक फलन $f(x)$ का एक बिन्दु पर उच्चिष्ठ मान है, यदि (i) $f'(x) = 0$ तथा (ii) $f'(x)$ उस बिन्दु पर जहाँ $f'(x) = 0$ के प्रतिवेश (neighbourhood) में धनात्मक से ऋणात्मक होता है (जब बिन्दु बायें से दायीं ओर लिए जाते हैं)

अब, बिन्दु C के बायीं ओर (चित्र 29.6) फलन $f(x)$ ह्रासमान है। इसलिए $f'(x) < 0$ है तथा C के दायीं ओर फलन वर्धमान है और इसीलिए $f'(x) > 0$ है। एक बार फिर, धनात्मक मान होने से पहले $f'(x) = 0$ होगा। हम इसे निम्न प्रकार से लिखते हैं :

> एक फलन $f(x)$ का एक बिन्दु पर निम्निष्ठ मान है, यदि (i) $f'(x) = 0$ तथा (ii) $f'(x)$ उस बिन्दु, जहाँ $f'(x) = 0$ है, के प्रतिवेश में ऋणात्मक से धनात्मक होता है।

हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए $f'(x) = 0$

एक आवश्यक प्रतिबंध है, परन्तु पर्याप्त नहीं। हम ऐसा एक फलन ज्ञात कर सकते है जो वर्धमान है, फिर अचर तथा फिर वर्धमान है। इस स्थिति में, $f'(x)$ अपना चिन्ह नहीं बदलता । अत: वह मान जहाँ $f'(x) = 0$ है उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ बिंदु नहीं है। ऐसे बिन्दु को नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Inflexion) कहते हैं।

उदाहरणतया, फलन $f(x) = x^3$ के लिए, $x = 0$ एक नति परिवर्तन बिन्दु है क्योंकि जब x, 0 से होकर जाता है, तो $f'(x) = 3x^2$ अपना चिन्ह नहीं बदलता। क्योंकि $f'(x)$ बिन्दु 0 के दोनों ओर धनात्मक है, क्योंकि स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के साथ न्यून कोण बनाती हैं (देखिए चित्र 29.9)। अत: $f(x) = x^3$ का $x = 0$ पर एक नति परिवर्तन बिन्दु है।

वे बिन्दु, जहाँ $f'(x) = 0$ हो स्तब्ध बिन्दु (stationary points) कहलाते हैं, क्योंकि वहाँ फलन की परिवर्तन दर शून्य है। अत:, उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ बिन्दु स्तब्ध बिन्दु हैं।

टिप्पणी:

स्तब्ध बिन्दु, जहाँ फलन स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा स्थानीय निम्निष्ठ मान पाता है, चरम मान भी कहलाते हैं तथा दोनों स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ मान फलन $f(x)$ के चरम मान भी कहलाते हैं। अत: एक फलन बिन्दु $x = a$ पर चरम मान पाता है, यदि $f(a)$ या तो स्थानीय उच्चिष्ठ हो या स्थानीय निम्निष्ठ हो।

29.12 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने की विधि

किसी फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने की विधि नीचे दी गयी है :

(i) $f'(x)$ ज्ञात कीजिए

(ii) $f'(x) = 0$ मान कर स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कीजिए

(iii) स्तब्ध बिन्दुओं के प्रतिवेश में $f'(x)$ का चिन्ह देखिए। यदि यह धनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है, तो उस बिन्दु पर $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान है और यदि $f'(x)$ का चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में बदलता है, तो उस बिन्दु पर $f(x)$ का निम्निष्ठ मान है।

(iv) यदि $f'(x)$ का चिन्ह किसी बिन्दु के सामीप्य में नहीं बदलता तो उसे नति परिवर्तन बिन्दु कहते है।

उदाहरण 29.30. फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ के उच्चिष्ठ (स्थानीय उच्चिष्ठ) तथा निम्निष्ठ (स्थानीय निम्निष्ठ) बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

चरण I : अब $f'(x) = 0$, $3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow$ $(x-3)(x+1) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 3, -1$

$\therefore$ स्तब्ध बिन्दु हैं : $x = 3, x = -1$

चरण II : $x = 3$ पर $x < 3$ के लिए $f'(x) < 0$ है

तथा $x > 3$ के लिए $f'(x) > 0$

$\therefore$ $f'(x)$, 3 के प्रतिवेश में अपना चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में बदलता है।

$\therefore$ $x = 3$ पर $f(x)$ का निम्निष्ठ मान है।

चरण III : $x = -1$ पर,

$x < -1$ के लिए $f'(x) > 0$ है।

तथा $x > -1$ के लिए $f'(x) < 0$ है।

$\therefore$ $f'(x), -1$ के प्रतिवेश में अपना चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है। अतः $x = -1$ पर $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान है।

$\therefore$ $x = -1$ और $x = 3$ से हमें क्रमशः उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के बिंदु प्राप्त होते हैं।

अब उच्चिष्ठ मान (निम्निष्ठ मान) ज्ञात करने के लिए हमें प्राप्त है:

फलन का उच्चिष्ठ मान $= f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)$

$= -1 - 3 + 9 = 5$

तथा निम्निष्ठ मान $= f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) = -27$

$\therefore$ स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ के बिंदु क्रमशः $(-1, 5)$ और $(3, -27)$ हैं।

उदाहरण 29.31. फलन $f(x) = x^2 - 4x$ के स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x) = x^2 - 4x$

$\therefore$ $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

$f'(x) = 0$ से हमें मिलता है, $2(x-2) = 0$, अर्थात् $x = 2$ । अब हमें जांच करनी है कि $x = 2$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है या स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है या इनमें से कोई नही है।

आइए $x = 1.9$ जो कि 2 के बायीं ओर है तथा $x = 2.1$ जो 2 के दायीं ओर है लें, तथा $f'(x)$ का मान इन पर ज्ञात करें।

$$f'(1.9) = 2(1.9-2) < 0$$
$$f'(2.1) = 2(2.1-2) > 0$$

जब हम 2 की ओर बांयी ओर से पहुँचते हैं, तो $f'(x) < 0$ है तथा जब हम 2 की ओर दांयी ओर से पहुँचते हैं, तो $f'(x) > 0$ है। अतः $x = 2$ पर एक स्थानीय निम्निष्ठ है।

हम $f(x)$ के चिन्ह के विषय में अपनी खोज को एक तालिका, जो नीचे दी गई है, में दे रहे हैं।

f' (x) का चिन्ह

बिन्दु $x = 2$

2 के बायीं ओर	2 के दायीं ओर
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

स्थानीय निम्निष्ठ

उदाहरण 29.32. फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ के सभी स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : $$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right)$$

$$\therefore \quad f'(x) = 6(x+1)(x-2)$$

अब $f'(x)=0$ को x के लिए हल करने पर, हम पाते हैं :

$$6(x+1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -1, 2$$

अतः, $x = -1, 2$ पर $f'(x) = 0$

अब हम जाँच करेंगे कि क्या ये बिन्दु स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु हैं या स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु हैं या इनमें से कोई नहीं हैं।

बिन्दु $x = -1$ को लीजिए।

आइए हम $x = -1.1$ लें जो -1 के बायीं ओर है तथा $x = -0.9$ लें जो -1 के दायीं ओर है तथा $f'(x)$ का मान इन बिंदुओं पर ज्ञात करें।

$f'(-1.1) = 6(-1.1+1)(-1.1-2)$, जो कि धनात्मक है, अर्थात् $f'(x)>0$ है।

$f'(-0.9) = 6(-0.9+1)(-0.9-2)$, जो कि ऋणात्मक है, अर्थात् $f'(x)<0$ है।

अतः, $x = -1$ पर एक स्थानीय उच्चिष्ठ है।

आइए अब $x = 2$ लें।

अब, हम $x = 1.9$ लेते हैं जो $x = 2$ के बायीं ओर है तथा $x = 2.1$ लेते हैं जो $x = 2$ के दायीं ओर है तथा इन बिन्दुओं पर $f'(x)$ के मान ज्ञात करते हैं।

$$f'(1.9) = 6(1.9+1)(1.9-2)$$

= 6×(धनात्मक संख्या)×(ऋणात्मक संख्या) = एक ऋणात्मक संख्या

अर्थात् $f'(1.9) < 0$ है।

साथ ही $f'(2.1) = 6(2.1+1)(2.1-2)$, जो कि धनात्मक है।

अर्थात् $f'(2.1) > 0$ है।

$$f'(x) = 0$$

$f'(x) < 0$ → | ← $f'(x) > 0$

$$x = 2$$

चूँकि $f'(x) < 0$ है जब हम 2 की ओर बाएँ से जाते हैं

तथा $f'(x) > 0$ है जब हम 2 की ओर दाँये से जाते हैं

$\therefore$ $x = 2$ एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है

अतः, $f(x)$ का $x = -1$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है तथा $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान $= 2 - 3 + 12 + 8 = 15$ है। $f(x)$ का $x = 2$ पर स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है तथा $f(x)$ का निम्निष्ठ मान $= 2(8) - 3(4) - 12(2) + 8 = -12$ है।

$f'(x)$ का चिन्ह

बिन्दु $x = -1$		बिन्दु $x = 2$	
-1 के बायीं ओर	-1 के दायीं ओर	2 के बायीं ओर	2 के दायीं ओर
धनात्मक	ऋणात्मक	ऋणात्मक	धनात्मक
स्थानीय उच्चिष्ठ		स्थानीय निम्निष्ठ	

उदाहरण 29.33. निम्नलिखत फलन का स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ, यदि कोई है, ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

हल :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

तब

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)1-(2x)x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु अथवा स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात करने के लिए $f'(x) = 0$ रखिए।

अर्थात्,

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 1-x^2=0$$

अर्थात् $\quad (1+x)(1-x)=0 \quad$ अर्थात् $\quad x=1,-1$ है।

मान $x=1$ लीजिए।

x के 1 से थोड़े छोटे मान लेने पर तथा 1 से थोड़े बड़े मान लेने पर, $f'(x)$ का मान धनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है। अतः $x=1$ पर एक स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है तथा यहाँ स्थानीय उच्चिष्ठ मान

$$=\frac{1}{1+(1)^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

अब मान $x=-1$ लीजिए।

$f'(x)$ अपना चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में बदलता है, जब $x, -1$ से होकर जाता है। अतः $x=-1$ पर फलन का एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है, इस प्रकार स्थानीय निम्निष्ठ मान $=-\frac{1}{2}$

उदाहरण 29.34. फलन $f(x)=\sin x+\cos x, 0<x<\frac{\pi}{2}$ के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ, यदि कोई है, ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया है : $\quad f(x)=\sin x+\cos x$

$$\therefore \qquad f'(x)=\cos x-\sin x$$

स्थानीय उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ के लिए, $f'(x)=0$ होगा।

$$\therefore \qquad \cos x-\sin x=0$$

अर्थात् $\quad \tan x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}\ ,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$ में

$x=\frac{\pi}{4}$ पर,

$x<\frac{\pi}{4}$ के लिए $\cos x>\sin x$

$$\therefore \qquad f'(x)=\cos x-\sin x>0$$

$x>\frac{\pi}{4}$ के लिए $\cos x-\sin x<0$

$$\therefore \qquad f'(x)=\cos x-\sin x<0$$

अतः $\frac{\pi}{4}$ के प्रतिवेश में $f'(x)$ अपना चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है ।

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ एक स्थानीय उच्चिष्ठ का बिन्दु है।

उच्चिष्ठ मान $\quad =f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

अतः, स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ है।

देखें आपने कितना सीखा 29.9

निम्नलिखित फलनों के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु तथा स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए। उन बिन्दुओं पर उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ भी ज्ञात कीजिए

1. $x^2 - 8x + 12$
2. $x^3 - 6x^2 + 9x + 15$
3. $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$
4. $x^4 - 62x^2 + 120x + 9$
5. $(x-1)(x-2)^2$
6. $\dfrac{x-1}{x^2+x+2}$

29.13 फलन का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिए द्वितीय अवकलज का उपयोग

अब हम उस फलन, जिसके द्वितीय अवकलज का अस्तित्व है, के लिए, स्थानीय उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात करने की एक दूसरी विधि बतायेंगे। इसके विभिन्न चरण इस प्रकार हैं :

(i) मान लीजिए कि दिया गया फलन $f(x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(ii) $f'(x)$ ज्ञात कीजिए तथा उसे शून्य के बराबर रखिए।

(iii) $f'(x) = 0$ को हल कीजिए। मान लीजिए कि इसका एक वास्तविक मूल $x = a$ है।

(iv) इसका द्वितीय अवकलज $f''(x)$ ज्ञात कीजिए। चरण (iii) में प्राप्त x के प्रत्येक मान a के लिए $f''(a)$ का मान ज्ञात कीजिए।

तब यदि $f''(a) < 0$ है, तो $x = a$ एक स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है,

$f''(a) > 0$ है, तो $x = a$ एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है,

$f''(a) = 0$ है, तो हम 'a' के बायीं ओर तथा दायीं ओर के बिन्दुओं पर $f'(x)$ के चिन्ह का उपयोग करते हैं तथा परिणाम पर पहुँचते हैं।

उदाहरण 29.35. फलन $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए ।

हल : मान लीजिए कि $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ है।

तब,
$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$$
$$= 6\left(x^2 - 7x + 6\right) = 6(x-1)(x-6)$$

स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ के लिए,
$$f'(x) = 0$$

अथवा $6(x-1)(x-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, 6$

अब,
$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[6\left(x^2 - 7x + 6\right)\right]$$

$$= 12x - 42$$

$$= 6(2x - 7)$$

$x = 1$ के लिए, $f''(1) = 6(2.1 - 7) = -30 < 0$

अत: $x = 1$ एक स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है। इस पर फलन का मान

$f(1) = 2(1)^3 - 21(1)^2 + 36(1) - 20 = -3$ है। अत: स्थानीय उच्चिष्ठ मान -3 है।

$x = 6$ के लिए,

$$f''(6) = 6(2.6 - 7) = 30 > 0$$

अत: $x = 6$ एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है।

तथा $f(6) = 2(6)^3 - 21(6)^2 + 36(6) - 20 = -128$ है, जो फलन का स्थानीय निम्निष्ठ मान है।

उदाहरण 25.36. (a) अन्तराल $[-3,-1]$ में फलन $2x^3 - 24x + 107$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए (b) उपरोक्त फलन का अन्तराल $[1,3]$ में निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

हल: (a) माना $\quad f(x) = 2x^3 - 24x + 107$

$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 24$

स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ के लिए

$$f'(x) = 0$$

अर्थात $\quad 6x^2 - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2, 2$

केवल (-2) अन्तराल $(-3,-1)$ में है। अत: हम फलन का उच्चिष्ठ केवल $x = -2$ पर ज्ञात करेंगे।

अब $\quad f''(x) = 12x$

$\therefore \quad f''(-2) = -24 < 0$

जो बताता है कि $x = -2$ पर फलन का उच्चिष्ठ मान है

$\therefore$ वांछित उच्चिष्ठ मान $= 2(-2)^3 - 24(-2) + 107$

$$= 139$$

(b) $\quad f''(x) = 12x$

$\therefore \quad f''(2) = 24 > 0, \quad$ [$\because$ केवल 2 अन्तराल $[1,3]$ में हैं]

जो बताता है कि फलन $f(x)$ का निम्निष्ठ मान $x = 2$ पर है

$\therefore$ वांछित निम्निष्ठ मान $= 2(2)^3 - 24(2) + 107$

$$= 75$$

उदाहरण 29.37. फलन $f(x) = \cos 4x; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ यदि कोई है, ज्ञात कीजिए ।

हल : $f(x) = \cos 4x$

$\therefore$ $f'(x) = -4\sin 4x$

अब $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4\sin 4x = 0$

अथवा $\sin 4x = 0$ अथवा $4x = 0, \pi, 2\pi$

अथवा $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

क्योंकि $0 < x < \frac{\pi}{2}$, अत: केवल एक ही मान $\frac{\pi}{4}$ संभव है।

अब $f''(x) = -16\cos 4x$

$x = \frac{\pi}{4}$ पर, $f''(x) = -16\cos\pi = -16(-1) = 16 > 0$

$\therefore$ $x = \frac{\pi}{4}$ पर, $f(x)$ निम्निष्ठ है

न्यूनतम मान $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi = -1$

उदाहरण 29.38. फलन $f(x) = \sin x(1+\cos x)$ के अन्तराल $[0, \pi]$ में उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया गया है $f(x) = \sin x(1+\cos x)$

$$f'(x) = \cos x(1+\cos x) + \sin x(-\sin x)$$

$$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos x + \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

स्तब्ध बिन्दुओं के लिए, $f'(x) = 0$

$\therefore$ $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\therefore$ $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1, \frac{1}{2}$

$\therefore$ $x = \pi, \frac{\pi}{3}$

अब, $f(0) = 0$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

तथा $f(\pi) = 0$

$\therefore$ $f(x)$ का बिन्दु $x = \frac{\pi}{3}$ पर उच्चिष्ठ मान $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ है तथा बिन्दुओं $x = 0$ तथा $x = \pi$. पर निम्निष्ठ मान 0 है

देखें आपने कितना सीखा 29.10

द्वितीय अवकलज के उपयोग से निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

1. $2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$
2. $-x^3 + 12x^2 - 5$
3. $(x-1)(x+2)^2$
4. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$
5. $\sin x(1+\cos x), 0 < x < \frac{\pi}{2}$
6. $\sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$
7. $\sin 2x - x, \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

29.14 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ का व्यावहारिक समस्याओं में अनुप्रयोग

फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात करने की समस्याओं के हल करने में अवकलज का उपयोग एक शक्तिशाली हथियार है। इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए हम निम्नलिखित चरणों का उपयोग करते हैं।

(i) आंकड़ों में दिये गये चरांकों के रूप में फलन को बनाएँ।

(ii) दी गई शर्तो की सहायता से फलन को एक ही चर में व्यक्त कीजिए।

(iii) पहले किये गये प्रश्नों की भांति उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ की शर्तें लगायें।

उदाहरण 29.39. वह दो धनात्मक वास्तविक संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका योग 70 तथा गुणनफल अधिकतम है

हल : माना एक संख्या x है। क्योंकि उनका योग 70 है, इसलिए दूसरी संख्या $70-x$ है।

मान लीजिए उनका गुणनफल $f(x)$ है।

$$\therefore \qquad f(x) = x(70-x) = 70x - x^2$$

हमें $f(x)$ को अधिकतम बनाना है।

अत: हम $f'(x)$ ज्ञात कर उसे शून्य के बराबर रखेंगे

$$f'(x) = 70 - 2x$$

अधिकतम गुणनफल के लिए, $f'(x) = 0$

अथवा $\qquad 70 - 2x = 0$ अथवा $x = 35$

अब $f''(x) = -2$ जो ऋणात्मक है। अत: $f(x)$ का मान अधिकतम है जब $x = 35$

दूसरी संख्या है $70 - x = 70 - 35 = 35$

अत: वांछित संख्याएं 35, 35 हैं।

उदाहरण 29.40. दर्शाइए कि दिये गए क्षेत्रफल के आयतों में से वर्ग का परिमाप न्यूनतम होता है।

हल : माना आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः x तथा y हैं।

उसका क्षेत्रफल $= xy$

क्योंकि उसका क्षेत्रफल A दिया है, अतः $A = xy$

अर्थात, $$y = \frac{A}{x} \qquad \ldots (i)$$

अब, आयत का परिमाप $P = 2(x + y)$

अर्थात $$P = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

$$\therefore \qquad \frac{dP}{dx} = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) \qquad \ldots (ii)$$

न्यूनतम P के लिए, $\dfrac{dP}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \qquad 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad A = x^2 \quad \text{अथवा} \quad \sqrt{A} = x$$

अब, $\dfrac{d^2P}{dx^2} = \dfrac{4A}{x^3}$, जो धनात्मक है

अतः परिमाप न्यूनतम है जब $\sqrt{A} = x$, $y = \dfrac{A}{x} = \dfrac{x^2}{x} = x$ $\qquad (\because A = x^2)$

अतः परिमाप न्यूनतम होगा जब आयत वर्ग होगा।

उदाहरण 29.41. वर्गाकार आधार वाला एक खुला बक्सा दिये गये a^2 क्षेत्रफल वाली शीट से बनाया जाना है। दर्शाइए कि बक्से का अधिकतम आयतन $\dfrac{a^3}{6\sqrt{3}}$ है।

हल : माना वर्गाकार आधार की भुजा x है तथा उसकी ऊँचाई y है

अतः बक्से का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= x^2 + 4xy$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + 4xy = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{a^2 - x^2}{4x}$$

बक्से का आयतन $V = x^2 y = x^2\left(\dfrac{a^2 - x^2}{4x}\right)$

अथवा $$V = \frac{1}{4}\left(a^2 x - x^3\right) \qquad \ldots (i)$$

$$\therefore \qquad \frac{dV}{dx} = \frac{1}{4}\left(a^2 - 3x^2\right)$$

उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dV}{dx}=0$

$\therefore \quad \frac{1}{4}\left(a^2-3x^2\right)=0$

या $\quad x^2=\frac{a^2}{3} \Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ ...(ii)

(i) तथा (ii) से हमें मिलता है,

$$\text{आयतन} = \frac{1}{4}\left(\frac{\left(a^3\right)}{\sqrt{3}}-\frac{a^3}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{a^3}{6\sqrt{3}} \quad \text{..(iii)}$$

फिर $\quad \frac{d^2V}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{4}\left(a^2-3x^2\right)=-\frac{3}{2}x$

क्योंकि x बक्से की भुजा है, अतः धनात्मक है

$\therefore \quad \frac{d^2V}{dx^2}<0$

$\therefore$ आयतन अधिकतम है।

अतः बक्से का अधिकतम आयतन $=\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$

उदाहरण 29.42. दर्शाइए कि एक वृत्त के अन्तर्गत जितने भी आयत बनाये जा सकते हैं, उनमें वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

हल : माना ABCD एक आयत है जो एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r है, के अन्तर्गत बनाया गया है, तो व्यास

$$AC = 2r$$

तब $\quad AB^2+BC^2=AC^2 \quad$ अथवा $\quad x^2+y^2=(2r)^2=4r^2$ ......(i)

अब आयत का क्षेत्रफल $A = xy$

$\therefore \quad A=x\sqrt{4r^2-x^2}$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dx}=\frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2-x^2}}+\sqrt{4r^2-x^2}\cdot 1=\frac{4r^2-2x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}}$$

अधिकतम क्षेत्रफल के लिए, $\frac{dA}{dx}=0$

$$\frac{4r^2-2x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}r$$

अब $$\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{\sqrt{4r^2-x^2}\,(-4x)-\left(4r^2-2x^2\right)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{4r^2-x^2}}}{\left(4r^2-x^2\right)}$$

$$=\frac{-4x\left(4r^2-x^2\right)+x\left(4r^2-2x^2\right)}{\left(4r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)_{\text{at } x=\sqrt{2}r}=\frac{-4\sqrt{2}\left(2r^2\right)+0}{\left(2r^2\right)^{\frac{3}{2}}}\qquad \ldots\left(\text{Putting } x=\sqrt{2}r\right)$$

$$=\frac{-8\sqrt{2}r^3}{2\sqrt{2}r^3}=-4<0$$

अतः A अधिकतम है जब $\quad x=\sqrt{2}r$

अब (i) से, $\quad y=\sqrt{4r^2-2r^2}=\sqrt{2}\ r$

$\therefore\quad x=y$

अतः ABCD एक वर्ग होगा।

उदाहरण 29.43. दर्शाइए कि एक दिये गये आयतन वाले बन्द लम्ब वृतीय बेलन, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम है, की ऊँचाई उसके व्यास के बराबर है।

हल : माना बेलन का आयतन V, त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है

$\therefore\quad V=\pi r^2h$

$\Rightarrow\quad h=\dfrac{V}{\pi r^2}\qquad \ldots$ (i)

अब पृष्ठीय क्षेत्रफल $\quad S=2\pi rh+2\pi r^2$

$$=2\pi r.\frac{V}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{2V}{r}+2\pi r^2$$

अब $\quad \dfrac{dS}{dr}=\dfrac{-2V}{r^2}+4\pi r$

न्यूनतम पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए, $\dfrac{dS}{dr}=0$

$\therefore\quad \dfrac{-2V}{r^2}+4\pi r=0$

$\Rightarrow\quad V=2\pi r^3$

(i) तथा (ii) से, $h = \dfrac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$ ..(ii)

पुन: $\dfrac{d^2S}{dr^2} = \dfrac{4V}{r^3} + 4\pi = 8\pi + 4\pi$ ... [(ii) का उपयोग करने पर]

$= 12\pi > 0$

$\therefore$ S न्यूनतम है जब $h = 2r$

उदाहरण 29.44. दर्शाइए कि बंद लम्ब वृत्तीय बेलन, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल दिया गया है, का आयतन अधिकतम होगा यदि उसकी ऊँचाई उसके व्यास के बराबर हो।

हल : मान लीजिए कि S तथा V बंद उस लम्ब वृत्तीय बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन हैं जिसके आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है।

तो $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ .....(i)

(यहाँ पृष्ठीय क्षेत्रफल अचर है तथा दिया गया है)

$$V = \pi r^2 h$$

$\therefore$ $$V = \pi r^2 \left[\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}\right] = \frac{r}{2}\left[S - 2\pi r^2\right]$$

$$V = \frac{Sr}{2} - \pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - \pi\left(3r^2\right)$$

उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ के लिए, $\dfrac{dV}{dr} = 0$

अर्थात, $\dfrac{S}{2} - \pi\left(3r^2\right) = 0$

अथवा, $S = 6\pi r^2$

(i) से हमें मिलता है, $6\pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$\Rightarrow$ $4\pi r^2 = 2\pi rh$

$\Rightarrow$ $2r = h$ ...(ii)

तथा, $\dfrac{d^2V}{dr^2} = \dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{S}{2} - 3\pi r^2\right] = -6\pi r,$ $\left[\because \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{S}{2}\right) = 0\right]$

= एक ऋणात्मक संख्या

अत: लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन अधिकतम होगा यदि उसकी ऊँचाई उसकी त्रिज्या की दुगुनी हो, अर्थात $h = 2r$

उदाहरण 29.45. 48 सेमी भुजा वाली वर्गाकार धातु की चादर के कोनों में से बराबर वर्गाकार टुकड़े काटे गए हैं और शेष भुजाओं को इस प्रकार मोड़ा गया है कि एक खुला बक्सा बन जाए। काटे गये वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए ताकि बक्से का आयतन अधिकतम हो।

हल : मान लीजिए कि काटे गए वर्ग की भुजा x सेमी है। अत: बनने वाले बक्से की भुजा 48–2x सेमी तथा ऊँचाई x सेमी होगी

$\because$ $x > 0, 48-2x > 0,$ अर्थात $x < 24$

x का मान 0 और 24 के बीच होगा

अर्थात $0 < x < 24$

अब बक्से का आयतन V

$$= (48-2x)(48-2x)\,x$$

अर्थात $$V = (48-2x)^2 \cdot x$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dx} = (48-2x)^2 + 2(48-2x)(-2)\,x$$

$$= (48-2x)(48-6x)$$

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dV}{dx} = 0$

अर्थात $$(48-2x)(48-6x) = 0$$

अत: या तो $x = 24$ या $x = 8$

$\because$ $0 < x < 24$ अत: $x = 8$

अब $$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 384$$

$$\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x=8} = 192 - 384 = -192 < 0$$

अत: $x = 8$ के लिए आयतन अधिकतम है।

अत: काटे गये वर्ग की भुजा 8 सेमी होगी।

उदाहरण 29.46. x वस्तुएं प्रतिदिन बेचने वाली एक फर्म का लाभ P (रु. में) इस प्रकार दिया गया है : $P(x) = (150-x)\,x - 1625$

वस्तुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो फर्म को अधिकतम लाभ के लिए बनानी चाहिएँ।

हल : यह दिया गया है कि फर्म प्रतिदिन x वस्तुएँ बनाती है तथा बेचती है। अधिकतम लाभ के लिए

$P'(x) = 0$ अर्थात् $\frac{dP}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left[(150-x)x-1625\right]=0$$

$$\Rightarrow \qquad 150-2x=0$$

$$\Rightarrow \qquad x=75$$

अब $\frac{d}{dx}P'(x)=P''(x)=-2$, एक ऋणात्मक संख्या

अतः $x = 75$ के लिए P (x) अधिकतम है। अतः अधिकतम लाभ के लिए फर्म को प्रतिदिन 75 वस्तुएं बनानी चाहिएं।

अब, अधिकतम लाभ $= P(75)$

$= (150-75)\,75-1625$

$= (75\times75-1625)$ रू

$= (5625-1625)$ रू

$= 4000$ रू

उदाहरण 29.47. r सेमी त्रिज्या वाले गोले के अर्न्तगत बने अधिकतम आयतन वाले बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : माना अन्दर बने बेलन की ऊँचाई h तथा आधार की त्रिज्या R है।

तब $$V=\pi R^2 h \qquad ...(i)$$

$\Delta\, OCB$ से हमें मिलता है

$$r^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+R^2 \qquad ...\left(\because OB^2=OC^2+BC^2\right)$$

$$\therefore \qquad R^2=r^2-\frac{h^2}{4} \qquad ...(ii)$$

अब $$V=\pi\left(r^2-\frac{h^2}{4}\right)h=\pi r^2 h-\pi\frac{h^3}{4}$$

$$\therefore \qquad \frac{dV}{dh}=\pi r^2-\frac{3\pi h^2}{4}$$

अधिकतम तथा न्यूनतम के लिए,

$$\frac{dV}{dh}=0$$

$$\therefore \qquad \pi r^2-\frac{3\pi h^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow \qquad h^2=\frac{4r^2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad h=\frac{2r}{\sqrt{3}}$$

अब $$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3\pi h}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2V}{dh^2}\left(h = \frac{2r}{\sqrt{3}} \text{ पर}\right) = -\frac{3\pi \times 2r}{2 \times \sqrt{3}}$$

$$= -\sqrt{3}\pi r < 0$$

$\therefore$ V अधिकतम होगा जब $h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

(ii) में $h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ रखने पर, हमें मिलता है

$$R^2 = r^2 - \frac{4r^2}{4 \times 3} = \frac{2r^2}{3}$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$$

बेलन का अधिकतम आयतन $= \pi R^2 h$

$$= \pi \cdot \left(\frac{2}{3} r^2\right) \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}}$$

देखें आपने कितना सीखा 29.11

1. वे संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 है तथा एक के वर्ग तथा दूसरे के घन का गुणनफल अधिकतम हो।
2. वे दो धनात्मक संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 है तथा जिनके वर्गो का योग न्यूनतम है।
3. सिद्ध कीजिए कि दिये गए परिमाप के आयतों में से वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होगा।
4. सिद्ध कीजिए कि दिये गए कर्ण वाले समकोण त्रिभुज का परिमाप अधिकतम होगा यदि वह त्रिभुज समद्विबाहु हो।
5. एक खिड़की आयताकार है, जिसके उपर एक अर्द्धवृत है। यदि खिड़की का परिमाप 30 मीटर हो तो, उसकी विमाएँ ज्ञात कीजिए, ताकि अधिकतम संभव प्रकाश की मात्रा अन्दर जा सके।
6. एक 100 घन सेमी आयतन वाले बन्द लम्ब वृतीय बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम है।
7. एक ऐसा लम्ब वृतीय बेलन बनाना है कि उसकी त्रिज्या तथा ऊँचाई का योग 6 मीटर हो ऐसे बेलन का अधिकतम आयतन ज्ञात कीजिए।
8. सिद्ध कीजिए कि एक उच्चतम आयतन वाला बेलन, जिसे एक लम्ब वृत्तीय शंकु के अन्तर्गत बनाया जा सके, की (बेलन की) ऊँचाई शंकु की ऊँचाई का एक तिहाई होगी।
9. एक दी गई धारिता (आयतन) का शंक्वाकार टैंट बनाना है। शंकु की ऊँचाई और आधार की त्रिज्या का अनुपात ज्ञात कीजिये, यदि टैंन्ट बनाने के लिए कैनवस की मात्रा न्यूनतम हो।

10. एक निर्माता को 16π घनमीटर आयतन के बेलनाकार पात्र की आवश्यकता है। उसकी विमाएँ ज्ञात कीजिए जिसके पृष्ठ बनाने में न्यूनतम मात्रा में पदार्थ (धातु) उपयोग हो।

11. एक चलचित्र हाल का प्रबंधक टिकट की कीमत 55 रूपये से कम करने पर विचार कर रहा है, ताकि अधिक ग्राहक आएँ। विभिन्न बातों की जाँच के पश्चात उसने निश्चय किया कि प्रतिदिन औसत ग्राहकों की संख्या 'q' निम्नलिखित फलन द्वारा दी जाती है :

$$q = 500 + 100x$$

जबकि x, टिकट की घटायी हुई राशि है। टिकट का वह मूल्य ज्ञात कीजिए कि अधिकतम राजस्व प्राप्त हो।

आइये दोहराएँ

- $y = f(x)$, x का एक फलन है।

  x के सापेक्ष, y में प्रति इकाई परिवर्तन की दर

  $\frac{dy}{dx}$, x के सापेक्ष y में परिवर्तन की दर निरूपित करता है।

  यदि $y = f(t)$ तथा $x = g(t)$

  अत: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \frac{dx}{dt} \neq 0$

- $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \varepsilon.\Delta x$

  $\because$ $\varepsilon.\Delta x$ की बहुत ही छोटी राशि है इसे नगण्य मान सकते हैं, इसलिए

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\cdot\Delta x, \text{ सन्निकटत:}$$

- वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है :

$$y - y_1 = [f'(x)]_{(x_1, y_1)\text{पर}}\{x - x_1\}$$

- वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलंब का समीकरण है

$$y - y_1 = \left[\frac{-1}{f'(x)}\right]_{(x_1, y_1)\text{पर}}(x - x_1)$$

- वक्र $y = f(x)$ के किसी एक बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण जो x-अक्ष के समान्तर है $y = y_1$ है तथा जो y-अक्ष के समान्तर है $x = x_1$ है।

- **वर्धमान फलन:** एक फलन f(x) को एक बन्द अन्तराल [a,b] में वर्धमान फलन कहा जाता है यदि $f(x_2) \geq f(x_1)$ हो जब $x_2 > x_1$ हो।

- **ह्रासमान फलन :** एक फलन f(x) को एक बन्द अन्तराल [a,b] में ह्रासमान फलन कहा जाता है यदि $f(x_2) \le f(x_1)$ हो जब $x_2 > x_1$ हो।
- f(x) एक खुले अन्तराल]a,b[में वर्धमान फलन होगा यदि सभी $x \in [a, b]$ के लिए $f'(x) > 0$
- f(x) एक खुले अन्तराल]a,b[ह्रासमान फलन होगा यदि सभी के लिए $x \in [a, b]$ $f'(x) < 0$
- **एकदिष्ट फलन :**

  (i) एक फलन को एकदिष्ट (वर्धमान) कहते हैं यदि यह दिये हुए अन्तराल में निरन्तर बढ़ता है।

  (ii) एक फलन को एकदिष्ट (ह्रासमान) कहते हैं यदि दिये हुए अन्तराल में वह निरन्तर घटता है।

  यदि एक फलन एक अन्तराल में वर्धमान तथा ह्रासमान है, तो वह एकदिष्ट फलन नहीं हो सकता।
- एक अन्तराल में एक फलन f(x) के बिन्दु $x = a$ के प्रतिवेश में

  (i) यदि बिन्दु 'a' के बाईं ओर $f'(x) > 0$ तथा बिन्दु x=a के दाईं ओर $f'(x) < 0$ हो तो, बिन्दु $x = a$ पर f(x) का एक स्थानीय उच्चिष्ठ होगा।

  (ii) यदि बिन्दु 'a' के बाईं ओर $f'(x) < 0$, तथा बिन्दु $x = a$ के दाईं ओर $f'(x) > 0$ हो तो $x = a$ पर f(x) का एक स्थानीय निम्निष्ठ होगा।
- यदि $x = a$ पर f(x) का स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा स्थानीय निम्निष्ठ है तथा f(x) अवकलनीय है, तब $f'(a) = 0$

  (i) जब x बिन्दु a के आसपास से जाता है तथा f'(x) धनात्मक से ऋणात्मक चिन्ह बदलता है, तो f(x) का x=a पर स्थानीय उच्चिष्ठ होता है।

  (ii) जब x बिन्दु a के आस-पास से जाता है तथा f(x) ऋणात्मक से धनात्मक चिन्ह बदलता है, तो f(x) का $x = a$ पर स्थानीय निम्निष्ठ होता है।
- **द्वितीय अवकलज जांच (Test)**

  (i) यदि $f'(a) = 0$ तथा $f''(a) < 0$; तो $f(x)$ का $x = a$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ होता है।

  (ii) यदि $f'(a) = 0$ तथा $f''(a) > 0$; तो $f(x)$ का $x = a$ पर स्थानीय निम्निष्ठ होता है।

  (iii) यदि $f'(a) = 0$ तथा $f''(a) = 0$; तो $x = a$ पर उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिए $f'(x)$ के चिन्ह परिवर्तन की जाँच करते हैं जब x, 'a' के आस-पास से होकर जाता है।

सहायक वेबसाइट

- *http://mathworld.wolfram.com/PartialDerivative.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_derivative*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Integral*
- *https://www.youtube.com/watch?v=f0pMPjnfars*
- *https://www.youtube.com/watch?v=ySFtitDsCIs*

आइए अभ्यास करें

1. एक वर्ग की भुजा 0.2 सेमी/सेकन्ड की दर से बढ़ रही है। वर्ग के परिमाप की वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए।

2. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 सेमी/सेकन्ड की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है?

3. एक आदमी 4.5 किमी/घन्टा की दर/चाल से 120 मी ऊँचे टावर के पाद की ओर आ रहा है। टावर के शीर्ष पर पहुँचने की उसकी क्या दर है, जबकि वह टावर से 50 मी दूर है?

4. एक पाइप से रेत 12 सेमी^{3}/सेकन्ड की दर से गिर रहा है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 सेमी है?

5. 2मी ऊँचाई का एक आदमी 5मी ऊँचे बिजली के खंभे से 6मी/मिनट की समान चाल से चलता है। उसकी छाया की लम्बाई की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

6. एक कण, वक्र $y = x^3 + 2$ के अनुदिश घूमता है। वक्र पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x-निर्देशांक की तुलना में y-निर्देशांक 8 गुनी तीव्रता से परिवर्तित हो रहा है।

7. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगे वृत्त में 3.5 सेमी/सेकन्ड की गति से चलती हैं जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 7.5 सेमी है तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है?

8. एक पत्थर स्थिर तालाब में डाला जाता है तथा वह एक केन्द्रीय वृत्त श्रृंखला बनाता है। दर ज्ञात कीजिए जब उनमें से एक का व्यास 12 सेमी हो यह मानकर कि प्रारम्भ में केन्द्र पर तरंग की दर 3 सेमी/सेकन्ड है।

9. वक्र $y^2 = 8x$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए, जिसके लिए x-निर्देशांक तथा y-निर्देशांक के परिवर्तन की दर समान है।

10. एक कण वक्र $y = \frac{2}{3}x^3 + 1$ के अनुगत गति कर रहा है। वक्र पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x-निर्देशांक की तुलना में y-निर्देशांक 2 गुना तीव्रता से बदल रहा है।

11. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ (रुपयों में) से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जबकि 5 इकाइयों का उत्पादन बेचा गया है।

12. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से सम्बन्ध कुल लागत (रुपयों में)

    $$C(x) = 0.005x^3 - 0.02x^2 + 30x + 5000$$

    से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जबकि 3 इकाईयों का उत्पादन किया गया है।

    अवकलों का प्रयोग करके निम्नलिखित का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए (13 – 19)

13. $\sqrt{25.02}$

14. $\sqrt{49.5}$

15. (i) $\sqrt{401}$ (ii) $\sqrt{0.24}$

16. (i) $\sqrt{0.0037}$ (ii) $(26)^{\frac{1}{3}}$

17. (i) $(66)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(82)^{\frac{1}{4}}$

18. (i) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$ (ii) $(31.9)^{\frac{1}{5}}$

19. (i) $\frac{1}{(2.002)^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{25.1}}$

20. $f(3.02)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$

21. भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा x के घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

22. x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 1% ह्रास के कारण घन के पृष्ठ क्षेत्रफल में होने वाले सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

23. x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 1% वृद्धि के कारण घन के आयतन में होने वाला सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

24. $f(5.001)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$

25. निम्न में से प्रत्येक वक्र पर स्थित इंगित बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब की प्रवणता ज्ञात कीजिए :

(i) $y = \sqrt{x}$, $x = 9$ पर (ii) $y = x^3 + x$, $x = 2$ पर

(iii) $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर

(iv) $y = 2x^2 + \cos x$, $x = 0$ पर (v) $xy = 6$, $(1,6)$ पर

26. वक्र $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ के बिंदु $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

27. वक्र $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है।

28. वक्र $y = x^2 - 2x + 5$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(i) $2x + y + 7 = 0$ के समान्तर है। (ii) रेखा $5(y - 3x) = 12$ पर लम्बवत् है।

29. दर्शाइए कि वक्र $y = 7x^3 + 11$ के बिन्दुओं $x = 2$ तथा $x = -2$ पर स्पर्श रेखाएँ समान्तर हैं।

30. वक्र $ay^2 = x^3$ के बिन्दु $\left(am^2, am^3\right)$ पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

31. दर्शाइए कि सभी $x \in R$ के लिए $f(x) = x^2$ न तो वर्धमान फलन है और न ही ह्रास मान फलन। निम्नलिखित फलनों $(2-5)$ के लिए वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जहाँ फलन वर्धमान अथवा ह्रासमान है :

32. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

33. $\frac{x}{4} + \frac{4}{x}, x \neq 0$

34. $x^4 - 2x^2$

35. $\sin x - \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$

निम्नलिखित फलनों के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए :

36. (a) $x^3 - 6x^2 + 9x + 7$ (b) $2x^3 - 24x + 107$

(c) $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ (d) $x^4 - 62x^2 + 120x + 9$

37. (a) $\frac{1}{x^2 + 2}$ (b) $\frac{x}{(x-1)(x-4)}, 1 < x < 4$

(c) $x\sqrt{1-x}, \quad x < 1$

38. (a) $\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (b) $\sin 2x \quad, 0 \leq x \leq 2\pi$

(c) $-x + 2\sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$

39. अन्तराल [0,5] में x के किस मान के लिए वक्र $x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता अधिकतम है। वह बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

40. वक्र $-x^3 + 3x^2 + 2x - 27$ के एक बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता अधिकतम है। वह बिन्दु भी ज्ञात कीजिए

41. एक बंद लम्ब वृत्तीय बेलनाकार पात्र बनाना है जिसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 24π वर्गमीटर हो। पात्र का आयतन अधिकतम होने के लिए उसकी विमाएँ ज्ञात कीजिए।

42. एक होटल कॉम्पलेक्स जिसमें 400 कमरे हैं, के 300 कमरे, 360 रूपये प्रतिदिन के किराए पर चढ़े हैं। प्रबन्धन की खोजबीन से पता चलता है कि यदि किराया x रूपये कम कर दिया जाए, तो किराये पर चढ़े हुए कमरे $q = \frac{5}{4}x + 300, 0 \leq x \leq 80$ द्वारा प्रदर्शित होते हैं।

वह किराया ज्ञात कीजिए, कि राजस्व अधिकतम हो। अधिकतम राजस्व भी ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 29.1

1. 64 सेमी^{2}/मिनट 2. 900 सेमी^{3}/सेकन्ड
3. 12π सेमी^{2}/सेमी 4. 11.2π सेमी^{2}/सेकन्ड
5. 75 सेमी^{3}/सेमी

देखें आपने कितना सीखा 29.2

1. 6.05 2. 2.926
3. 1.96875 4. 5.1
5. 3.92π मी^{3} 6. 3%

देखें आपने कितना सीखा 29.3

1. (i) $10, -\frac{1}{10}$ (ii) $-\frac{2}{5}, \frac{5}{2}$ (iii) $1, -1$

2. $p = 5,\ q = -4$ 3. $(3, 3), (-3, -3)$ 4. $(3, 2)$

देखें आपने कितना सीखा 29.4

	स्पर्श रेखा	अभिलंब
1.	(i) $y + 10x = 5$	$x - 10y + 50 = 0$
	(ii) $2x - y = 1$	$x + 2y - 3 = 0$
	(iii) $24x - y = 52$	$x + 24y = 483$

2. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ 3. $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

4. $x + 14y - 254 = 0,\ x + 14y + 86 = 0$

देखें आपने कितना सीखा 29.6

2. $\left(\frac{1}{196}, \frac{-43}{14}\right)$

देखें आपने कितना सीखा 29.8

1.	**वर्धमान**	**ह्रासमान**
(a)	$x > \frac{7}{2}$ के लिए	$x < \frac{7}{2}$ के लिए

	(b)	$x > \frac{5}{2}$ के लिए	$x < \frac{5}{2}$ के लिए
2.	(a)	$x > 6$ के लिए	$-2 < x < 6$ के लिए
	(b)	$x > 4$ अथवा $x < 2$ के लिए	अन्तराल]2,4[में
3.	(a)	$x < -2$ के लिए	$x > -2$ के लिए
	(b)	अन्तराल $-1 < x < -2$ में	$x > -1$ अथवा $x < -2$ के लिए
4.	(a)	सदा	
	(b)	$x > 2$	अन्तराल $0 < x < 2$
	(c)	$x > 2$ अथवा $x < -2$	अन्तराल $-2 < x < 2$
5.	(c)	$\frac{3\pi}{8} \le x \le \frac{7\pi}{8}$	$0 \le x \le \frac{3\pi}{8}$

बिन्दु जहाँ स्पर्श रेखाएँ x–के समान्तर हैं $x = \frac{3\pi}{8}$ तथा $x = \frac{7\pi}{8}$

देखें आपने कितना सीखा 29.9

	स्थानीय निम्निष्ठ	स्थानीय उच्चिष्ठ
1.	$x = 4$ पर -4	—
2.	$x = 3$ पर 15	$x = 1$ पर 19
3.	$x = 6$ पर -128	$x = 1$ पर -3
4.	$x = -6$ पर -1647, $x = 5$ पर -316	$x = 1$ पर 68
5.	$x = 0$ पर -4	$x = -2$ पर 0.
6.	$x = -1$ पर -1	$x = 3$ पर $\frac{1}{7}$

देखें आपने कितना सीखा 29.10

	स्थानीय निम्निष्ठ	स्थानीय उच्चिष्ठ
1.	$x = 2$ पर -34	$x = -3$ पर 91
2.	$x = 0$ पर -5	$x = 8$ पर 251
3.	$x = 0$ पर -4	$x = -2$ पर 0
4.	$x = 3$ पर -28	$x = 1$ पर 0

$x = 0$ पर न उच्चिष्ठ न निम्निष्ठ

5.	–	$x=\frac{\pi}{3}$ पर $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
6.	–	$x=\frac{\pi}{4}$ पर $\sqrt{2}$
7.	$x=-\frac{\pi}{6}$ पर $\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$	$x=\frac{\pi}{6}$ पर $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

देखें आपने कितना सीखा 29.11

1. संख्याए हैं : 6,9   2. दो भाग हैं : 7.5, 5.5

5. दोनों विमाएँ हैं $\frac{30}{\pi+4}, \frac{30}{\pi+4}$ मी

6. त्रिज्या $=\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ सेमी, ऊँचाई $=2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ सेमी

7. अधिकतम आयतन =32 मी^{3}

9. $h=\sqrt{2}r$ 10. $r=2$ मी, $h=4$ मी

11. 3000 रु

आइए अभ्यास करें

1. 0.8 सेमी/सेकन्ड   2. 1.4π सेमी/सेकन्ड

3. $\frac{45}{26}$ किमी/घन्टा   4. $\frac{1}{48\pi}$ सेमी/सेकन्ड

5. 4 मीटर/मिनट   6. (4, 11), $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$

7. 52.5π सेमी^{2}/सेकन्ड   8. 36π सेमी^{3}/सेकन्ड

9. (2, 4)   10. $\left(1, \frac{5}{3}\right), \left(-1, \frac{1}{3}\right)$

11. ₹ 66   12. ₹ 30.015

13. 5.002   14. 7.0357

15. (i) 20.025 (ii) 0.49   16. (i) 0.0608 (ii) 2.963

17. (i) 4.0417 (ii) 3.0093   18. (i) 2.001875 (ii) 1.99875

19. (i) 0.2495 (ii) 0.1996 20. 77.66

21. $0.09x^3$ मी^{3} या 9% 22. $0.12x^2$ मी^{2}

23. $0.03x^3$ मी^{3} या 3% 24. –34.995

25. (i) $\frac{1}{6}, -6$ (ii) $13, -\frac{1}{13}$ (iii) $1, -1$ (iv) 0, परिभाषित नहीं (v) $-6, \frac{1}{6}$

26. $2\sqrt{2}\,(x+y) = a;\ x+y=0$ 27. $(3,0), (-3,0)$

28. (i) $2x+y-5=0$ (ii) $12x+36y=155$

30. $2x+3my-am^2\left(2+3m^2\right)=0$

	वर्धमान	ह्रासमान
32.	$x>2$ अथवा $x<-1$ पर	अन्तराल $-1<x<2$ में
33.	$x>4$ अथवा $x<-4$	अन्तराल $]-4,4[$ में
34.	$x>1$ अथवा $-1<x<0$ में	$x<-1$ अथवा $0<x<1$ में
35.	$0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$ अथवा $\frac{7\pi}{4} \le x \le 2\pi$ में	$\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{7\pi}{4}$. में

		स्थानीय उच्चिष्ठ	स्थानीय निम्निष्ठ
36.	(a)	$x=1$ पर 11	$x=3$ पर 7
	(b)	$x=-2$ पर 139	$x=2$ पर 75
	(c)	$x=-3$ पर 20	$x=\frac{1}{3}$ पर $\frac{40}{27}$
	(d)	$x=1$ पर 68	$x=5$ पर -316 तथा $x=-6$ पर -1647
37.	(a)	$x=0$ पर $\frac{1}{2}$	
	(b)	$x=2$ पर -1	–
	(c)	$x=\frac{2}{3}$ पर $\frac{2}{3\sqrt{3}}$	–
38.	(a)	$x=\frac{\pi}{6}$ पर $\frac{3}{4}$	$x=\frac{\pi}{2}$ पर $\frac{1}{2}$
	(b)	$x=\frac{5\pi}{4}$ तथा $x=\frac{\pi}{4}$ पर 1	$x=\frac{3\pi}{4}$ पर -1

(c) $x = \frac{\pi}{3}$ पर $\frac{-\pi}{4} + \sqrt{3}$ $x = \frac{5\pi}{3}$ पर $\frac{-5\pi}{3} - \sqrt{3}$

39. अधिकतम प्रवणता $x = 5$ पर 24; बिन्दु (5, 24)

40. अधिकतम प्रवणता $x = 1$ पर 5; बिन्दु (1,–23)

41. आधार की त्रिज्या = 2 मी, बेलन की ऊँचाई = 4 मीटर

42. घटा हुआ किराया: 300 रु अधिकतम राजस्व = 112500 रु