311hi31

31

निश्चित समाकलन

हमने पिछले पाठ में प्रतिअवकलज अर्थात् फलन के समाकलन की चर्चा की है।

वास्तव में, समाकलन शब्द का अर्थ है: परिणामों के कुछ प्रकार के संकलन (योग) अथवा संयोजन। अब प्रश्न उठता है कि हम गणित की इस शाखा को क्यों पढ़ते हैं? वास्तव में, समाकलन वह है जिसकी सहायता से वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफलों को ज्ञात किया जाता है, जब इसकी निश्चित सीमाएँ ज्ञात है। आगे हम देखेंगे कि इस शाखा का अनुप्रयोग, सांख्यिकी, भौतिकी, जीव विज्ञान, वाणिज्य तथा अन्य विषयों के विभिन्न प्रश्नों में भी किया जाता है।

इस पाठ में, हम निश्चित समाकल की ज्यामितीय परिभाषा देंगे तथा इसकी व्याख्या करेंगे, उपयुक्त गुणों के प्रयोग द्वारा निश्चित समाकलों का मान ज्ञात करेंगे तथा एक परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने में निश्चित समाकलों का प्रयोग करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल को परिभाषित करना तथा इसकी ज्यामितीय व्याख्या करना
- ऊपर दी गई परिभाषा को प्रयोग करते हुए, दिए गए निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना
- समाकल गणित की मूलभूत प्रमेय का कथन देना
- निश्चित समाकलों का मान ज्ञात करने के लिए, निम्नलिखित गुणों के कथन देना तथा उनका प्रयोग करना:

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (ii) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

(iii) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

मॉड्यूल - VIII

कलन

टिप्पणी

(v) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vi) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ यदि $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$ यदि $f(2a-x) = -f(x)$

(vii) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि 'f', x का एक सम फलन है

$= 0$, यदि f, x का एक विषम फलन है

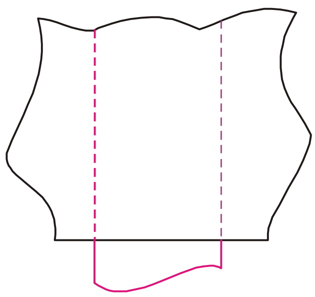
- परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने में, निश्चित समाकलों का प्रयोग करना।

पूर्व ज्ञान

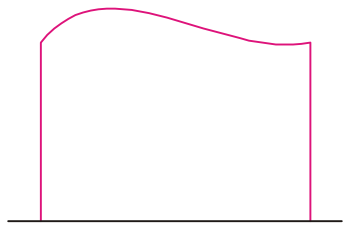
- समाकलन का ज्ञान
- परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

31.1 योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल

इस अनुच्छेद में, हम ऐसे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालने की चर्चा करेंगे, जिसकी सीमा की जानकारी हमें नहीं है (चित्र 31.1 देखिए)



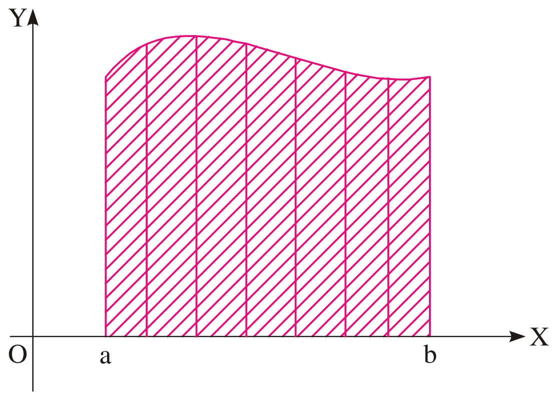
चित्र 31.1



चित्र 31.2

आइए, हम अपने ध्यान को ऐसे क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने तक ही सीमित करें, जहां सीमा, जिसकी जानकारी हमें नहीं है, x-अक्ष के केवल एक पक्ष में (जैसा चित्र 31.2 में) है। यह इसलिए है, क्योंकि हम आशा करते हैं कि यह संभव है कि किसी क्षेत्र को उसी की तरह के छोटे-छोटे उपक्षेत्रों में बाँट कर इनके क्षेत्रफल ज्ञात करके, अन्त में इन्हें जोड़ा जाए, तो पूरा क्षेत्रफल ज्ञात हो जाएगा (चित्र 31.1 देखिए)। अब, माना बन्द अंतराल [a, b] में, एक सतत फलन $f(x)$ परिभाषित है।

अभी यह मान कर चलें कि $f(x)$ द्वारा लिए गए सभी मान ऋणेतर हैं, जिससे कि फलन का आलेख x-अक्ष के ऊपर की वक्र है (चित्र 31.3 देखिए)।



चित्र 31.3

इस वक्र, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ के बीच के क्षेत्र, पर अर्थात् (चित्र 31.3 में) छायांकित क्षेत्र। अब प्रश्न है छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात किया जाए।

इस प्रश्न को हल करने के लिए, हम तीन विशिष्ट स्थितियों, आयताकार क्षेत्र, त्रिभुजाकार क्षेत्र तथा समलंबीय क्षेत्र पर विचार करते हैं।

इन क्षेत्रों का क्षेत्रफल = आधार × औसत ऊँचाई

व्यापक रूप में, अंतराल $[a, b]$ पर किसी फलन $f(x)$ के लिए,

परिबद्ध क्षेत्र (चित्र 31.3 में छायांकित क्षेत्र) का क्षेत्रफल = आधार × औसत ऊँचाई

प्राँत अन्तराल $[a, b]$ की लम्बाई आधार है, किसी बिन्दु x पर $f(x)$ का मान उस बिन्दु की ऊँचाई है। अत: अन्तराल $[a,b]$ में f द्वारा लिए गए मानों का औसत ही औसत ऊँचाई होती है(इसे ज्ञात करना इतना आसान नहीं है, क्योंकि ऊँचाई एकसमान रूप से नहीं बदलती) हमारी समस्या है कि अंतराल $[a,b]$ में f का औसत मान कैसे ज्ञात करें।

यदि अंतराल $[a,b]$ में f के मानों की संख्या परिमित हो, तो हम आसानी से औसत मान निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर लेते हैं :

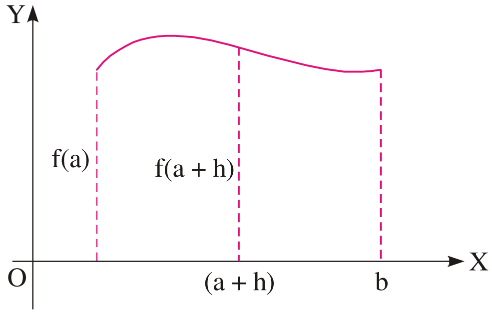
$$\text{अंतराल } [a,b] \text{ में } f \text{ का औसत मान} = \frac{[a, b] \text{ में } f \text{ के मानों का योग}}{\text{मानों की संख्या}}$$

परन्तु हमारे प्रश्न में, अन्तराल $[a, b]$ में f द्वारा लिए गए मानों की संख्या अपरिमित है। ऐसी स्थिति में औसत कैसे ज्ञात किया जाए? उपरोक्त सूत्र हमारी सहायता नहीं करता। अत:, हमें f के औसत मान का आकलन करने के लिए, निम्न विधि का आश्रय लेना पड़ता है :

प्रथम आकलन: केवल a पर f का मान लीजिए। a पर f का मान $f(a)$ है। हम इस मान, अर्थात् $f(a)$, को अन्तराल $[a,b]$ में f का एक रफ (rough) औसत मान आंकते हैं।

$$\text{अंतराल } [a, b] \text{ में } f \text{ का औसत मान (प्रथम आकलन)} = f(a) \qquad \text{(i)}$$

द्वितीय आकलन : $[a, b]$ को दो बराबर भागों, अर्थात् उपअंतरालों में बाँटिए। यदि प्रत्येक उपअंतराल की लम्बाई h है, तो $h = \dfrac{b-a}{2}$ है। उपअंतरालों के बायें सिरों के बिन्दुओं पर f के मानों को लीजिए। ये मान $f(a)$ तथा $f(a+h)$ हैं (चित्र 31.4)।



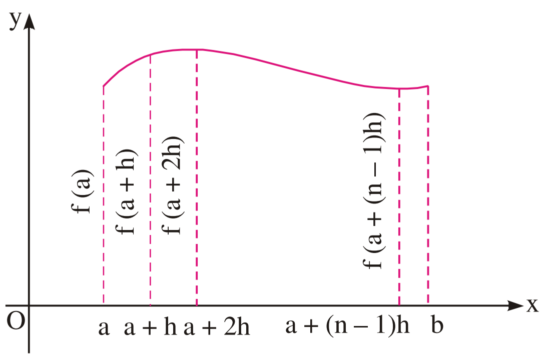
चित्र 31.4

[a, b] में f का औसत इन दोनों मानों का औसत लीजिए।

[a, b] में f का औसत मान (द्वितीय आकलन)

$$= \frac{f(a) + f(a+h)}{2}, \quad h = \frac{b-a}{2} \qquad \text{(ii)}$$

आशा की जाती है कि यह आकलन, प्रथम आकलन से अच्छा है। इसी प्रकार आगे बढ़ते हुए, अंतराल [a,b] को h लम्बाई के n उपअंतरालों में बाँटिए (चित्र 31.5), $h = \frac{b-a}{n}$ ।



चित्र 31.5

n उपअंतरालों के बाएं सिरे के बिन्दुओं पर f के मान लीजिए। ये मान $f(a)$, $f(a + h)$,......, $f[a + (n-1) h]$ हैं। $[a, b]$ में f के इन n मानों का औसत लीजिए।

[a, b] में f का औसत मान (n वां आकलन)

$$= \frac{f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots\ldots + f[a + (n-1)h]}{n}, \quad h = \frac{b-a}{n} \qquad \text{(iii)}$$

n के बड़े मानों के लिए आशा की जाती है कि (iii) अधिक अच्छा आकलन है, जो हम [a, b] में f के औसत मान के लिए ढूंढ़ते हैं।

इस प्रकार, [a, b] में f के औसत मान के लिए, आकलनों का हम निम्न अनुक्रम पाते हैं :

$$f(a)$$

$$\frac{1}{2}[f(a)+f(a+h)], \qquad h=\frac{b-a}{2}$$

$$\frac{1}{3}[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)], \qquad h=\frac{b-a}{3}$$

....

....

$$\frac{1}{n}\{f(a)+f(a+h)+........+f[a+(n-1)h]\}, \quad h=\frac{b-a}{n}$$

जैसे-जैसे हम इस अनुक्रम के अनुदिश आगे बढ़ते हैं, वैसे-वैसे हम अपने परिणाम अर्थात् [a, b] में f द्वारा लिये गये औसत मान के निकट और अधिक निकट पहुंचते जा रहे हैं, । अतः यह तर्कसंगत है कि इन आकलनों की सीमा को [a, b] में f का औसत मान समझा जाए। दूसरे शब्दों में,

[a, b] में, f का औसत मान

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+......+f[a+(n-1)h]\},$$

$$\text{जबकि} \quad h=\frac{b-a}{n} \qquad \text{(iv)}$$

$$=\lim_{h\to 0} h\{f(a)+f(a+h)+....+f[a+(n-1)h]\},$$

यह सिद्ध किया जा सकता है कि बन्द अंतराल [a, b] पर सभी सतत फलनों के लिए इस सीमा का अस्तित्व होता है।

अब हमारे पास चित्र 31.3 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र है। आधार (b–a) है और औसत ऊँचाई (iv) से प्राप्त है। वक्र $f(x)$, x- अक्ष, कोटियों $x=a$ तथा $x=b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

$$=(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+......+f[a+(n-1)h]\},$$

$$\text{जबकि} \quad h=\frac{b-a}{n} \qquad \text{(v)}$$

(v) के दाएँ पक्ष के व्यजंक को हम एक **निश्चित समाकल** की परिभाषा के रूप में लेते हैं। इस समाकल को $\int_a^b f(x)\,dx$ द्वारा व्यक्त किया जाता है और इस प्रकार पढ़ा जाता है : 'a से b तक $f(x)$ का समाकल'। संकेत $\int_a^b f(x)\,dx$ में संख्याओं a तथा b को क्रमशः समाकलन की **निम्न सीमा** व **उच्च सीमा** कहते हैं, तथा $f(x)$ को **समाकल्य** कहते हैं।

टिप्पणी: [a, b] में f के औसत मानों के आकलनों को प्राप्त करने के लिए, हमने उपअंतरालों के बाएँ पक्षों के सिरे के बिन्दुओं को लिया है। बाएँ पक्षों के सिरों के बिन्दुओं को ही क्यों लिया? क्यों नहीं उपअंतराल के दाएँ पक्ष सिरे के बिन्दुओं को लिया?

हम उपअंतराल के दाएँ पक्ष के सिरे के बिन्दुओं को भी ले सकते हैं। तब सूत्र हमें इस प्रकार का मिलेगा।

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(b)\},$$

जबकि $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$= \lim_{h\to 0} h\,[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(b)] \qquad \text{(vi)}$$

उदाहरण 31.1. $\int_1^2 x\,dx$ को योग की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

हल : परिभाषा से,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\ldots\ldots\ldots+f\{a+(n-1)h\}],$$

जबकि $h = \dfrac{b-a}{n}$

यहाँ, $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = x$ और $h = \dfrac{1}{n}$ ।

$$\therefore \quad \int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots\ldots\ldots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\underbrace{1+1+\ldots\ldots+1}_{n \text{ बार}}+\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}\{1+2+\ldots\ldots+(n-1)\}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{(n-1).n}{n.2}\right] \quad \left[\because 1+2+3+\ldots.+(n-1)=\frac{(n-1).n}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{3n-1}{2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}\right] = \frac{3}{2}$$

उदाहरण 31.2. $\int_0^2 e^x dx$ को योग की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

हल : परिभाषा से,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\,[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots..+f\{a+(n-1)h\}],$$

जबकि $\quad h = \dfrac{b-a}{n}$

यहाँ $a = 0, b = 2, f(x) = e^x$ तथा $h = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$ ।

$$\therefore \quad \int_0^2 e^x dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(0)+f(h)+f(2h)+.......+f(n-1)h\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^0 + e^h + e^{2h} + ... + e^{(n-1)h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^0\left(\frac{\left(e^h\right)^n - 1}{e^h - 1}\right)\right]$$

$$\left[\text{क्योंकि} \quad a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[\frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\left[\frac{e^2 - 1}{\left(\dfrac{e^h - 1}{h}\right)}\right] \qquad (\because nh = 2)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^2 - 1}{\dfrac{e^h - 1}{h}} = \frac{e^2 - 1}{1} = e^2 - 1 \qquad \left[\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1\right]$$

उदाहरण 31.1 तथा 31.2 में, हम देखते हैं कि निश्चित समाकल का मान योग की सीमा के रूप में निकालना काफी कठिन है। इस कठिनाई के समाधान के लिए, हमारे पास समाकलन गणित की मूलभूत प्रमेय है जिसका कथन है :

प्रमेय 1 : यदि $[a,b]$ में f सतत है तथा $[a,b]$ में f का एक प्रति अवकलज F है,

तो $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad ......(1)$$

सामान्यत:, अन्तर $F(b)-F(a)$ को $\left[F(x)\right]_a^b$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, जिससे (1) को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \text{ या } \left[F(x)\right]_a^b$$

दूसरे शब्दों में, यह प्रमेय हमें बताती है कि

$$\int_a^b f(x)\,dx = (\text{उच्च सीमा } b \text{ पर प्रतिअवकलज का मान}) -$$

$$(\text{उसी प्रतिअवकलज का निम्न सीमा } a \text{ पर मान})$$

उदाहरण 31.3. निम्न के मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx$ (b) $\int_0^2 e^{2x} \; dx$

हल : (a) हम जानते हैं कि $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

(b)
$$\int_0^2 e^{2x} \, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2, \qquad \left[\because \int e^x dx = e^x\right]$$

$$= \left(\frac{e^4 - 1}{2}\right)$$

प्रमेय 2 : यदि [a,b] में f तथा g दो सतत फलन हैं तथा c अचर है, तो

(i) $\int_a^b c\, f(x) dx = c \int_a^b f(x)\, dx$

(ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

(iii) $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$

उदाहरण 31.4. $\int_0^2 \left(4x^2 - 5x + 7\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\int_0^2 \left(4x^2 - 5x + 7\right) dx = \int_0^2 4x^2 dx - \int_0^2 5x \; dx + \int_0^2 7 \; dx$$

$$= 4\int_0^2 x^2 dx - 5\int_0^2 x dx + 7\int_0^2 1 \; dx$$

$$= 4.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 7[x]_0^2$$

$$= 4.\left(\frac{8}{3}\right) - 5\left(\frac{4}{2}\right) + 7(2)$$

$$= \frac{32}{3} - 10 + 14 = \frac{44}{3}$$

देखें आपने कितना सीखा 31.1

1. $\int_0^5 (x+1)\,dx$ को योग की सीमा लेकर ज्ञात कीजिए।

2. $\int_{-1}^{1} e^x\,dx$ को योग की सीमा लेकर ज्ञात कीजिए।

3. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

   (c) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। (d) $\int_1^2 \left(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9\right)dx$ ज्ञात कीजिए।

31.2 प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना

निश्चित समाकल का मान ज्ञात करने के लिए, मुख्य बात है संबंधित अनिश्चित समाकल ज्ञात करना। पूर्व पाठों में, अनिश्चित समाकल ज्ञात करने के लिए, हमने बहुत सी विधियों की चर्चा की है। अनिश्चित समाकल ज्ञात करने की विधियों में एक महत्वपूर्ण विधि प्रतिस्थापन विधि है। जब हम निम्न निश्चित समाकलों जैसे समाकलों का मान ज्ञात करने के लिए प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग करते हैं :

$$\int_2^3 \frac{x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx,$$

तो निम्नलिखित चरणों का पालन करते हैं:

(i) दिए हुए समाकल को एक समुचित प्रतिस्थापन द्वारा एक ज्ञात रूप में बदल लिया जाए तथा समाकलन योग्य बना लिया जाए। समाकल को नए चर के पदों में लिखिए।

(ii) नए चर के सापेक्ष नए समाकल्य का समाकलन कीजिए।

(iii) तदनुसार सीमाओं को बदला जाए तथा उच्च और निम्न सीमाओं पर मानों का अन्तर ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी: यदि हम सीमा को नए चर के सापेक्ष नहीं बदलते, तो समाकलन के पश्चात नए चर के लिए पुनः प्रतिस्थापन कीजिए तथा मूल चर में उत्तर लिखिए। समाकल की दी हुई सीमाओं से अब उत्तर ज्ञात कर लीजिए।

उदाहरण 31.5. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\,d\theta$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\cos x}$

हल : (a) माना $\cos x = t$ है।

तब, $\sin x\,dx = -dt$

जब $x=0,\ t=1$ तथा $x=\dfrac{\pi}{2}, t=0$ है, जब $x, 0$ से $\dfrac{\pi}{2}$ तक विचरण करता है, तो t में संगत विचरण 1 से 0 तक होता है।

$$\therefore \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_1^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\left[\tan^{-1} t\right]_1^0$$

$$= -\left[\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 1\right] = -\left[0-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4}$$

(b) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{1-2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta\,d\theta}{1-2\sin^2\theta\left(1-\sin^2\theta\right)}$$

माना $\quad \sin^2\theta = t$ है।

तब, $\quad 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = dt$

अर्थात् $\quad \sin 2\theta\,d\theta = dt$

जब $\theta = 0, t = 0$ तथा जब $\theta = \dfrac{\pi}{2}, t = 1$

जैसे-जैसे θ, 0 से $\dfrac{\pi}{2}$ तक विचरण करता है वैसे-वैसे नए चर 't' का संगत विचरण 0 से 1 तक होता है।

$$\therefore \qquad I = \int_0^1 \frac{1}{1-2t(1-t)}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^1 = \left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}(-1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(c) हम जानते हैं कि $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+\dfrac{4\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{9+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx \qquad (1)$$

माना $\tan\dfrac{x}{2} = t$

तब, $\sec^2\dfrac{x}{2}\,dx = 2dt$ है, जब $x = 0,\ t = 0$ तथा जब $x = \dfrac{\pi}{2},\ t = 1$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx = 2\int_0^{1} \frac{1}{9+t^2}\,dt \qquad \text{.....[(1) से]}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\tan^{-1}\frac{t}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[\tan^{-1}\frac{1}{3}\right]$$

31.3 निश्चित समाकलों के कुछ गुण

सीमाओं a तथा b के मध्य f(x) का निश्चित समाकल पहले ही निम्न रूप में परिभाषित किया जा चुका है :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{जहाँ } \frac{d}{dx}[F(x)] = f(x), \text{ जहाँ}$$

a तथा b क्रमशः समाकलन की निम्न तथा उच्च सीमाएँ हैं। अब हम ऐसे निश्चित समाकलों के कुछ महत्वपूर्ण तथा उपयोगी गुणों के कथन नीचे दे रहे हैं :

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ (ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$ जहाँ $a < c < b$ है।

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(2a-x)\,dx$$

(vi) $$\int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx$$

(vii) $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{यदि } f(2a-x) = -f(x) \\ 2\int_0^{a} f(x)\,dx, & \text{यदि } f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

(viii) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{यदि } f(x), x \text{ का एक विषम फलन है} \\ 2\int_0^{a} f(x)\,dx, & \text{यदि } f(x), x \text{ का एक सम फलन है} \end{cases}$$

बहुत से निश्चित समाकल, जो अन्यथा बहुत कठिन होते हैं, उपरोक्त गुणों द्वारा आसानी से ज्ञात किए जा सकते हैं।

निम्न उदाहरणों में निश्चित समाकल का मान ज्ञात करने में, इन गुणों के प्रयोग को स्पष्ट किया गया है

उदाहरण 31.6. दर्शाइए कि

(a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log|\tan x|\,dx = 0$$ (b) $$\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx = \pi$$

हल : माना $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log|\tan x|\,dx \qquad \text{....(i)}$$

गुण $\int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx$ का प्रयोग करते हुए, हमें प्राप्त होता है :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cot x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\tan x)^{-1}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\tan x\,dx = -I$$

[(i) का प्रयोग करने पर]

$\therefore \qquad 2I = 0$

अर्थात्, $I = 0$ या $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |\tan x| \, dx = 0$

(b) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx$

माना $I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx$ (i)

$\therefore$ $I = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin(\pi - x)} dx$ $\left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$

$= \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin x} dx$ (ii)

(i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x + \pi - x}{1+\sin x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x} dx$$

या $$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\sec^2 x - \tan x \sec x\right) dx$$

$$= \pi [\tan x - \sec x]_0^{\pi} = \pi[(\tan \pi - \sec \pi) - (\tan 0 - \sec 0)]$$

$$= \pi[0 - (-1) - (0 - 1)] = 2\pi$$

$\therefore$ $I = \pi$

उदाहरण 31.7. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$

हल : (a) माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ (i)

साथ ही, $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx$$

(गुण $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ का प्रयोग करने पर)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\, dx \qquad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) को जाड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.dx = [\,x\,]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ $$I = \frac{\pi}{4}$$

अर्थात्, $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

(b) मान लीजिए $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx \qquad \text{(i)}$$

तब, $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx \quad \ldots\ldots\left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x \sin x}\, dx \qquad \text{(ii)}$$

(i) तथा (ii) को जोड़ने पर, हमें मिलता है :

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x + \cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x}\, dx = 0$$

$\therefore$ $$I = 0$$

उदाहरण 31.8. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{xe^{x^2}}{1 + x^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x + 1|\, dx$

हल : (a) यहाँ $f(x) = \dfrac{xe^{x^2}}{1 + x^2}$ है।

$$\therefore \qquad f(-x) = -\frac{xe^{x^2}}{1+x^2} = -f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$, x का एक विषम फलन है।

$$\therefore \qquad \int_{-a}^{a} \frac{xe^{x^2}}{1+x^2}\, dx = 0$$

(b) $\int_{-3}^{3} |x+1|\, dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ यदि } x \geq -1 \\ -x-1, \text{ यदि } x < -1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \int_{-3}^{3} |x+1|\, dx = \int_{-3}^{-1} |x+1|\, dx + \int_{-1}^{3} |x+1|\, dx$$ [गुण (iii) का प्रयोग करके]

$$= \int_{-3}^{-1} (-x-1)\, dx + \int_{-1}^{3} (x+1)\, dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} - x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} + 1 = 10$$

उदाहरण 31.9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx \qquad .....(i)$$

साथ ही, $$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] dx$$ [गुण (iv) का प्रयोग करके]

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\, dx \qquad .....(ii)$$

(i) और (ii) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [\log(\sin x) + \log(\cos x)]\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \qquad \text{(iii)}$$

पुनः, माना, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\, dx$ है।

$2x = t$ रखिए, जिससे $dx = \frac{1}{2} dt$

जब $x = 0, t = 0$ तथा जब $x = \frac{\pi}{2}, t = \pi$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\, dt, \qquad \text{[गुण (vi) का प्रयोग करके]}$$

$$= \frac{1}{2}.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dt \qquad \text{[गुण (i) का प्रयोग करके]}$$

$\therefore \quad I_1 = I$ है [(i) से] .....(iv)

(iii) में इस मान को रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

अतः, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$

देखें आपने कितना सीखा 31.2

निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए :

1. $\int_0^1 xe^{x^2} dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\sin x}$ 3. $\int_0^1 \frac{2x+3}{5x^2+1} dx$

4. $\int_{-5}^{5} |x+2|\,dx$ 5. $\int_{0}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx$ 6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$

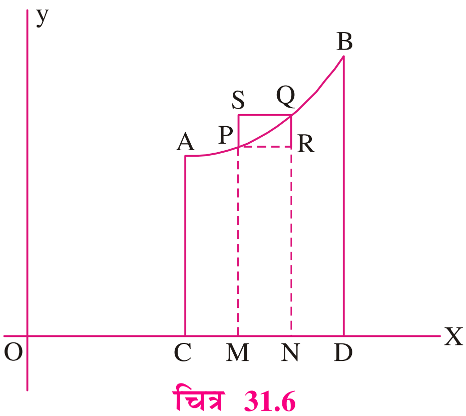
7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,dx$ 8. $\int_{-a}^{a} \frac{x^3 e^{x^4}}{1+x^2}\,dx$ 9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log\tan x\,dx$

10. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$

31.4 समाकलन के अनुप्रयोग

माना अन्तराल [a, b] में दो सतत फलन f तथा g ऐसे हैं कि प्रत्येक $x \in [a,b]$ के लिए, $f(x) \geq g(x)$ अर्थात् वक्र $y = f(x)$ अन्तराल [a,b] में वक्र $y = g(x)$ का नीचे से प्रतिच्छेदन नहीं करता है। अब प्रश्न यह है कि ऊपर से $y = f(x)$, नीचे से $y = g(x)$ तथा दोनों ओर $x = a$ और $x = b$ से परिबद्ध (घिरे) क्षेत्रफल को कैसे ज्ञात करें। पुनः, क्या होता है जब ऊपरी वक्र $y = f(x)$ नीचे वाले वक्र $y = g(x)$ को या तो बाईं पक्ष सीमा $x = a$ या दाईं पक्ष सीमा $x = b$ अथवा दोनों पर काटता है?

31.4.1 वक्र, x- अक्ष तथा कोटियों द्वारा परिबद्ध (घिरा) क्षेत्रफल



चित्र 31.6

मान लीजिए वक्र $f(x)$, AB है तथा CA और DB क्रमशः $x = a$ और $x = b$ पर दो कोटियां हैं। पुनः मान लीजिए कि $y = f(x)$ अंतराल $a \leq x \leq b$ में x का एक वर्धमान फलन है।

माना $P(x, y)$ वक्र पर कोई बिन्दु है तथा

$Q(x + \delta x,\ y + \delta y)$ इस पर एक निकटवर्ती बिन्दु है। इनकी कोटियों PM तथा QN को खींचिए।

यहाँ हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x बदलता है, वैसे-वैसे क्षेत्रफल (ACMP) भी बदलता है।

माना A= क्षेत्रफल (ACMP) है।

तब, क्षेत्रफल (ACNQ) $= A + \delta A$

क्षेत्रफल (PMNQ) = क्षेत्रफल (ACNQ)–क्षेत्रफल (ACMP)

$$= A + \delta A - A = \delta A$$

आयत PRQS को पूरा कीजिए। तब क्षेत्रफल (PMNQ) आयतों PMNR तथा SMNQ के क्षेत्रफल के मध्य में स्थित है। अर्थात्

δA, $y\,\delta x$ तथा $(y + \delta y)\,\delta x$ के मध्य में स्थित है।

$\Rightarrow \quad \dfrac{\delta A}{\delta x}$, y तथा $\quad y + \delta y$ के मध्य में स्थित है।

सीमांत की स्थिति में, जब $Q \to P, \delta x \to 0$ तथा $\delta y \to 0$ है।

$\therefore \quad \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta A}{\delta x}$, y तथा $\lim\limits_{\delta y \to 0} (y + \delta y)$ के मध्य में स्थित है।

$$\therefore \quad \frac{dA}{dx} = y$$

$x = a$ से $x = b$ तक, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b \frac{dA}{dx} \cdot dx = [A]_a^b$$

= (क्षेत्रफल जब $x = b$) – (क्षेत्रफल जब $x = a$)

= क्षेत्रफल (ACDB) – 0 = क्षेत्रफल (ACDB)

अत: $\quad$ क्षेत्रफल (ACDB) $= \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{या} \quad \int_a^b y\,dx \quad \text{है,}$$

जहाँ $y = f(x)$ एक संतत एकमानी फलन है तथा अतंराल $a \le x \le b$ में y चिन्ह नहीं बदलता।

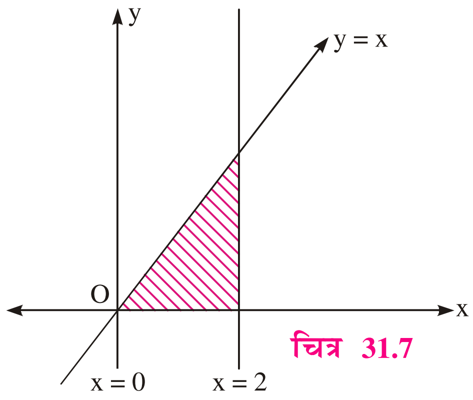
उदाहरण 31.10. वक्र $y = x$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = 0$ और $x = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ वक्र $y = x$ है।

$\therefore$ वक्र $y = x$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 0$ और $x = 2$ द्वारा परिबद्ध अभीष्ट क्षेत्रफल (जैसा कि चित्र 12.7 में दिखाया गया है)

$$= \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$= 2 - 0 = 2$ वर्ग इकाई



चित्र 31.7

उदाहरण 31.11. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ तथा x-अक्ष द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ वक्र $x^2 + y^2 = a^2$ एक वृत्त है, जिसका केन्द्र (0,0) तथा त्रिज्या a है। अत: हमें वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 0$ और $x = a$ द्वारा घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \displaystyle\int_0^a y\,dx$

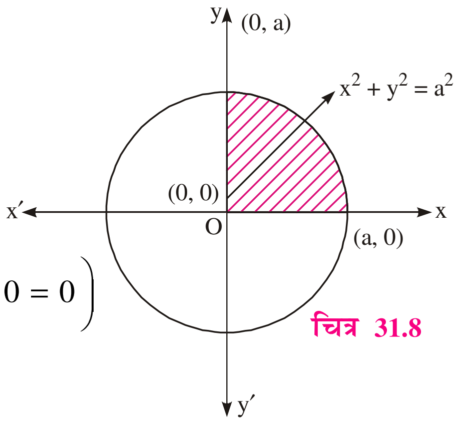
$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \qquad (\because \text{ प्रथम चतुर्थांश में } y \text{ धनात्मक है})$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^a$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \left(\because \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}, \sin^{-1}0 = 0\right)$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \text{ वर्ग इकाई}$$



चित्र 31.8

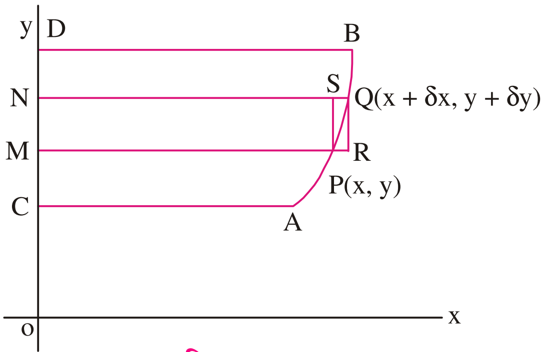
देखें आपने कितना सीखा 31.3

1. वक्र $y = x^2$, $x -$ अक्ष तथा रेखाओं $x = 0$ और $x = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. वक्र $y = 3x$, $x -$ अक्ष तथा रेखाओं $x = 0$ और $x = 3$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

31.4.2 वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = c, y = d$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करना

माना AB वक्र $x = f(y)$ है तथा CA और DB क्रमशः $y = c$ और $y = d$ पर भुज हैं।

माना $P(x, y)$ वक्र पर कोई बिन्दु है तथा $Q(x + \delta x, y + \delta y))$ इस पर एक निकटवर्ती बिन्दु है। PM तथा QN, y-अक्ष पर क्रमशः P तथा Q से लम्ब खींचिए। जब y बदलता है, तो क्षेत्रफल (ACMP) भी बदलता है तथा स्पष्टतः यह y का एक फलन है। माना A, क्षेत्रफल (ACMP) को व्यक्त करता है तब क्षेत्रफल (ACNQ), $A + \delta A$ होगा।



चित्र 31.9

$\therefore$ क्षेत्रफल (PMNQ) = क्षेत्रफल (ACNQ) $-$क्षेत्रफल (ACMP)

$$= A + \delta A - A = \delta A$$

आयत PRQS को पूरा कीजिए। तब क्षेत्रफल (PMNQ), क्षेत्रफल (PMNS) तथा क्षेत्रफल RMNQ के मध्य स्थित है, अर्थात्

$\delta A, x\,\delta y$ तथा $(x + \delta x)\delta y$ के मध्य स्थित होगा।

$\Rightarrow \quad \dfrac{\delta A}{\delta y}$, x तथा $x + \delta x$ के मध्य स्थित होगा।

सीमांत स्थिति में, जब $Q \to P$, $\delta x \to 0$ तो $\delta y \to 0$ है।

$\therefore$ $\lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta A}{\delta y}$, x तथा $\lim_{\delta x \to 0} (x + \delta x)$ के मध्य स्थित होगी।

$\Rightarrow$ $\frac{dA}{dy} = x$

सीमाओं c से d तक के सापेक्ष दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\int_c^d x\,dy = \int_c^d \frac{dA}{dy} \cdot dy$$

$$= [A]_c^d$$

$$= (\text{क्षेत्रफल जब } y = d) - (\text{क्षेत्रफल जब } y = c)$$

$$= \text{क्षेत्रफल (ACDB)} - 0$$

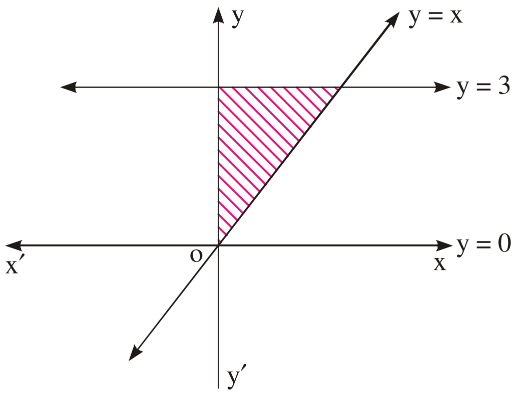
$$= \text{क्षेत्रफल (ACDB)}$$

अतः, क्षेत्रफल (ACDB) $= \int_c^d x\,dy = \int_c^d f(y)\,dy$

वक्र $x = f(y)$, $y-$अक्ष तथा रेखाओं $y = c$ और $y = d$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

$$\int_c^d x\,dy \quad \text{या} \quad \int_c^d f(y)\,dy \text{ है}$$

जहाँ $x = f(y)$ एक सतत एकमानी फलन है और अंतराल $c \le y \le d$ में x का चिन्ह नहीं बदलता।



चित्र 31.10

उदाहरण 31.12. वक्र $x = y$, $y-$अक्ष तथा रेखाओं $y = 0$ और $y = 3$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ वक्र $x = y$ है।

$\therefore$ वक्र, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = 0, y = 3$ द्वारा परिबद्ध अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^3 x\,dy = \int_0^3 y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 12.13. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ तथा y-अक्ष द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल : दिया हुआ वक्र वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ है, जिसका केन्द्र (0,0) तथा त्रिज्या a है। अतः हमें वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$, y-अक्ष तथा भुजों $y = 0$ और $y = 1$ द्वारा घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

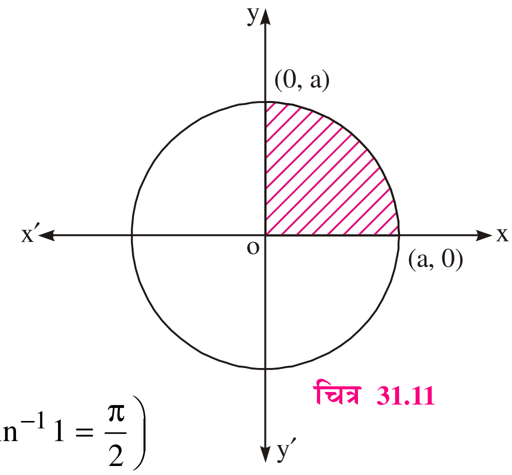
अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^a x\, dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy$

($\because$ प्रथम चतुर्थांश में x धनात्मक होता है)

$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1} 1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \text{ वर्ग इकाई} \qquad \left(\because \sin^{-1} 0 = 0, \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}\right)$$



चित्र 31.11

टिप्पणी: यह क्षेत्रफल वही है, जो उदाहरण 31.11 में है। इसका कारण है कि वक्र अक्षों के सापेक्ष सममित हैं। ऐसे प्रश्नों में यदि हमसे वक्र का क्षेत्रफल पूछा गया है, तो बिना किसी रुकावट के, हम दोनों में से किसी एक विधि से ज्ञात कर सकते हैं।

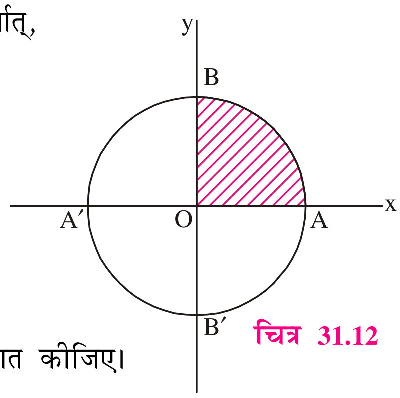
उदाहरण 12.14. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का पूरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र का समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ है। वृत्त दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है। अत: वृत्त का क्षेत्रफल वृत्त के प्रथम चतुर्थांश के क्षेत्रफल का चार गुना है। अर्थात्,

वृत्त का क्षेत्रफल $= 4 \times \text{OAB}$ का क्षेत्रफल

$$= 4 \times \frac{\pi a^2}{4} \quad \text{(उदाहरणों 12.11 तथा 12.13 से)}$$

$$= \pi a^2 \text{ वर्ग इकाइयाँ}$$



चित्र 31.12

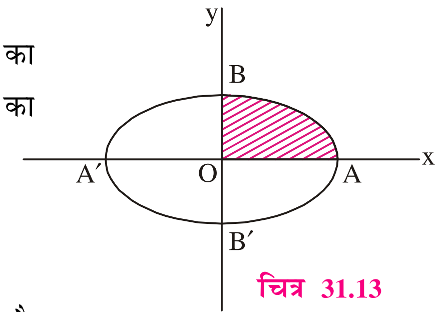
उदाहरण 12.15. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का पूरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।

दीर्घवृत्त, दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है।

अत: दीर्घवृत्त का पूरा क्षेत्रफल प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्रफल का चार गुना है। अर्थात् दीर्घवृत्त का पूरा क्षेत्रफल $= 4 \times (\text{OAB})$ का क्षेत्रफल, प्रथम चतुर्थांश में

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{या} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$



चित्र 31.13

अब क्षेत्रफल (OAB) के लिए x, 0 से a तक परिवर्तित होता है।

$\therefore$ (OAB) का क्षेत्रफल $= \int_0^a y\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

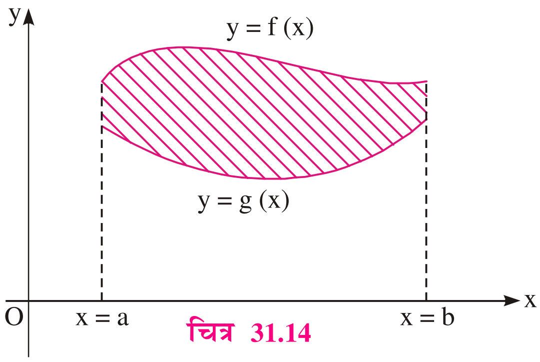
$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0\right] = \frac{ab\pi}{4}$$

दीर्घवृत्त का पूरा क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{ab\pi}{4} = \pi ab$ वर्ग इकाई

31.4.3 दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल

माना अंतराल [a,b] पर दो फलन $f(x)$ तथा $g(x)$ सतत और ऋणेतर हैं। ऐसा है कि $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ अर्थात् $x \in [a,b]$ के लिए वक्र $y = f(x)$ वक्र $y = g(x)$ को नीचे से नहीं काटता। हम $y = f(x)$ द्वारा ऊपर $y = g(x)$ द्वारा नीचे तथा दोनों पक्षों में $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं।



चित्र 31.14

A = [y = f(x) के नीचे क्षेत्रफल] – [y = g(x) के नीचे क्षेत्रफल] .....(1)

अब, वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल की परिभाषा का प्रयोग करते हुए, हमें प्राप्त है :

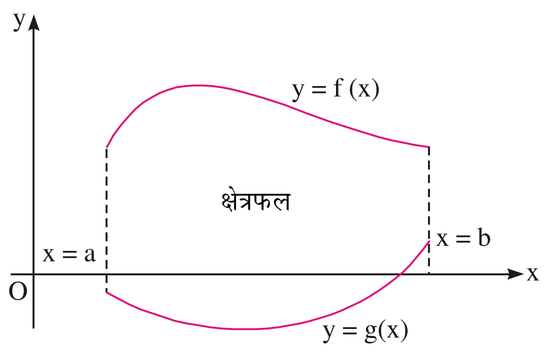
$y = f(x)$ के नीचे का क्षेत्रफल $= \int_a^b f(x)\,dx$ ...(2)

इसी प्रकार, $y = g(x)$ के नीचे का क्षेत्रफल $= \int_a^b g(x)\,dx$ ...(3)

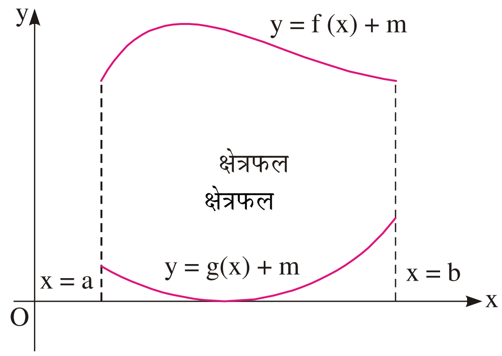
(2) और (3) समीकरणों का प्रयोग (1) में करते हुए हमें प्राप्त है,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \quad ...(4)$$

क्या होता है जब g के मान ऋणात्मक भी हों? $f(x)$ और $g(x)$ जब तक x-अक्ष के ऊपर न हो जाएँ ऐसा स्थानांतरण करके इस सूत्र को विस्तृत किया जा सकता है। इसके लिए माना $[a,b]$ पर $g(x)$ का न्यूनतम मान $-m$ है (चित्र 31.15 देखिए)।



चित्र 31.15



चित्र 31.16

चूंकि $g(x) \geq -m \quad \Rightarrow \quad g(x) + m \geq 0$

अब फलन $g(x)+m$ तथा $f(x)+m$, [a, b] पर ऋणेतर है (चित्र 31.16 देखिए)। अंतर्ज्ञान से यह स्पष्ट है कि घिरे भाग का क्षेत्रफल स्थानांतरण द्वारा अपरिवर्तित रहता है। अत: f और g के मध्य का क्षेत्रफल A वही क्षेत्रफल है जो $f(x)+m$ तथा $g(x)+m$ के मध्य है। इस प्रकार

A = [f(x) + m के नीचे क्षेत्रफल] − [g(x) + m के नीचे क्षेत्रफल] ....(5)

अब, वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल की परिभाषा का प्रयोग करके हमें प्राप्त है :

$y = f(x) + m$ के नीचे का क्षेत्रफल $= \int_a^b [f(x) + m]dx$ ....(6)

तथा $y = g(x) + m$ के नीचे का क्षेत्रफल $= \int_a^b [g(x) + m]dx$ ....(7)

समीकरणों (5), (6) तथा (7) द्वारा

$$A = \int_a^b [f(x) + m]dx - \int_a^b [g(x) + m]dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

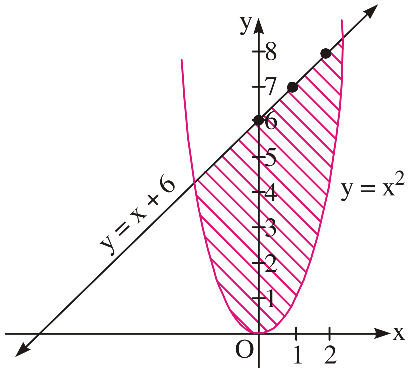
यह वही है जो (4) है। इस प्रकार,

यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अंतराल [a,b] पर सतत फलन हैं तथा $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a, b]$ तो $y = f(x)$ द्वारा ऊपर से $y = g(x)$ द्वारा नीचे से $x = a$ द्वारा बाएँ से तथा $x = b$ द्वारा दाएँ से परिबद्ध क्षेत्रफल

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

उदाहरण 31.16. वक्र $y = x^2$ तथा $y = x + 6$ के द्वारा घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल : हम जानते हैं कि $y = x^2$ परवलय का समीकरण है जो y-अक्ष के सापेक्ष सममित है और मूल बिन्दु शीर्ष है। $y = x + 6$ सरल रेखा का समीकरण है (देखिए चित्र 31.17)।



चित्र 31.17

क्षेत्र का आलेख दर्शाता है कि नीचे की सीमा $y = x^2$ है तथा ऊपर की सीमा $y = x + 6$ है। यह दोनों वक्र दो बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। इन दोनों समीकरणों को हल करने पर हमें प्राप्त है।

$$x^2 = x + 6 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3, -2$$

जब $x = 3, y = 9$ तथा जब $x = -2, y = 4$ है।

यहाँ $f(x) = x + 6, g(x) = x^2, a = -2, b = 3$

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_{-2}^{3}\left[(x+6) - x^2\right]dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}$$

$$= \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 31.17. वक्रों $y^2 = 4x$ तथा $y = x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

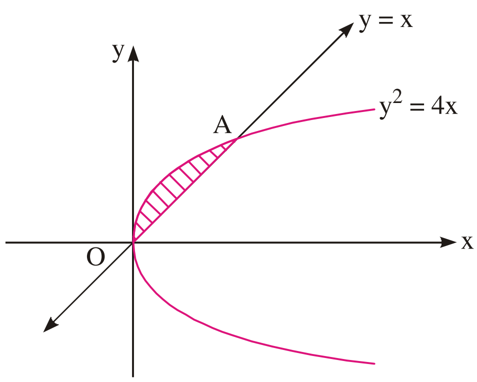
हल : हम जानते हैं कि $y^2 = 4x$ परवलय का समीकरण है, जो x-अक्ष के सापेक्ष सममित है और शीर्ष मूल बिन्दु है। $y = x$ मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण है (चित्र 31.18 देखिए)। क्षेत्र का आलेख दर्शाता है कि नीचे की सीमा $y = x$ है और ऊपर की सीमा $y^2 = 4x$ है। ये दोनों वक्र बिन्दुओं O तथा A पर काटते हैं। इन दोनों समीकरणों को हल करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{y^2}{4} - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = 0, 4$$

जब $y = 0, x = 0$ तथा जब $y = 4, x = 4$ है।



चित्र 31.18

यहां $f(x) = (4x)^{\frac{1}{2}}, g(x) = x, a = 0, b = 4$

$$\text{अत:, अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^4\left(2x^{\frac{1}{2}} - x\right)dx$$

$$= \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 31.18. परवलयों $x^2 = 4ay$ तथा $y^2 = 4ax$ के उभयनिष्ठ भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $x^2 = 4ay$ तथा $y^2 = 4ax$ परवलय के समीकरण है जो क्रमश: x-अक्ष तथा y-अक्ष के सापेक्ष सममित है और दोनों के शीर्ष मूलबिन्दु पर हैं (चित्र 31.19 देखिए)।

क्षेत्र का स्केच दर्शाता है कि नीचे की सीमा $x^2 = 4ay$ है तथा ऊपर की सीमा $y^2 = 4ax$ है ये दोनों वक्र दो बिन्दुओं O तथा A पर मिलते हैं। इन समीकरणों को हल करने पर हमें प्राप्त होता है :

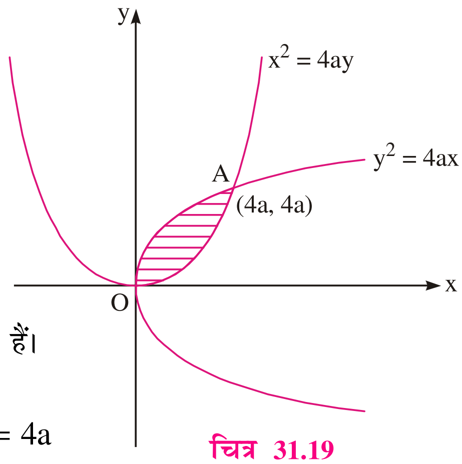
$$\frac{x^4}{16a^2} = 4ax$$

$$\Rightarrow \quad x\left(x^3 - 64a^3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, 4a$$

जब $x = 0, y = 0$ तथा $x = 4a, y = 4a$ है।

अत:, दोनों परवलय बिन्दुओं (0,0) तथा (4a, 4a) पर काटते हैं।



चित्र 31.19

यहाँ $f(x) = \sqrt{4ax}, g(x) = \frac{x^2}{4a}, a = 0$ तथा $b = 4a$

अत:, अभीष्ट क्षेत्रफल,

$$= \int_0^{4a} \left[\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4a} \right] dx = \left[\frac{2.2\sqrt{a}\, x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{12a} \right]_0^{4a}$$

$$= \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3} = \frac{16}{3} a^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

देखें आपने कितना सीखा 31.4

1. वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. दीर्घवृत $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. दीर्घवृत $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. वक्रों $y^2 = 4ax$ तथा $y = \frac{x^2}{4a}$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।
5. वक्रों $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4y$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।
6. वक्रों $y = x^2$ तथा $y = x + 2$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

आइये दोहराएँ

- यदि [a,b] में f सतत फलन है और f का प्रतिअवकलज [a,b] में F है, तब

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- यदि [a,b] में f और g सतत फलन है तथा c एक अचर है, तब

(i) $$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

(ii) $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) $$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र होता है

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{या} \quad \int_a^b y\,dx$$

- जबकि $y = f(x)$ एक सतत एकमानी फलन है तथा अंतराल $a \le x \le b$ में y चिन्ह नहीं बदलता है।
- यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अंतराल [a,b] में सतत फलन है और $f(x) \ge g(x)\ \forall x \in [a, b]$, तब $y = f(x)$ द्वारा उपर की ओर परिबद्ध नीचे की ओर $y = g(x)$ द्वारा परिबद्ध, बायीं ओर $x = a$ तथा दायीं ओर $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

सहायक वेबसाइट

- *http://mathworld.wolfram.com/DefiniteIntegral.html*
- *http://www.mathsisfun.com/calculus/integration-definite.html*
- *https://www.youtube.com/watch?v=ysvFgARjjBM*

आइए अभ्यास करें

निम्नलिखित समाकलों (1 से 6 तक) के मान योग की सीमा से ज्ञात कीजिए :

1. $\int_a^b x\,dx$ 2. $\int_a^b x^2\,dx$ 3. $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

निम्नलिखित समाकलों (4 से 22 तक) के मान ज्ञात कीजिए :

4. $\int_0^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$ 6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ 8. $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx$ 9. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

10. $\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 4}\,dx$ 11. $\int_0^{\pi} \frac{1}{5 + 3\cos\theta}\,d\theta$ 12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\,dx$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$ 14. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\,dx$ 15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\theta}\cos^5\theta\,d\theta$

16. $\int_0^{\pi} x \log \sin x\,dx$ 17. $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x)\,dx$ 18. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$ 20. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x)\,dx$

21. वक्र $x = y^2$, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = 0$ और $y = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

22. वक्रों $y = x^2$ तथा $y = x$ के द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

23. वक्र $y^2 = 4x$ तथा सरल रेखा $x = 3$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

24. एक ऐसे त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक (1, 0), (2, 2) एवं (3, 1) है।

25. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ तथा सरल रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ द्वारा घिरे छोटे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

26. परवलय $y = x^2$ तथा वक्र $y = |x|$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 31.1

1. $\frac{35}{2}$ 2. $e - \frac{1}{e}$

3. (a) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$ (b) 2 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{64}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 31.2

1. $\frac{e-1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

4. 29 5. $\frac{24\sqrt{2}}{15}$ 6. $\frac{\pi}{4}$ 7. $-\frac{\pi}{2}\log 2$

8. 0 9. 0 10. $\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\log 2\right]$

देखें आपने कितना सीखा 31.3

1. $\frac{8}{3}$ वर्ग इकाई 2. $\frac{27}{2}$ वर्ग इकाई

देखें आपने कितना सीखा 31.4

1. 9π वर्ग इकाई 2. 6π वर्ग इकाई 3. 20π वर्ग इकाई

4. $\frac{16}{3}a^2$ वर्ग इकाई 5. $\frac{16}{3}$ वर्ग इकाई 6. $\frac{9}{2}$ वर्ग इकाई

आइए अभ्यास करें

1. $\frac{b^2-a^2}{2}$ 2. $\frac{b^3-a^3}{3}$ 3. $\frac{14}{3}$

4. $\frac{\pi a^2}{4}$ 5. 1 6. $\frac{1}{2}\log 2$

7. $\frac{\pi}{4}$ 8. $\frac{\pi}{2}-1$ 9. $\frac{\pi}{2}$

10. $\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$ 11. $\frac{\pi}{4}$ 12. $1-\log 2$

13. $\frac{2}{3}$ 14. $\frac{16}{15}\left(2+\sqrt{2}\right)$ 15. $\frac{64}{231}$

16. $-\frac{\pi^2}{2}\log 2$ 17. $-\pi\log 2$ 18. $\frac{\pi^2}{4}$

19. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$ 20. $\frac{\pi}{8}\log 2$ 21. $\frac{8}{3}$ वर्ग इकाई

22. $\frac{1}{6}$ वर्ग इकाई 23. $8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई 24. $\frac{2}{3}$ वर्ग इकाई

25. $\frac{2}{3}(\pi-2)$ वर्ग इकाई 26. $\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई