

MATHEMATICS

गणित
(311)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे]

[पूर्णांक : 100

- Note : (i) This Question Paper consists of *two* Sections, viz., 'A' and 'B'.
(ii) *All* questions from Section 'A' are to be attempted. However, in some questions, internal choice is given.
(iii) Section 'B' has two options. Candidates are required to attempt questions from *one option* only.

- निर्देश : (i) इस प्रश्न-पत्र में दो खण्ड हैं—खण्ड 'अ' तथा खण्ड 'ब'।
(ii) खण्ड 'अ' के सभी प्रश्नों को हल करना है। कुछ प्रश्नों के अन्तर्गत विकल्प दिए गए हैं।
(iii) खण्ड 'ब' में दो विकल्प हैं। परीक्षार्थियों को केवल एक विकल्प के ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

SECTION-A

खण्ड-अ

1. Find the condition that the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ are in the ratio $m : n$.

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों में $m : n$ का अनुपात हो।

2. If 1, ω and ω^2 are the cube roots of unity, then prove that

$$(2 - \omega)(2 - \omega^2)(2 - \omega^{10})(2 - \omega^{11}) = 49$$

यदि 1, ω तथा ω^2 एक के घनमूल हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(2 - \omega)(2 - \omega^2)(2 - \omega^{10})(2 - \omega^{11}) = 49$$

3. If the m th term of an AP is $\frac{1}{n}$ and the n th term is $\frac{1}{m}$, then find its (mn) th term. 2

यदि किसी समान्तर श्रेणी का m वाँ पद $\frac{1}{n}$ तथा n वाँ पद $\frac{1}{m}$ हो, तो इसका (mn) वाँ पद ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

If the arithmetic mean between two numbers is 34 and their geometric mean is 16, then find the numbers.

यदि दो संख्याओं का समान्तर माध्य 34 और गुणोत्तर माध्य 16 हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

4. Show that the line passing through the points $A(5, 6)$ and $B(2, 3)$ is parallel to the line passing through the points $C(9, 2)$ and $D(6, 5)$. 2

दर्शाएँ कि बिन्दुओं $A(5, 6)$ तथा $B(2, 3)$ में से होकर जाने वाली रेखा, बिन्दुओं $C(9, 2)$ तथा $D(6, 5)$ में से होकर जाने वाली रेखा के समान्तर होगी।

5. If $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $B = \{5, 6, 7\}$, then find (i) $A \cap B$ and (ii) $B \cap A$. 2

यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ और $B = \{5, 6, 7\}$ हो, तो (i) $A \cap B$ और (ii) $B \cap A$ ज्ञात कीजिए।

6. Express the complex number $1 + i$ in the polar form. 2

सम्मिश्र संख्या $1 + i$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए।

7. If $f(x) = \sqrt{x-1}$ and $g(x) = x^2 - 2$, then find $f \circ g$ and $g \circ f$. 2

यदि $f(x) = \sqrt{x-1}$ तथा $g(x) = x^2 - 2$ हो, तो $f \circ g$ और $g \circ f$ ज्ञात कीजिए।

8. Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$$\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} = 2 \sec 2$$

9. In an examination, a question paper contains 12 questions divided into two parts, Part—I and Part—II. Part—I contains 5 questions and Part—II contains 7 questions. A student is required to attempt 8 questions in all selecting at least 3 questions from each part. In how many ways can a student select the questions?

एक परीक्षा के प्रश्न-पत्र में कुल 12 प्रश्न हैं, जिन्हें दो भागों, भाग—I तथा भाग—II में विभाजित किया गया है। भाग—I में 5 प्रश्न तथा भाग—II में 7 प्रश्न हैं। प्रत्येक भाग में से कम-से-कम 3 प्रश्न लेते हुए एक विद्यार्थी को कुल 8 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। कितनी विधियों से एक विद्यार्थी प्रश्नों को चुन सकता है?

Or / अथवा

How many words with or without meaning can be formed using all the letters of the word EQUATION at a time so that the vowels and consonants occur together?

शब्द EQUATION के सभी अक्षरों को इकट्ठे लेकर कितने भिन्न-भिन्न शब्द (उनका कोई अर्थ हो या कोई अर्थ न हो) बनाये जा सकते हैं जिससे सारे स्वर तथा सारे व्यंजन एकसाथ हों।

10. Find the 5th term from the end in the expansion of $\frac{x^3}{2} \frac{2}{x^2}^9$.

$\frac{x^3}{2} \frac{2}{x^2}^9$ के प्रसार में अन्त से 5वाँ पद ज्ञात कीजिए।

11. Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dx}{\sqrt{9 - 25x^2}}$$

Or / अथवा

Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{1/2} \cos^3 x \, dx$$

12. Find the mean and variance for the following distribution : 3

निम्न बंटन के लिए माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए :

Marks obtained : 15-25 25-35 35-45 45-55 55-65 65-75 75-85
प्राप्तंक

Number of students : 3 5 9 12 15 4 2
विद्यार्थियों की संख्या

Or / अथवा

If $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)^{\dots}}}$, then show that $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - y \log(\sin x)} y^2 \cot x$.

यदि $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)^{\dots}}}$, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - y \log(\sin x)} y^2 \cot x$.

13. Solve the following differential equation : 3

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} - y \cot x = \sin 2x$$

Or / अथवा

Solve the following differential equation :

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(x^2 - yx^2) \frac{dy}{dx} - y^2 = xy^2 - 0$$

14. Evaluate : 4

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 6x}$$

Or / अथवा

If $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$, then find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

15. In a single throw of two dice, find the probability that either a doublet or a total of 9 will appear.

दो पाँसे एक साथ फेंके गए। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि या तो दोनों पर एक जैसा अंक आएगा या दोनों अंकों का जोड़ 9 होगा।

16. Find the image of the point (3, 8) in the line $x - 3y = 7$.

रेखा $x - 3y = 7$ में बिन्दु (3, 8) के प्रतिबिम्ब के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

17. Solve the following linear programming problem graphically :

$$\text{Minimize } Z = x + 2y$$

subject to the constraints

$$2x + y \leq 3$$

$$x + 2y \leq 6$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$$\text{न्यूनतमीकरण } Z = x + 2y$$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$2x + y \leq 3$$

$$x + 2y \leq 6$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

18. Find the interval in which the function $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 17$ is (a) increasing and (b) decreasing.

वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 17$ (क) वर्धमान है और (ख) ह्रासमान है।

Or / अथवा

Prove that the curves $x = y^2$ and $xy = k$ cut at right angles, if $8k^2 = 1$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = y^2$ तथा $xy = k$ एक-दूसरे को समकोण पर काटेंगे, यदि $8k^2 = 1$ हो।

19. Find the equation of the circle passing through the points (1, 3), (5, 3) and (1, -2).

बिन्दुओं (1, 3), (5, 3) और (1, -2) में से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

20. Find the sum of the series $2.3.5 + 3.5.7 + 4.7.9 + \dots$ to n terms.

श्रेणी $2.3.5 + 3.5.7 + 4.7.9 + \dots$ के n पदों तक का योगफल ज्ञात कीजिए।

21. If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, then verify that $A^2 = 4A - 5I + O$, where I is a unit matrix

of order 3×3 and O is a zero matrix of order 3×3 .

यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $A^2 = 4A - 5I + O$, जबकि I , क्रम 3×3 का

एकक आव्यूह तथा O , क्रम 3×3 का शून्य आव्यूह हो।

Or / अथवा

Solve the following equation :

निम्न समीकरण को हल कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 3x & 8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x & 8 \end{vmatrix} = 0$$

22. In any $\triangle ABC$, prove that
 किसी $\triangle ABC$ में सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A = \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B = \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0$$

23. Evaluate $\int_1^4 (x^2 - x) dx$ as limit of sum.

$\int_1^4 (x^2 - x) dx$ का मान योग की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Find the area of the region included between the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$, where $a > 0$.

परवल्यों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$, जबकि $a > 0$, के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

24. Find the local maximum and local minimum values of the function
 $f(x) = \sin 2x - x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

फलन $f(x) = \sin 2x - x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

SECTION-B**खण्ड-ब****OPTION-I****विकल्प-I****(Vectors and 3-D Geometry)****(सदिश तथा त्रि-आयाम ज्यामिति)**

25. Find the angle between the vectors $\vec{a} = i \hat{j} \hat{k}$ and $\vec{b} = i \hat{j} \hat{k}$. 2

सदिशों $\vec{a} = i \hat{j} \hat{k}$ तथा $\vec{b} = i \hat{j} \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

26. Find a unit vector in the direction of $2\vec{a} + 3\vec{b}$, where $\vec{a} = i + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 3i + 2\hat{j} + \hat{k}$. 3

$2\vec{a} + 3\vec{b}$ की दिशा में एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{a} = i + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3i + 2\hat{j} + \hat{k}$ है।

27. Find the equation of the plane passing through the point (1, 1, 2) and perpendicular to each of the planes $2x + 3y + 3z = 2$ and $5x + 4y + z = 6$. 4

बिन्दु (1, 1, 2) से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो समतलों $2x + 3y + 3z = 2$ तथा $5x + 4y + z = 6$ में से प्रत्येक पर लम्ब हो।

Or / अथवा

Prove that the following lines are coplanar :

सिद्ध कीजिए कि निम्न रेखाएँ समतलीय हैं :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{7}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{7}$$

28. Find the equation of the sphere for which the circle given by $x^2 + y^2 + z^2 + 7y + 2z = 2$ and $2x + 3y + 4z = 8$ is a great circle. 6

ऐसे गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 + 7y + 2z = 2$ तथा $2x + 3y + 4z = 8$ वाला वृत्त गोले का वृहत् वृत्त है।

(**Mathematics for Commerce, Economics and Business**)

(वाणिज्य, अर्थशास्त्र तथा व्यवसाय के लिए गणित)

25. The marginal cost (MC) of a product is given to be a constant multiple of number of units x produced. Find the total cost function, if the fixed cost is Rs 5,000 and the cost of producing 50 units is Rs 5,625.

यह दिया है कि किसी उत्पाद की सीमांत लागत (MC), उत्पादित इकाइयों की संख्या x का स्थिर गुणांक है। यदि स्थिर लागत 5,000 रु० तथा 50 इकाइयों की उत्पादन लागत 5,625 रु० हो, तो कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए।

26. The demand function for a manufacturer's product is $x = 70 - 5p$, where x is the number of units produced and p is the price per unit. At what value of x will there be maximum revenue? What is that maximum revenue?

एक निर्माता के एक उत्पादन का माँग फलन $x = 70 - 5p$ है, जब x उत्पादित इकाइयों की संख्या तथा p प्रति इकाई मूल्य है। x के किस मान पर अधिकतम आय होगी? वह अधिकतम आय कितनी है?

27. M/s Harsha Enterprises produces 50 kg of wafers per day by using inputs of Rs 750. The company adds a value of Rs 10 per kg. If the excise duty is 16%, calculate the total excise duty paid at the end of month of September with 5 weekly off-days using the Cenvat transaction method.

मैसर्स हर्ष उद्यम प्रतिदिन 50 कि० ग्रा० वेफर (चिप्स) बनाती है जिनमें 750 रु० लगते हैं। कम्पनी 10 रु० प्रति किलोग्राम वृद्धि करती है। यदि उत्पाद शुल्क 16% हो, तो सितम्बर मास के अन्त में देय कुल उत्पाद शुल्क की गणना कीजिए, यदि मास में 5 दिन साप्ताहिक छुट्टी रही हो। सैनवाट सौदे की विधि का प्रयोग कीजिए।

Or / अथवा

Calculate the annual premium for an endowment policy of Rs 75,000 taken at the age of 25 years for a term of 20 years, assuming the following :

Tabular annual premium—Rs 50-80/Rs 1,000

Rebate for mode of payment—3%

Rebate for large sum assured—Rs 2/Rs 1,000

25 वर्ष की आयु में 20 वर्ष के लिए ली गई 75,000 रु० की धन-समर्पण (एन्डोमेंट) बीमा पॉलिसी के लिए वार्षिक प्रीमियम की गणना कीजिए। निम्न शर्तें दी गई हैं :

सारणी वार्षिक प्रीमियम—50·80 रु०/1,000 रु०

भुगतान विधि पर छूट—3%

बड़ी बीमा राशि के लिए छूट—2 रु०/1,000 रु०

- 28.** A person invested Rs 26,000 partly in 3% at 81 and partly in 4% at par. If the income derived from each is the same, find his investment in each. 6

एक व्यक्ति ने 26,000 रु० का कुछ भाग 81 पर 3% में तथा शेष सममूल्य पर 4% में निवेश किया। यदि दोनों निवेशों से उसे एकसमान आय हुई हो, तो उसका प्रत्येक में निवेश ज्ञात कीजिए।

★ ★ ★