পাঠ-7

সমান্তৰ প্ৰগতি
(Arithmetic Progression)

দৈনন্দিন জীৱনত প্ৰাকৃতিক বস্তু কিছুমান লক্ষ্য কৰিছা যিবোৰে এক নিৰ্দিষ্ট চানেকী মানি চলে। ফুল এপাহৰ পাহি, মৌ-বাহৰ কোঠালীবোৰ, আনাৰসৰ বাকলিৰ পাকবোৰ আদিত এনে চানেকী দেখা যায়। এই পাঠটোত তোমালোকে কিছুমান সংখ্যাৰ এটা বিশেষ ধৰণৰ চানেকী অধ্যয়ন কৰিব পাৰিবা আৰু ইয়াক সমান্তৰ প্ৰগতি বুলি কোৱা হ'ব। লগতে তোমালোকে সমান্তৰ প্ৰগতিৰ সাধাৰণ পদ আৰু প্ৰথম n সংখ্যক পদৰ সমষ্টি উলিওৱাটো শিকিব পাৰিবা।

উদ্দেশ্য (Objectives)

পাঠটি পঢ়ি জানিব পাৰিবা

- সংখ্যাৰ তালিকাৰ পৰা সমান্তৰ প্ৰগতি চিনাক্ত কৰণ;
- এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ সাধাৰণ পদ নিৰ্ণয়;
- এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম n সংখ্যক পদৰ সমষ্টি নিৰ্ণয়।

আৱশ্যকীয় প্ৰাৰম্ভিক জ্ঞান (Previous Background Knowledge)

- সংখ্যা প্ৰণালীৰ ধাৰণা।
- সংখ্যা প্ৰণালীৰ প্ৰক্ৰিয়াবোৰ।

7.1. কিছুমান সংখ্যাৰ ক্ৰম (Some Number Patterns)

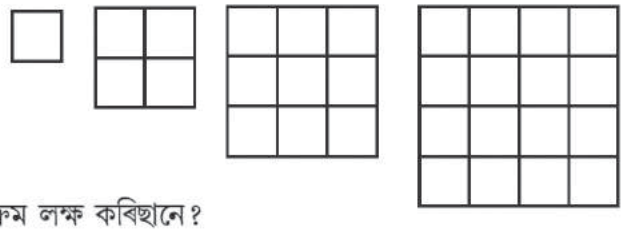
কেইটামান উদাহৰণ লোৱা হওক ঃ

(i) ৰীতাই এটা বেংকত শতকৰা বছৰি 10 টকা সুতত 1000 টকা জমা থয়। প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ বছৰৰ শেষত টকাটো ক্ৰমে 1100, 1200, 1300 আৰু 1400 টকা হয়।

তোমালোকে ওপৰৰ সংখ্যাকেইটাত কিবা ক্ৰম লক্ষ কৰিছানে? তোমালোকে নিশ্চয় প্ৰত্যেক বছৰে নিৰ্দ্দিষ্ট পৰিমাণৰ 100 টকা বৃদ্ধি হোৱাটো দেখিছা।

(ii) 1, 2, 3, 4,.....একক বাহুবোৰৰ বৰ্গৰ ভিতৰত একক বৰ্গবোৰৰ সংখ্যা ক্ৰমে

1, 4, 9, 16,.....



এই সংখ্যাবোৰৰ তালিকাত কিবা ক্ৰম লক্ষ কৰিছানে?

তোমালোকে পৰ্যবেক্ষণ কৰা যে

$1 = 1^2,\ 4 = 2^2,\ 9 = 3^2,\ 16 = 4^2,$.....

অৰ্থাৎ এইবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গ।

তলত কিছুমান সংখ্যাৰ তালিকা দিয়া হ'ল, যদি সম্ভৱ ইয়াৰ ক্ৰম চিনাক্ত কৰাৰ চেষ্টা কৰা ঃ

1, 3, 5, 7, 9	(1)
2, 4, 6, 8, 10	(2)
1, 4, 7, 10, 13	(3)
5, 3, 1, –1, –3	(4)
1, 3, 9, 27, 81	(5)
2, 3, 5, 7, 11, 13	(6)

তোমালোকে পৰ্যবেক্ষণ কৰি দেখিছা যে (1)নং তালিকাত থকা সংখ্যাবোৰ অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যা। প্ৰথম পদটো 1, দ্বিতীয় পদটো 3, তৃতীয় পদটো 5 ইত্যাদি। এই সকলোবোৰ পদেই এটা ক্ৰমত আছে। ক্ৰমটো এনেকুৱা যে প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে বাকী সকলোবোৰ পদ তাৰ পূৰ্বৰ পদটোৰ লগত 2 যোগ কৰি পোৱা যায়।

তালিকা (2), (3) আৰু (4)ত প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে বাকী আটাইবোৰ পদ তাৰ পূৰ্বৰ পদটোৰ লগত ক্ৰমে 2, 3 আৰু –2 যোগ কৰি পোৱা যায়।

তালিকা (5) ত প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে বাকী আটাইবোৰ পদে তাৰ পূৰ্বৰ পদটোক 3 ৰে পূৰণ কৰি পোৱা যায়। তালিকা (6)ত তোমালোকে দেখিছা যে এইখন মৌলিক সংখ্যাৰ তালিকা আৰু আজিলৈকে ইয়াৰ কোনো নিয়ম নাই যি নিয়মৰ সহায়ত ইয়াৰ পিছৰ মৌলিক সংখ্যাটো পোৱা যায়।

এখন তালিকাত থকা সংখ্যবোৰক সাধাৰণতে

a_1, a_2, a_3.....,a_n,.....

বা t_1, t_2, t_3,.....,t_n,..... ৰে সূচোৱা হয়।

যাক ক্ৰমে প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় আৰু nতম পদ বোলা হয়। আমি মাজে সময়ে এই তালিকাবোৰৰ প্ৰত্যেককে অনুক্ৰম নাইবা সংখ্যাৰ চানেকী বুলি কওঁ।

7.2 সমান্তৰ প্ৰগতি (Arithmetic Progression)

ইতিমধ্যে তোমালোকে বিভিন্ন ধৰণৰ ক্ৰম দেখিবলৈ পাইছা। কিছুমান ক্ৰমে ক্ৰমত থকা পূৰ্বপদৰ ঠিক পিছত থকা পদটো পাবৰ বাবে নিৰ্দ্দিষ্ট গাণিতিক নিয়ম মানি চলে। এতিয়া তোমালোকে এটা বিশেষ ধৰণৰ সংখ্যাৰ ক্ৰম পঢ়িবলৈ পাবা। তলৰ ক্ৰমবিলাকলৈ মন কৰা ঃ

1, 3, 5, 7, 9, ... (1)

2, 4, 6, 8, 10, ... (2)

1, 4, 7, 10,13, ... (3)

পৰ্যবেক্ষণ কৰি দেখা যায় যে (1) আৰু (2)ৰ প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে বাকী আটাইবোৰ পদ তাৰ পূৰ্বৰ পদটোৰ লগত 2 যোগ কৰি পোৱা যায়। (3) ৰ প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে বাকী আটাইবোৰ পদ তাৰ পূৰ্বৰ পদৰ লগত 3 যোগ কৰি পোৱা যায়। ক্ৰম এটাত থকা সংখ্যাবোৰক ক্ৰমটোৰ পদ বুলি কোৱা হয়। ইতিমধ্যে বৰ্ণনা কৰা ক্ৰমবোৰ ঃ

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n, \ldots\ldots\ldots$

বা $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots\ldots, t_n, \ldots\ldots\ldots$

ইয়াত আখৰবোৰৰ তলত থকা সংখ্যাবোৰে ক্ৰমটোৰ পদৰ স্থানক সূচায়। সেয়েহে, a_n বা t_n এ ক্ৰমটোৰ n-তম পদক সূচায়।

এটা বিশেষ ধৰণৰ ক্ৰম যাক প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে বাকী আটাইবোৰ পদ তাৰ পূৰ্ব পদৰ লগত এটা স্থিৰ সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) যোগ কৰি পোৱা যায় তাকে সমান্তৰ প্ৰগতি বোলে। ইয়াৰ প্ৰথম পদটোক সাধাৰণতে 'a' ৰে আৰু সাধাৰণ অন্তৰক 'd' ৰে সূচোৱা হয়। সেয়েহে, আদৰ্শ আকাৰৰ এটা সমান্তৰ প্ৰগতি হ'ব ঃ

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\ldots\ldots$

উদাহৰণ 7.1 ঃ তলত দিয়া সংখ্যাৰ তালিকাৰ পৰা, কোনবোৰ সমান্তৰ প্ৰগতি বাছি উলিওৱা। সমান্তৰ প্ৰগতিৰ ক্ষেত্ৰত সিঁহতৰ প্ৰথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(i) 2, 7, 12, 17, 22,.....

(ii) 4, 0, –4, –8, –12,.....

(iii) 3, 7, 12, 18, 25,.....

(iv) 2, 6, 18, 54, 162,.....

সমাধান ঃ

(i) এইটো এটা সমান্তৰ প্ৰগতি।

যিহেতু $7-2=5,\ 12-7=5,\ 17-12=5$ আৰু $22-17=5$

সেয়েহে প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে বাকী পদবোৰ তাৰ পূৰ্ব পদৰ লগত 5 যোগ কৰি পোৱা যায়।

সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম পদ $a=2$ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ $d=5$

(ii) পৰ্যবেক্ষণ কৰি পাও যে—

$0-4=-4,\ -4-0=-4,\ -8-(-4)=-4,\ -12-(-8)=-4$

গতিকে এইটো এটা সমান্তৰ প্ৰগতি। ইয়াৰ প্ৰথম পদ $a = 4$ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ $d = -4$

(iii) ইয়াত তালিকাখন হ'ল

3, 7, 12, 18, 25,.....

দেখা যায়

$7-3=4, 12-7=5, 18-12=6, 25-18=7$

যিহেতু দুটা ক্ৰমিক পদৰ বিয়োগফল একে নহয়। গতিকে এইটো সমান্তৰ প্ৰগতি নহয়।

(iv) ইয়াত তালিকাখন হ'ল

2, 6, 18, 54, 162,.....

যিহেতু $6-2=4, 18-6=12,.....$

ইয়াত দুটা ক্ৰমিক পদৰ বিয়োগফল একে নহয়। গতিকে এইটো সমান্তৰ প্ৰগতি নহয়।

অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান 7.1 (Check Your Progress)

তলৰ কোনবোৰ সমান্তৰ প্ৰগতি? যদি সিহঁত সমান্তৰ প্ৰগতিত থাকে, সিহঁতৰ প্ৰথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

1. –5, –1, 3, 7, 11,.....
2. 6, 7, 8, 9, 10, ...
3. 1, 4, 6, 7, 6, 4,.....
4. –6, –3, 0, 3, 6, 9,.....

7.3. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ সাধাৰণ পদ বা n- তম পদ (General (nth) Term of AN AP)

ধৰা হ'ল এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ 'a' আৰু সাধাৰণ অন্তৰ 'd' আৰু সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ পদবোৰক $t_1, t_2, t_3,.....t_n$ ৰে সূচোৱা হ'ল, য'ত t_n এ সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ n-তম পদক সূচায়। যিহেতু প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম পদ a, দ্বিতীয় পদটো 'a' ৰ লগত d যোগ কৰি পোৱা যাব, গতিকে দ্বিতীয় পদটো হ'ব $a+d$, এইদৰে তৃতীয় পদটো হ'ব $a+2d$ ইত্যাদি।

সাধাৰণতে এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ 'a' আৰু সাধাৰণ অন্তৰ 'd' হ'লে প্ৰগতিটোৰ পদবোৰ হ'ব ঃ $a, a+d, a+2d, a+3d,.....$

ইয়াত

প্ৰথম পদ $t_1 = a \quad = a+(1-1)d$

দ্বিতীয় পদ $t_2 = a+d \quad = a+(2-1)d$

তৃতীয় পদ $t_3 = a+2d \quad = a+(3-1)d.$

চতুৰ্থ পদ $t_4 = a+3d \quad = a+(4-1)d$

ওপৰৰ ক্ৰমটো পৰ্যবেক্ষণ কৰি পাওঁ যে, ক্ৰমটোৰ প্ৰত্যেক পদ $= a + (\text{পদৰ সংখ্যা} - 1)\ d.$

এতিয়া দশম পদটো কি হ'ব?

$$t_{10} = a + (10-1)d = a + 9d.$$

এতিয়া তোমালোকে ক'ব পাৰানে "n-তম বা সাধাৰণ পদটো কি হ'ব?"

স্পষ্টত ঃ $t_n = a + (n-1)d.$

উদাহৰণ 7.2 ঃ তলৰ সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ 15তম আৰু n-তম পদ নিৰ্ণয় কৰা।

16, 11, 6, 1, –4, –9,.....

সমাধান ঃ ইয়াত $a = 16;\ d = 11 - 16 = -5$

$$\therefore\ t_{15} = a + (15-1)d = a + 14d = 16 + 14(-5) = 16 - 70 = -54$$

আকৌ $t_n = a + (n-1)d.$

$= 16 + (n-1)\ (-5) \quad = 16 - 5n + 5$

$= 21 - 5n.$

$\therefore$ 15তম পদ $t_{15} = -54$

আৰু nতম পদ $t_n = 21 - 5n.$

উদাহৰণ 7.3 ঃ এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ –3 আৰু 12 তম পদ 41 হ'লে; সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম পদ $= a$ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ $= d$

গতিকে $t_{12} = a + (12-1)d = 41$

বা $-3 + 11d = 41 \qquad (\because a = -3)$

বা $11d = 44$

বা $d = 4$

$\therefore$ সাধাৰণ অন্তৰ 4.

উদাহৰণ 7.4 ঃ এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ সাধাৰণ অন্তৰ 5 আৰু 10 তম পদটো 43; প্ৰথম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ এতিয়া $t_{10} = a + (10-1)d$

$\Rightarrow 43 = a + 9 \times 5$

$\Rightarrow 43 = a + 45$

$\Rightarrow a = -2$

$\therefore$ সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম পদ –2.

উদাহৰণ 7.5 ঃ এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ –2 আৰু 11 তম পদ 18 হ'লে 15 তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ 15তম পদ উলিয়াবলৈ আমি প্ৰগতিটোৰ সাধাৰণ অন্তৰ d উলিয়াব লাগিব।

এতিয়া $t_{11} = a + (11-1)d$

$\Rightarrow 18 = -2 + 10d$

$\Rightarrow 20 = 10d$

$\Rightarrow d = 2$

আকৌ, $t_{15} = a + 14d$

$= -2 + 14 \times 2$

$= -2 + 28$

$= 26$

$\therefore$ 15তম পদ = 26.

উদাহৰণ 7.6 ঃ কোনো এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ p তম পদৰ p গুণ, q তম পদৰ q গুণৰ সমান হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে ইয়াৰ $p+q$ তম পদটো শূন্য; যদিহে $p \neq q$.

সমাধান ঃ ইয়াত $t_p = a + (p-1)d$

$t_q = a + (q-1)d$

যিহেতু

$pt_p = q.t_q$

গতিকে $p[a + (p-1)d] = q[a + (q-1)d]$

$\Rightarrow pa + p(p-1)d = qa + q(q-1)d$

$\Rightarrow \mathrm{pa} + \mathrm{p(p-1)d} - \mathrm{qa} - \mathrm{q(q-1)d} = 0$

$\Rightarrow (p-q)a + (p^2 - q^2)d - pd + qd = 0$

$\Rightarrow (p-q)a + (p-q)\,(p+q)d - (p-q)d = 0$

$\Rightarrow (p-q)\,[a + (p+q)d - d] = 0$

$\Rightarrow a + (p+q)d - d = 0 \quad [\because p - q \neq 0]$

$\Rightarrow \mathrm{a} + (\mathrm{p+q-1})\mathrm{d} = 0$

$\Rightarrow t_{p+q} = 0$

অৰ্থাৎ $p+q$ তম পদটো শূন্য।

অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান 7.2 (Check Your Progress)

1. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ 4 আৰু সাধাৰণ অন্তৰ –3 হ'লে, 12তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা।
2. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ 2 আৰু 9 তম পদ 26 হ'লে, ইয়াৰ সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।
3. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ 12 তম পদ –28 আৰু 18 তম পদ –46 হ'লে, ইয়াৰ প্ৰথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।
4. 5, 2, –1,..... সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কোনটো পদ –22?
5. যদি এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ p তম, q তম আৰু r তম পদবোৰ ক্ৰমে x, y আৰু z হয় তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x(q-r)+y(r-p)+z(p-q)=0$$

7.4 এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম n-সংখ্যক পদৰ যোগফল (Sum of First n Terms of an AP)

জাৰ্মানৰ বিখ্যাত গণিতজ্ঞ কাৰ্ল ফেড্ৰিক্ গচে প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত পঢ়ি থাকোতে এদিন তেওঁৰ শিক্ষকে শ্ৰেণীত ছাত্ৰবিলাকক প্ৰথম 100 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল কি হ'ব সুধিছিল। শ্ৰেণীৰ বাকী ছাত্ৰবোৰে নানাধৰণে চেষ্টা কৰি থাকোতে গচে নিমিষতে উত্তৰটো কৈ দিলে। গচে উত্তৰটো বাৰু কেনেকৈ পালে? সম্ভৱতঃ তেওঁ তলত দিয়া ধৰণে কৰিছিল।

$$S=1+2+3+.....+99+100 .....(1)$$

সংখ্যাবোৰ বিপৰীত ক্ৰমত লিখিলে

$$S=100+99+98+.....+2+1.....(2)$$

(1) আৰু (2)ক পদে-পদে যোগ কৰি পাওঁ,

$$2S=101+101+101+.....+101+101 \text{ (100 টা পদ লৈ)}$$

$$=101\times100$$

বা $$S=\frac{101\times100}{2}=5050$$

এতিয়া, আমি এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম n-টা পদৰ যোগফল উলিয়াবলৈ এই নিয়মটো ব্যৱহাৰ কৰিম। এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম n-সংখ্যক পদবোৰ

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,.....,a+(n-2)d,\ a+(n-1)d$$

ধৰা হ'ল প্ৰথম n-সংখ্যক পদৰ যোগফল S_n, গতিকে

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+.....+\{a+(n-a)d\}+\{a+(n-1)d\} \quad \rightarrow (3)$$

পদবোৰ বিপৰীত ক্ৰমত লিখিলে হ'ব,

$$S_n=\{a+(n-1)d\}+\{a+(n-2)d\}+.....+(a+d)+a \quad \rightarrow (4)$$

(3) আৰু (4)ক পদে পদে যোগ কৰি পাওঁ,

$2S_n = \{2a+(n-1)d\} + \{2a+(n-1)d\} + ... + \{2a+(n-1)d\} + \{2a+(n-1)d\}$ [n-বাৰ]

বা $2S_n = n\{2a+(n-1)d\}$

বা $S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

এইটোৱেই এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম n-সংখ্যক পদৰ যোগফল উলিওৱা সাধাৰণ সূত্ৰ। ওপৰৰ সূত্ৰটো তলত দিয়াধৰণে লিখিব পাৰি,

$$S_n = \frac{n}{2}[a+\{a+(n-1)d\}]$$

$$= \frac{n}{2}(a+t_n); \qquad [\text{যিহেতু } n\text{তম পদ } t_n = a+(n-1)d]$$

মাজে সময়ে, nতম পদটো তাৰ শেষ পদ lৰে সূচোৱা হয়। সেয়েহে

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

উদাহৰণ 7.7 ঃ তলৰ সমান্তৰ প্ৰগতিবোৰৰ প্ৰথম 12 টা পদৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা।

(i) 11, 16, 21, 26,.....

(ii) –151, –148, –145, –142,.....

সমাধান ঃ (i) দিয়া আছে, সমান্তৰ প্ৰগতিটো

11, 16, 21, 26, ...

ইয়াত $a = 11$, $d = 16-11 = 5$ আৰু $n = 12$.

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

$$\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}\{2\times 11+(12-1)\times 5\} = 6\{22+55\} = 6\times 77 = 462$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় যোগফল 462.

(ii) দিয়া সমান্তৰ প্ৰগতিটো হ'ল

–151, –148, –145, –142,.....

ইয়াত $a = -151$, $d = -148-(-151) = 3$ আৰু $n = 12$.

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \qquad \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}\{2\times(-151)+(12-1)\times 3\}$$

$$= 6\{-302+33\} \qquad = 6\times(-269) \qquad = -1614$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় যোগফল –1614.

উদাহৰণ 7.8 ঃ

2, 4, 6, 8, 10,..... সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ যোগফল 210 হ'বলৈ কিমানটা পদৰ আৱশ্যক হ'ব?

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ

$a = 2, d = 2$ আৰু $S_n = 210$

এতেকে $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$\Rightarrow 210 = \frac{n}{2}\{2 \times 2 + (n-1) \times 2\}$

$\Rightarrow 420 = n(2n+2)$

$\Rightarrow 2n^2 + 2n - 420 = 0$

$\Rightarrow n^2 + n - 210 = 0$

$\Rightarrow n^2 + 15n - 14n - 210 = 0$

$\Rightarrow n(n+15) - 14(n+15) = 0$

$\Rightarrow (n+15)(n-14) = 0$

$\Rightarrow n = -15$ বা $n = 14$

যিহেতু n ঋনাত্মক হ'ব নোৱাৰে, গতিকে $n = 14$.

$\therefore$ নিৰ্ণেয় পদৰ সংখ্যা 14.

উদাহৰণ 7.9 ঃ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59$

সমাধান ঃ ইয়াত 2, 5, 8, 11,.....এটা সমান্তৰ প্ৰগতি।

$a = 2, d = 3, t_n = 59$

এতিয়া, $t_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow 59 = 2 + (n-1) \times 3$

$\Rightarrow 59 = 3n - 1$

$\Rightarrow 3n = 60$

$\Rightarrow n = 20$

আকৌ, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$\Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 2 + (20-1) \times 3\}$

$= 10(4+57) \quad = 10 \times 61 \quad = 610$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় যোগফল 610.

উদাহৰণ 7.10 ঃ 1 আৰু 1000ৰ মাজৰ 7ৰে বিভাজ্য সকলোবোৰৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত 1 আৰু 1000ৰ মাজৰ 7 ৰে বিভাজ্য প্ৰথম সংখ্যা 7 আৰু শেষ সংখ্যা 994. সেয়েহে সমান্তৰ প্ৰগতিটো হ'ব ঃ 7, 14, 21,.....994.

ইয়াত $a = 7, d = 7, t_n = 994$ বা শেষপদ $l = 994$.

এতিয়া, $t_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow 994 = 7 + (n-1) \times 7$

$\Rightarrow 994 = 7n$

$\Rightarrow n = 142$

আকৌ $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$

$\Rightarrow S_n = \frac{142}{2}(7+994)$

$= 71 \times 1001$

$= 71071$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় যোগফল 71071.

উদাহৰণ 7.11 ঃ এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম তিনিটা পদৰ যোগফল 36 আৰু সিহঁতৰ গুণফল 1620 হ'লে, সমান্তৰ প্ৰগতিটো নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম তিনিটা পদ $a-d, a$ আৰু $a+d$

প্ৰশ্নমতে,

$a - d + a + a + d = 36$

$\Rightarrow 3a = 36$

$\Rightarrow a = 12$

আকৌ $(a-d)a(a+d) = 1620$

$\Rightarrow (12-d)12\,(12+d) = 1620$

$\Rightarrow 12^2 - d^2 = 135$

$\Rightarrow 144 - d^2 = 135$

$\Rightarrow d^2 = 9 \qquad \therefore d = 3$ বা -3.

যদি $d = 3$, সংখ্যা তিনিটা হ'ব ঃ $12-3$, 12 আৰু $12 + 3$ অৰ্থাৎ 9, 12, 15

যদি $d = -3$, সংখ্যা তিনিটা হ'ব ঃ $12-(-3)$, 12 আৰু $12-3$ অৰ্থাৎ 15, 12, 9.

গতিকে, সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম তিনিটা পদ 9, 12, 15 নাইবা 15, 12, 9এ দিয়া চৰ্তবোৰ সিদ্ধ কৰে।

অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান 7.3 (Check Your Progress)

1. তলৰ সমান্তৰ প্ৰগতিবোৰৰ প্ৰথম 15 টা পদৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা ঃ

   (i) 11, 6, 1, –4, –9,.....

   (ii) 7, 12, 17, 22, 27,.....

2. 25, 28, 31, 34,..... সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কিমানটা পদৰ যোগফল 1070?

3. যোগফল নিৰ্ণয় কৰা ঃ

   $1+4+7+10+.....+118$

4. 100 লৈ 3 ৰে বিভাজ্য সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা।

5. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক পদৰ যোগফল 21 আৰু সিহঁতৰ গুণফল 231 হ'লে, প্ৰগতিটোৰ পদ তিনিটা নিৰ্ণয় কৰা।

6. l, a, n, d আৰু S_nৰ ভিতৰত তলৰ প্ৰত্যেকটো সমান্তৰ প্ৰগতিৰ যিটো নাই সেইটো নিৰ্ণয় কৰা।

   (i) $a=-2,\ d=5,\ S_n=568$ (ii) $l=8,\ n=8,\ S_8=-20$

   (iii) $a=-3030,\ l=-1530,\ n=5$ (iv) $d=\frac{2}{3},\ l=10,\ n=20$

তুমি কি শিকিলা (Let Us Sum Up)

- এটা প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে তাৰ পূৰ্বৰ প্ৰত্যেক পদৰ লগত এটা ধ্ৰুৱক সংখ্যা যোগ কৰি পোৱা প্ৰগতিটোক সমান্তৰ প্ৰগতি বোলে।
- এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদটোক 'a' ৰে আৰু সাধাৰণ অন্তৰটোক 'd' ৰে সূচোৱা হয়।
- এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ n-সংখ্যক পদৰ যোগফল $S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$
- এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ 'a', শেষপদ 'l' আৰু পদৰ সংখ্যা n হ'লে প্ৰগতিটোৰ সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$

পাঠ সমাপ্তি অনুশীলনী (Answers to Terminal Exercise)

1. তলৰ কোনবোৰ ক্ৰম সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে?

   (i) 2, 5, 8, 12, 15,.....

   (ii) –3, 0, 3, 6, 9,.....

   (iii) 1, 2, 4, 8, 16,.....

2. তলৰ সমান্তৰ প্ৰগতিবোৰৰ nতম পদটো লিখা ঃ

   (i) 5, 9, 13, 17,.....

   (ii) –7, –11, –15, –19,.....

3. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ চতুৰ্থ পদটো ইয়াৰ প্ৰথম পদটোৰ তিনিগুণৰ সমান আৰু সপ্তম পদটো তৃতীয় পদৰ দুগুণকৈ এক বেছি। প্ৰথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

4. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ 5 তম পদটো 23 আৰু 12 তম পদটো 37; প্ৰথমপদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

5. এটা ত্ৰিভুজৰ কোণকেইটা সমান্তৰ প্ৰগতিত তাকে। যদি সৰু কোণটো ডাঙৰ কোণটোৰ $\frac{1}{3}$ হয়, তেনেহ'লে ত্ৰিভুজটোৰ কোণকেইটা নিৰ্ণয় কৰা।

6. তলত দিয়া সমান্তৰ প্ৰগতিবোৰৰ কোনটো পদ

   (i) 100, 95, 90, 85,.....; –25 হয়?

   (ii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \ldots\ldots; \frac{25}{4}$ হয়?

7. এটা অনুক্ৰমৰ n তম পদ $t_n = a + bn$। দেখুওৱা যে এইটো এটা সমান্তৰ প্ৰগতি। এই সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

8. যদি এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ 7 তম পদটোৰ 7 গুণ তাৰ 11তম পদটোৰ 11গুণৰ সমান হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে 18 তম পদটো শূন্য।

9. এটা সমান্তৰ প্ৰগতি যাৰ প্ৰথম পদ 'a' আৰু সাধাৰণ অন্তৰ 'd' তাৰ প্ৰত্যেকটো পদ দুগুণ কৰি পোৱা ক্ৰমটো সমান্তৰ প্ৰগতিত থাকিবনে? যদি থাকে, ইয়াৰ প্ৰথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ নিৰ্ণয় কৰা।

10. যদি $k+2, 4k-6$ আৰু $3k-2$ এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ তিনিটা ক্ৰমিক পদ হয়, তেন্তে kৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

11. (i) 1, 4, 7, 10,.....সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কিমানটা পদৰ যোগফল 715?

    (ii) –10, –7, –4, –1,.....সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কিমানটা পদৰ যোগফল 104?

12. প্ৰথম 100 অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা।

13. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ $a = 2$ আৰু প্ৰথম পাঁচটা পদৰ যোগফল তাৰ পিছৰ পাঁচটা পদৰ যোগফলৰ $\frac{1}{4}$; দেখুওৱা যে ইয়াৰ 20 তম পদটো –12.

    [ইংগিত ঃ যদি সমান্তৰ প্ৰগতিটো $a, a+d, a+2d,.....$ তেতিয়া $S_n = \frac{5}{2}\{a+(a+4d)\}$ পিছৰ পাঁচটা পদবোৰৰ প্ৰথম পদ $a+5d$ আৰু শেষৰ পদ $a+9d$]

14. যদি এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম n টা পদৰ যোগফল $2n+3n^2$; তেনেহ'লে সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ r তম পদটো নিৰ্ণয় কৰা। [ইংগিত ঃ $t_r = S_r - S_{r-1}$]

15. 4 ৰে ভাগ কৰিলে 1 বাকী থকা সকলোবোৰ তিনি অংকীয়া সংখ্যাৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা। [ইংগিত ঃ প্ৰথম পদ = 101, শেষ পদ = 997]

পাঠৰ অন্তৰ্গত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰ (Answers to Check Your Progress)

7.1

1. $a = -5, d = 4$
2. $a = 6, d = 1$
3. সমান্তৰ প্ৰগতি নহয়।
4. $a = -6, d = 3$

7.2

1. –29 2. 3 3. 5, –3 4. 10 তম পদ।

7.3

1. (i) –360, (ii) 630
2. 20
3. 2380
4. 1689
5. 3, 7, 11 বা 11, 7, 3

6. (i) $n = 6, l = 73$ (ii) $a = -3, d = 3$

(iii) $d = 375, S_n = -11400$

(iv) $a = -\frac{3}{8}, S_n = \frac{220}{3}$

পাঠৰ অন্তৰ্গত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰ (Answers to Check Your Progress)

1. (ii)
2. (i) $t_n = 4n + 1$ (ii) $t_n = -4n - 3$
3. 3, 2
4. 15, 2
5. $30^0, 60^0, 90^0$
6. (i) 26 তম পদ (ii) 25 তম পদ
7. $a + b, b$
9. হয়, প্ৰথম পদ = $2a$, সাধাৰণ অন্তৰ = $2d$.
10. 3
11. (i) পদৰ সংখ্যা = 11 (ii) পদৰ সংখ্যা = 13
12. 10,000
14. $6r - 1$
15. 123525.

মাধ্যমিক পাঠ্যক্ৰম

গণিত

অভ্যাস কাৰ্য - বীজগণিত

সৰ্বোচ্চ নম্বৰ ঃ 25 **সময় ঃ 45 মিনিট**

নিয়মাবলী ঃ

1. সকলো প্ৰশ্নৰ উত্তৰ বেলেগ কাগজত কৰিবা।
2. উত্তৰ পত্ৰত তলৰ তথ্যসমূহ লিখিবা ঃ

নাম

ক্ৰমিক নম্বৰ

বিষয়

অভ্যাস কাৰ্যৰ বিষয়

ঠিকনা

3. তোমাৰ অধ্যয়ন কেন্দ্ৰৰ বিষয় শিক্ষকৰ হতুৱাই তোমাৰ এই অভ্যাস কাৰ্য শুধৰাই ল'বা যাতে তোমাৰ অগ্ৰগতিৰ ইতিবাচক মতামত পোৱা।

তোমাৰ এই কাৰ্য **National Institute of Open School** লৈ নপঠিয়াবা।

1 নং প্ৰশ্নৰ পৰা 5 নং প্ৰশ্নলৈ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছা ঃ

1. যদি $(x-a)$, $x^6-ax^5+x^4-ax^3+3x-a+2$ ৰ এটা উৎপাদক হয়, তেন্তে a ৰ মান ঃ 1

(A) $a = 1$

(B) $a = -1$

(C) $a = 2$

(D) $a = -2$

2. $\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$ ৰ অন্যোন্যক (reciporcal) হ'ব 1

(A) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

(B) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$

(C) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$

(D) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

3. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ (A.P.) তিনিটা পদৰ সমষ্টি 15 আৰু সিহঁতৰ গুণফল 45 হ'লে, সংখ্যা তিনিটা ঃ 1

(A) 1, 3, 15

(B) 2, 4, 9

(C) 1, 5, 9

(D) 0, 5, 9

4. যদি $y = \frac{x-1}{x+1}$, তেতিয়া $2y - \frac{1}{2y}$ ৰ মান হ'ব ঃ 1

(A) $\frac{3x^2 - 10x - 3}{2(x^2 - 1)}$

(B) $\frac{3x^2 - 10x + 1}{x^2 - 1}$

(C) $\frac{3x^2 + 10x + 3}{2(x^2 - 1)}$

(D) $\frac{3x^2 - 10x + 3}{2(x^2 - 1)}$

5. $\dfrac{4x^2-25}{2x^2+11x-15}$ ৰাশিটোৰ লঘিষ্ঠ আকাৰ ঃ 1

(A) $\dfrac{2x-5}{x+3}$

(B) $\dfrac{2x+5}{x+3}$

(C) $\dfrac{2x-5}{x-3}$

(D) $\dfrac{2x+5}{x-3}$

6. X ৰ মান উলিওৱা যাতে $\left(\dfrac{7}{8}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{8}{7}\right)^{-11}=\left(\dfrac{7}{8}\right)^{x}$ 2

7. $\sqrt{3}$ আৰু $\sqrt{8}$ ৰ মাজৰ তিনিটা অপৰিমেয় সংখ্যা লিখা। 2

8. দুটা বহুপদ ৰাশিৰ H.C.F. (x-2) আৰু সিহঁতৰ L.C.M. $x4+2x^3-8x-16$; যদি এটা বহুপদ ৰাশি x^3-8 হয়, তেন্তে আনটো বহুপদ ৰাশি উলিওৱা। 2

9. এটা সংখ্যা আৰু তাৰ অন্যোন্যকৰ সমষ্টি $\dfrac{50}{7}$, সংখ্যাটো উলিওৱা। 2

10. এটা আয়তৰ দৈৰ্ঘ্য তাৰ প্ৰস্থৰ দুগুণতকৈ 5 ছেঃমিঃ কম। যদি পৰিসীমা 110 ছেঃমিঃ হয়; আয়তটোৰ কালি উলিওৱা। 2

11. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ a, দ্বিতীয় পদ b আৰু শেষ পদ c; দেখুওৱা যে সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ সমষ্টি $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ 4

12. অজয়ে 30 নম্বৰৰ পৰীক্ষাত যদি 10 নম্বৰ বেছি পালেহেঁতেন, তেন্তে এই নম্বৰ প্ৰকৃত নম্বৰৰ 9 গুণৰ বৰ্গ হ'লহেঁতেন। তেওঁ পৰীক্ষাত কিমান নম্বৰ পাইছিল? 6

আৰ্হি 2

বাণিজ্যিক গণিত
(Commercial Mathematics)

জ্যেষ্ঠলোকে সদায় কয় যে আয়তকৈ ব্যয় কমকৈ কৰিবা। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল আয়ৰ কিছু অংশ বিপদৰ সময়লৈ সঞ্চয় কৰিব লাগে। তোমালোকে নিশ্চয় চৰাই, জীৱ-জন্তুবিলাকে বাৰিষা বৰষুণৰ দিনৰ বাবে কিছু খাদ্য বাঁহত বা গুহাত সঞ্চয় কৰা দেখিছা। এই প্ৰবাদ লক্ষ্য ৰাখি ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলক সঞ্চয়ৰ উপকাৰিতা আৰু প্ৰয়োজনীয়তাৰ বিষয়ে এই মড্যুলত ক'বলৈ চেষ্টা কৰিম।

বাণিজ্যিক গণিতৰ এই বিভাগটোত বহুত ভাৰতীয় গণিতজ্ঞই কাম কৰিছিল। Yodoksu (370 B.C.) য়ে ভগ্নাংশ, অনুপাত আৰু সমানুপাত আদি বিষয়ৰ ওপৰত গৱেষণা কৰিছিল। অশোক আৰু চন্দ্ৰগুপ্তৰ ৰাজ্যত্বকালত কৰ (tax) লগোৱাৰ কথা বৰ্ণিত আছে। সেইসময়ৰ বহুতো গণিতজ্ঞ যেনে আৰ্যভট্ট, মহাবীৰ, ব্ৰহ্মগুপ্ত, শ্ৰীধৰাচাৰ্য আদিয়ে কৰৰ অনুপাতৰ ওপৰত চৰ্চা কৰিছিল। 900 শতাব্দীত Bakhshali Manuscript আৱিষ্কাৰ হৈছিল আৰু ইয়াত বাণিজ্যিক গণিতৰ বহুতো সমস্যা আছিল।

নিজৰ জমা সুৰক্ষিত ৰখাটো এটা অতি জৰুৰী কাম। বেংক আৰু কিছুমান বিত্তীয় অনুষ্ঠানে গ্ৰাহকৰ টকা জমা ৰাখে আৰু এটা নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ পিছত জমা টকাৰ পৰিমাণ অনুসৰি কিছু উপৰুৱা টকা গ্ৰাহকক দিয়ে, যাক সুত বুলি কোৱা হয়। ইয়ে মানুহক টকা সুৰক্ষিতভাৱে জমা ৰাখিবলৈ আগ্ৰহ জন্মায়। সেইবাবে বেংকত জমা টকাৰ সুতৰ হিচাপ শিক্ষাৰ বিষয় হিচাপে অন্তৰ্ভূক্ত কৰা হৈছে।

চৰকাৰে দেশবাসীৰ বাবে কিছুমান সুবিধা আগবঢ়াইছে। সেইবাবে চৰকাৰে তেওঁলোকৰ ওপৰত কৰ বহুৱায়। ইয়াৰ ভিতৰৰে এটা হ'ল বিক্ৰীকৰ, যিটো শিক্ষাৰ্থীয়ে এই মড্যুলত জানিব পাৰিব। কিনা-বেচাৰ ক্ষেত্ৰত টকা-পইচাৰ আদান-প্ৰদান সাধাৰণতে লাভৰ বাবে কৰা হয়। কেতিয়াবা বস্তুৰ বৃহৎ পৰিমাণৰ যোগান নাইবা বস্তুৰ অনুন্নত মানৰ বাবে বস্তু-বেচাত লোকচান হয়। সেয়েহে শিক্ষাৰ্থীক শতকৰা আৰু লাভ-লোকচানৰ ধাৰণাৰ লগত পৰিচিত কৰা হ'ব। কেতিয়াবা আমাৰ হাতত টকা নাথাকিলে কোনো এটা বস্তু কিস্তিত কিনো। সেইবাবে শিক্ষাৰ্থীসকলে কিস্তি পৰিকল্পনাৰ আধাৰত বস্তু কিনি কেনেকৈ সুতৰ হিচাপ কৰিব লাগে তাকো শিকিব পাৰিব। আকৌ কেতিয়াবা ধাৰে লোৱা টকা সময় মতে পৰিশোধ কৰিব নোৱাৰিলে ধাৰ দিওঁতাই সুতৰ ওপৰতে সুত আৰোপ কৰে, যাক মিশ্ৰসুত বোলা হয়। মিশ্ৰসুতৰ অধ্যয়নো এই মড্যুলৰ অন্তৰ্ভূক্ত কৰা হৈছে। বস্তুৰ দামৰ হ্ৰাস-বৃদ্ধি উলিওৱাৰ ক্ষেত্ৰটো মিশ্ৰসুতৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰা হৈছে। বিভিন্ন বস্তুৰ মানৰ বঢ়া-টুটাৰ ক্ষেত্ৰটো এই সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰা হয়।

/